担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

平面の方程式　解答例

問題 1. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ として $\dfrac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}{|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2} \leq 1$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \\
&= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \\
&= (x_1y_2-x_2y_1)^2 + (x_1y_3-x_3y_1)^2 + (x_2y_3-x_3y_2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

であるから、題意は示された。

問題 2.

(1) 求める平面を $ax+by+cz+d=0$ とする。条件より次の連立方程式ができる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この連立方程式を掃き出し法によって解く。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -44 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから $d=11t$ とすると $11c=2d=22t$ より $c=2t$ である。$b=-9c+d=-18t+11t=-7t$ であって、$a=4c-d=8t-11t=-3t$ となる。ゆえに連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

となる。$t=-1$ とすれば方程式 $3x+7y-2z-11=0$ を得る。

(2) ある平面に平行な平面はそれらの法ベクトルも平行になるので、求める平面は $x-2y+3z+d=0$ と書ける。点 A を通ることから d が定まり、求める平面は $x-2y+3z+6=0$ である。

(3) 題意より求める平面の法ベクトルが $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ なので、求める平面は $ax+by+cz+d=0$ と書ける。この平面が点 (a,b,c) を通り、また点 (a,b,c) は単位球面上の点であるから $d=-(a^2+b^2+c^2)=-1$ となる。よって求める平面は $ax+by+cz-1=0$ である。

問題 3. 点 $\boldsymbol{x}_0$ から、この平面に下ろした垂線の足を $\boldsymbol{x}_1$ とする。求める距離は $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1|$ である。$\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1$ はこの平面の法ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ に平行なので実数 k を用いて $\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1=k\boldsymbol{n}$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

と書ける。よって $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - k\boldsymbol{n} = (x_0 - ka, y_0 - kb, z_0 - kc)$ であり、この点が平面上にあることから

$$a(x_0 - ka) + b(y_0 - kb) + c(z_0 - kc) + d = 0$$

である。よってこれを k について解けば $k = \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ を得る。ゆえに

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1| = |k||\boldsymbol{n}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

問題 4. 前者の平面を $ax + by + cz + d = 0$ とし、$\boldsymbol{a} = (1, -1, 0), \boldsymbol{b} = (6, 2, 3)$ とする。この平面の法ベクトルは $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ であり、$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{a}$、および $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する。ここから a, b, c に関する方程式を得る。さらに、点 $(4, 4, 3)$ を通ることからも a, b, c, d に関する方程式を得る。これらを連立させて解くと平面の方程式は $3x + 3y - 8z = 0$ であることがわかる。後者の平面に関しても同様に方程式を求めることができ、それが前者の平面の方程式と一致していることがわかる。

問題 5. (1) $y = s, z = t$ とすると $x = -y - z - 1 = -s - t - 1$ である。よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $y = 3s, z = 3t$ とすると $3x = -4y + 5z = -12s + 15t$ より $x = -4s + 5t$ である。よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} t.$$

問題 6. 問題 4 と同様の方針で求めればよい。

(1) は $x - y + 2z - 2 = 0$ で、(2) は $25x + 7y - 24z = 0$ である。

問題 7. (1) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ とする。$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はその定義より、「形式的な」行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

の第 1 行に関する余因子展開と一致していることがわかる。

問題の前者については行列式の 2 つの行を入れ替えると行列式の符号が変わることから従い、後者については行列式の線形性から従う。

(2) 内積が 0 になることを示せばよい。

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

である（最初の等式は行列式の第 1 行に関する余因子展開、2 番目の等式は行列式の性質より従う）。もう一方も同様である。

(3) $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, 0), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0), t = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ とすると $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (0, 0, t)$ である。xy 平面上のベクトル $\boldsymbol{a}' = (a_1, a_2), \boldsymbol{b}' = (b_1, b_2)$ に対し、$\boldsymbol{a}'$ から見て $\boldsymbol{b}'$ が反時計回りにどのくらい離れているかという角度を θ とする。このとき、

$$t = |\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'| \sin \theta$$

が成り立つ。これは次の小問 (4) と違って、平面上のベクトルに関する公式であることに注意せよ。特に $0 < \theta < \pi$ のとき $t > 0$、$\pi < \theta < 2\pi$ のとき $t < 0$ となる。$\boldsymbol{a}$ を右手の親指、$\boldsymbol{b}$ を人差し指におくことを考えると、確かに $0 < \theta < \pi$ のとき中指は上を向き、$\pi < \theta < 2\pi$ のとき中指は下を向いている。

(4) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 < \theta < \pi)$ とする。

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 &= (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + (a_3 b_1 - b_3 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

より $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \theta$ となる。$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \theta$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が定める平行四辺形の面積に等しいことから題意は示された。

(5) 左辺の第 1 成分は

$$\left(a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \right) + \left(b_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \right) + \left(c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

であるが第 1、3、5 項の和と第 2、4、6 項の和はそれぞれ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \\ c_2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_3 \\ b_3 & b_1 & b_3 \\ c_3 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる（それぞれの行列式の第 1 列に関する余因子展開を考えよ）。これらは行列式の性質からその値はともに 0 である。残りの成分についても同様である。

問題 8. $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -5), \overrightarrow{AC} = (-5, 3, 3)$ より $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, 28, -8)$ である。このベクトルが求める平面の法ベクトルになっているので、求める平面は $12x + 28y - 8z + d = 0$ と書ける。点 B を通ることから $12 + 32 + d = 0$ である。よって求める平面は $3x + 7y - 2z - 11 = 0$ である。

問題 9. 運動量ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすると速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いて $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ と書ける。また速度（の大きさ）と角速度（の大きさ）に関して $|\boldsymbol{v}| = r\omega$ が成り立つ。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は平面 $z = 0$ 上にあり、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交しているので

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = (0, 0, |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{p}|) = (0, 0, mr^2\omega)$$

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

となる。

(付記) ここで求めた外積ベクトルは角運動量と呼ばれるものである。

問題 10. 題意より連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解けばよい。答えは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

問題 11. 球面は単位球、平面は z 軸に垂直であるとしてよい。するとそれぞれの方程式は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = h$ と書ける。前者に後者を代入すれば $x^2 + y^2 = 1 - h^2$ となるので、$h^2 > 1$ ならば交わりはなく、$h^2 = 1$ ならば交わりは点、それ以外のとき交わりは (平面 $z = h$ 上の) 円となる。