担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

ベクトル空間と基底　解答例

問題 1.

- $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であることを示す。

$$\begin{aligned} 0\boldsymbol{x} &= (0+0)\boldsymbol{x} \\ &= 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} \quad (\text{条件 (5) より}) \end{aligned}$$

両辺に $0\boldsymbol{x}$ の逆ベクトル $-0\boldsymbol{x}$ を足せば $0\boldsymbol{x}+(-0\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x})+(-0\boldsymbol{x})$. 条件 (1) より $0\boldsymbol{x}+(-0\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x}+(0\boldsymbol{x}+(-0\boldsymbol{x}))$. 条件 (3) の逆ベクトルの定義より $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}+\mathbf{0}$. 最後に条件 (2) より $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}$.

- $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ であることを示す。$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}$ であることは先に求めた。

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = 0\boldsymbol{x} &= (1+(-1))\boldsymbol{x} \\ &= 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} \quad (\text{条件 (5) より}) \end{aligned}$$

条件 (7) よりこれは $\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}$. 従って $\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である。全く同様にして $(-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ も成立する。これは条件 (3) から $(-1)\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルであることを示しているので $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

問題 2.

(1) $f, g \in C([0,1];\mathbb{R})$ とする。

(定数倍) 定義より $(af)(x) = a\cdot f(x)$ だが、f は連続関数なのでその定数倍もまた連続である。従って $af \in C([0,1];\mathbb{R})$.

(足し算) 定義より $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ だが、f, g は連続関数であるためその和も連続である。従って $f+g \in C([0,1];\mathbb{R})$.

以上より、$C([0,1];\mathbb{R})$ はベクトル空間である。

(2) $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ はそれぞれ問題の漸化式を満たすような数列とする。

(定数倍) 数列の定数倍の定義より $c\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{ca_n\}_{n=1}^\infty$ であるが、$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の漸化式より $ca_{n+2} = ca_{n+1}+ca_n$. 従って数列 $c\{a_n\}_{n=1}^\infty$ も問題の漸化式を満たす。

(足し算) 数列の和の定義より $\{a_n\}_{n=1}^\infty+\{b_n\}_{n=1}^\infty = \{a_n+b_n\}_{n=1}^\infty$ であるが、$\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$ の漸化式より $a_{n+2}+b_{n+2} = (a_{n+1}+a_n)+(b_{n+1}+b_n) = (a_{n+1}+b_{n+1})+(a_n+b_n)$. 従って数列 $\{a_n+b_n\}_{n=1}^\infty$ も問題の漸化式を満たす。

この数列の一般項は $A, B \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

と書けるので、ベクトル空間の要素は $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^\infty$ というもので尽くされる。

(3) $f(x), g(x)$ を問題の微分方程式を満たすような関数とする。

(定数倍)　$c \in \mathbb{R}$ とする。$(cf)(x) = c \cdot f(x)$ であったので

$$\frac{d^2(cf)}{dx^2} + \omega^2(cf) = c\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 f\right) \equiv c \cdot 0 \equiv 0.$$

従って関数 cf も問題の微分方程式を満たす。

(足し算) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ であったので

$$\begin{aligned}\frac{d^2(f+g)}{dx^2} + \omega^2(f+g) &= \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 g}{dx^2} + \omega^2 f + \omega^2 g \\ &= \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 f\right) + \left(\frac{d^2 g}{dx^2} + \omega^2 g\right) \equiv 0 + 0 \equiv 0.\end{aligned}$$

従って関数 $f+g$ も問題の微分方程式を満たす。

この微分方程式の解は適当な実数 $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$f(x) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

と表されるのであった (第一回目の演習問題解答を参照)。従って、このベクトル空間の要素は $f(x) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$ という実数値関数で尽くされる。

問題 3.

(1) (定数倍) $\boldsymbol{x}$ を n 番目の成分が 0 であるようなベクトル、$c \in \mathbb{R}$ とすると

$$c\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このベクトルは n 番目の成分が 0 である。

(足し算) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をそれぞれ n 番目の成分が 0 であるようなベクトルとすると、

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このベクトルも n 番目の成分が 0 である。

よって、n 番目の成分が 0 であるようなもの全体は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間をなす。

(2) $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^d b_i x^i$ をそれぞれ $\mathbb{R}[x]$ の元で次数が高々 d であるようなものとする。

(定数倍) 勝手な $c \in \mathbb{R}$ に対して $cf(x) = c(\sum_{i=1}^{d} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{d} ca_i x^i$ であり、これは高々次数 d の多項式である。

(足し算) $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i + \sum_{i=0}^{d} b_i x^i = \sum_{i=0}^{d} (a_i + b_i) x^i$ であり、これは高々次数が d であるような多項式である。

以上より、P_d は $\mathbb{R}[x]$ の部分ベクトル空間をなす。

(3) 問題 2 の (3) と同様。

問題 4.

以下、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ は W_i の元とする。(i は小問の問題番号)

(1) W_1 は部分ベクトル空間である。実際、部分ベクトル空間の条件は次のように確かめられる。

(定数倍) 勝手な $c \in \mathbb{R}$ に対し $c\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{pmatrix}$ であり $cx_1 + cy_1 = c(x_1 + y_1) = 0$. 従って $c\boldsymbol{x} \in W_1$ である。

(足し算) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ であり、$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0$ なので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1$.

(2) W_2 は部分ベクトル空間ではない。実際、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ だが $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 2\ (\neq 1)$ であるため、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin W_2$.

(3) W_3 は部分ベクトル空間ではない。実際、$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ より $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1$ だが、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_3$ に対し $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$ とは限らない。(例えば $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とせよ。)

(4) W_4 は部分ベクトル空間である。実際、部分ベクトル空間の条件は次のように確かめられる。

(定数倍) 勝手な $c \in \mathbb{R}$ に対し、$A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $c\boldsymbol{x} \in W_4$.

(足し算) $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$. 従って $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_4$.

問題 5.

(1) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ とする。$a_1(x^2+x+1)+a_2(x^2-x)+a_3(x-1)=0$ と仮定する。この式を x の次数により整理すれば $(a_1+a_2)x^2+(a_1-a_2+a_3)x+(a_1-a_3)=0$. 従って $a_1+a_2=a_1-a_2+a_3=a_1-a_3=0$ である。この条件を行列を使って書けば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

行列式が $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=3$ であることから、上の行列は正則。よって $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

(2) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ とする。$a_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ と仮定する。行列を用れば

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。行列式が $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}=2\alpha+1$ だから、上の行列は $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ に限って正則である。連立方程式が自明な解 (すなわち $a_1=a_2=a_3=0$) しか持たないための必要十分条件は係数行列が正則となる事だったので、3 つのベクトルが一次独立であるための条件は $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ である。

問題 6. 問題の対偶を取って、次の命題を証明する。

> $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が一次独立でない
> $\Leftrightarrow$ ある i に対し $\boldsymbol{x}_i=a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+a_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+\cdots a_k\boldsymbol{x}_k$ を満たすような実数の組 $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ が存在する。

$\Rightarrow$) ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が一次独立でないので、ある $a_i \neq 0$ が存在して

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_i\boldsymbol{x}_i+\cdots+a_k\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}$$

となる。 $\boldsymbol{x}_i$ に注目してこの式を変形すれば ($a_i \neq 0$ より)

$$\boldsymbol{x}_i=-\frac{a_1}{a_i}\boldsymbol{x}_1-\cdots-\frac{a_{i-1}}{a_i}\boldsymbol{x}_{i-1}-\frac{a_{i+1}}{a_i}\boldsymbol{x}_{i+1}-\cdots-\frac{a_k}{a_i}\boldsymbol{x}_k.$$

担当教員：久本 智之 研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

ここで $k-1$ 個の実数 $-\frac{a_1}{a_i},\cdots,-\frac{a_{i-1}}{a_i},-\frac{a_{i+1}}{a_i},\cdots,-\frac{a_k}{a_i}$ を $b_1 := -\frac{a_1}{a_i},\cdots,b_{i-1} := -\frac{a_{i-1}}{a_i},b_{i+1} := -\frac{a_{i+1}}{a_i},\cdots,b_k := -\frac{a_k}{a_i}$ とおき直せば

$$\boldsymbol{x}_i = b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots b_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + b_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots + b_k\boldsymbol{x}_k$$

となり、確かに $\boldsymbol{x}_i$ はある一次結合で書けている。

$\Leftarrow$) ある実数の組 $a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_k$ について

$$\boldsymbol{x}_i = a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + a_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots a_n\boldsymbol{x}_n$$

が成立しているとする。$\boldsymbol{x}_i$ を右辺に移せば

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} - \boldsymbol{x}_i + a_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots a_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

となるが、これは $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ が一次独立でないことを意味する。

問題 7. 多項式を関数だと思って $f(x) := a_0\cdot 1 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_d(x-1)^d$ とする。ただし $a_0,\cdots,a_d \in \mathbb{R}$ である．2 つの多項式が等しい事とそれらが関数として等しい事は同値である事に注意する。

(P_d を張ること) $f(x) \in P_d$ を任意の元とする。$f(x)$ の $x=1$ での Taylor 展開を考えれば

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(x-1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(d)}(1)}{d!}(x-1)^d.$$

$f(x)$ は高々d次の多項式なので残りの項は消えていることに注意せよ。$f(1), f^{(1)}(1),\cdots,\frac{f^{(d)}(1)}{d!}$ は全て $\mathbb{R}$ の元なので、$f(x)$ は確かに $\sum_{i=0}^{d} b_i(x-1)^i$ $(b_i \in \mathbb{R})$ という形に表されている。

(一次独立性) $f(x) = a_0\cdot 1 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_d(x-1)^d = 0$ と仮定する。$f(x)$ を順次微分していき $x=1$ を代入したものは

$$\begin{aligned} f^{(0)}(1) &= a_0 \\ f^{(1)}(1) &= a_1 \\ f^{(2)}(1) &= 2a_2 \\ &\vdots \\ f^{(d)}(1) &= d!a_d \end{aligned}$$

となるが、$f(x)$ が元々ゼロなのだから $a_0 = a_1 = \cdots = a_d = 0$ である。

以上より、$1,(x-1),\cdots,(x-1)^d$ は P_d の基底をなす。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8.

(1) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in W_1 \cap W_2,\ c \in \mathbb{R}$ とする。

(定数倍) $c\boldsymbol{v} \in W_1$ かつ $c\boldsymbol{v} \in W_2$ であることを示せばよい。まず、$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2 \subset W_1$ なので、W_1 が部分ベクトル空間なことから $c\boldsymbol{v} \in W_1$. 同様に、$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2 \subset W_2$ なので、W_2 が部分ベクトル空間なことから $c\boldsymbol{v} \in W_2$. よって $c\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$.

(足し算) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W_1$ かつ $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W_2$ を示せばよい。$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in W_1 \cap W_2 \subset W_1$ なので、W_1 が部分ベクトル空間なことから $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W_1$. 同様に、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in W_1 \cap W_2 \subset W_2$ なので、W_2 が部分ベクトル空間なことから $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W_2$. よって $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W_1 \cap W_2$.

以上より、$W_1 \cap W_2$ は部分ベクトル空間となることが分かる。

(2) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in W_1 + W_2,\ c \in \mathbb{R}$ とする。

(定数倍) $c\boldsymbol{v} \in W_1 + W_2$ を示せばよい。$\boldsymbol{v} \in W_1 + W_2$ だから、ある $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ があって $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ と書ける。すると $c\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{w}_1 + c\boldsymbol{w}_2$ だが、W_1, W_2 が部分ベクトル空間だから $c\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $c\boldsymbol{w}_2 \in W_2$. つまり $c\boldsymbol{v}$ は W_1 および W_2 の要素の和で表されているので、$W_1 + W_2$ の要素である。

(足し算) $\boldsymbol{v} \in W_1 + W_2$ ならば、ある $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ があって $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ と書ける。同様に、$\boldsymbol{v}' \in W_1 + W_2$ ならば $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{w}_1{}' + \boldsymbol{w}_2{}'$ と書ける。すると $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) + (\boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2') = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_1') + (\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_2')$ だが、W_1, W_2 が部分ベクトル空間だから $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_1' \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_2' \in W_2$. つまり $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$ は W_1 および W_2 の元の和で表されているので、$W_1 + W_2$ の要素である。

以上より、$W_1 + W_2$ は部分ベクトル空間となることが分かる。

(3) W_1 の基底を $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$, W_2 の基底を $\boldsymbol{w}_1', \cdots, \boldsymbol{w}_n'$ とする。$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_1', \cdots, \boldsymbol{w}_n'$ が $W_1 + W_2$ の基底を成すことを示せばよい。

$W_1 + W_2$ の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{w} \in W_1$ および $\boldsymbol{w}' \in W_2$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \tag{$*$}$$

と書ける。$\boldsymbol{w}$ を W_1 の基底で書けば、実数の組 $a_1, \cdots, a_m$ が存在して

$$\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{w}_m.$$

同様に $\boldsymbol{w}'$ を W_2 の基底で書けば、実数の組 $a_1', \cdots, a_n'$ が存在して

$$\boldsymbol{w}' = a_1'\boldsymbol{w}_1' + \cdots + a_n'\boldsymbol{w}_n'.$$

式 $(*)$ を思い出せば、$\boldsymbol{v}$ は W_1, W_2 の基底を用いて

$$\boldsymbol{v} = (a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{w}_m) + (a_1'\boldsymbol{w}_1' + \cdots + a_n'\boldsymbol{w}_n')$$

と書ける。すなわち、$W_1 + W_2$ の勝手な元 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_1', \cdots, \boldsymbol{w}_n'$ の一次結合で表せる。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

次に、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}'_1, \cdots, \boldsymbol{w}'_n$ の一次独立性を確かめる。$a_1, \cdots, a_m, a'_1, \cdots, a'_n \in \mathbb{R}$ が

$$a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{w}_m + a'_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a'_n\boldsymbol{w}'_n = \boldsymbol{0}$$

を満たすと仮定する。これは

$$a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{w}_m = -a'_1\boldsymbol{w}'_1 - \cdots - a'_n\boldsymbol{w}'_n$$

と書き直せる。左辺を $\boldsymbol{x}$ と置こう。$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{w}_m$ だから $\boldsymbol{x}$ は W_1 の要素である。一方、$\boldsymbol{x} = -a'_1\boldsymbol{w}'_1 - \cdots - a'_n\boldsymbol{w}'_n$ だから $\boldsymbol{x}$ は W_2 の元でもある。つまり $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ となるわけだが、仮定より $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ なので、$a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{w}_m = -a'_1\boldsymbol{w}'_1 - \cdots - a'_n\boldsymbol{w}'_n = \boldsymbol{0}$ と分かる。すると、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ が W_1 の基底だから $a_1 = \cdots = a_m = 0$. 同様に $-a'_1 = \cdots = -a'_n = 0$ である。

問題 9.

(1) $f(x), g(x) \in P'_d,\ c \in \mathbb{R}$ とする。

(定数倍) $\int_0^1 cf(x)dx = c\int_0^1 f(x)dx = c \cdot 0 = 0$ なので $cf(x) \in P'_d$.

(足し算) $\int_0^1 f(x) + g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x) = 0 + 0 = 0$ より $f(x) + g(x) \in P'_d$.

(2) $f(x), g(x) \in P''_d$ とする。$\int_0^1 f(x) + g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 1 + 1 = 2$ より $f(x) + g(x) \notin P''_d$。だから P''_d は部分ベクトル空間でない。

(3) $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ だから $x - \frac{1}{2}$ に注目すると、

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

なので、$\sqrt{3}(2x-1) \in P'_d$ と分かる。同様に $\frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1) \in P'_d$. 勝手な多項式 $f(x) \in P'_d$ が

$$f(x) = a_0 + a_1\sqrt{3}(2x-1) + a_2\frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)$$

と書けることはすぐ分かる。両辺を積分すれば $a_0 = 0$ が導かれるので、$f(x)$ は $\sqrt{3}(2x-1), \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)$ の一次結合で書ける。$\sqrt{3}(2x-1), \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)$ が一次独立なことは簡単に確かめられる。

問題 10.

(V を生成する条件) V の勝手な元 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と書ける。$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2$ となる α, β が存在したとしよう。すると $\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 = \alpha(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2) + \beta(a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2) = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\boldsymbol{v}_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\boldsymbol{v}_2$ なので、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の一次独立性から $s = a_{11}\alpha + a_{12}\beta$ および $t = a_{21}\alpha + a_{22}\beta$ が成り立つ。行列を用いれば

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

と書ける。今の議論を逆に追えば、このような連立方程式の解 α, β は $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2$ を満たすこともわかる。勝手な $s, t \in \mathbb{R}$ に対し上の連立方程式が解を持つための条件は、行列 A が正則となることだった。

(一次独立性) $\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 = 0$ と仮定すると、$\alpha(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2) + \beta(a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2) = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\boldsymbol{v}_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\boldsymbol{v}_2 = 0$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は V の基底なので、特に一次独立性より $a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0$ 及び $a_{21}\alpha + a_{22}\beta = 0$ が成り立つ。行列を用いれば

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ということである。この連立方程式が自明な解 $(\alpha = \beta = 0)$ 以外を持たないための必要十分条件は、行列 A が正則となることだった。

以上より、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が V の基底になるための必要十分条件は A が正則となることである。

問題 11.

(1) この命題は誤りである。例えば、

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1 = -(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3)$ なのでこれらは一次独立ではない。

(2) この命題は誤りである。例えば

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考える。$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は一次独立、$\boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立、$\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_1$ は一次独立であるが、$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ であるため $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立でない。

(3) この命題は誤りである。例えば、$\boldsymbol{w} := -\boldsymbol{v}_1$ とする。$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{w}$ は一次独立でない。