担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

平面の方程式

実施日：October 11, 2017

演習第 2 回では、Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の基本事項を扱う。Newton 力学では、我々の住む宇宙はこのような 3 次元の空間であるとする。(我々の宇宙には原点のような特別な点はないはずなので厳密にはもう少し説明が必要である。) 次元の低いベクトル空間という意味でも基本的であり、我々の直感が働きやすい。ここで学ぶ道具は、後に多変数関数のグラフを調べたりする際にも役に立つだろう。

定義 1. 3 つの実数の組 (x_1, x_2, x_3) 全体を $\mathbb{R}^3$ で表す。

(1) 特別な点 $(0, 0, 0)$ を原点と呼ぶ。

(2) 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に対して $a \in \mathbb{R}$ による定数倍を

$$a\boldsymbol{x} = (ax_1, ax_2, ax_3)$$

と定義する。

(3) 2 つの点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対して加法を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

と定義する。

(4) 2 つの点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対して内積を

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

と定義する。

条件 (1)〜(3) はベクトル空間の性質である。(4) によって、以下に挙げるような幾何学的な量をいろいろ測ることが出来るようになる:

$$\begin{aligned}
&(\text{長さ}) && |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \\
&(\text{角度}) && \cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \\
&(\text{直交}) && \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0.
\end{aligned}$$

問題 1. 実際に

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \leq 1$$

となっていることを確認せよ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

平面の方程式

空間内で最も簡単な図形が平面であることには疑いがない。平面と言えば、感覚的には「まっすぐに広がっている」点の集まりのことだろう。しかしながら、数学的には「1 次方程式の解空間である」とするのが最も見通しがよい。

定義 2. 適当な $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を用いて

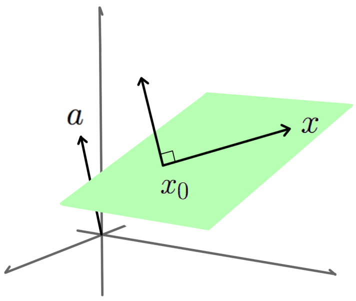
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

と表せる $\mathbb{R}^3$ の部分集合を平面という。ただし a, b, c のうち少なくとも 1 つはゼロでないとする。

例えば xy-平面は方程式 $z = 0$ で定義される平面である。係数 a, b, c, d を一斉に定数倍しても解空間は変わらないことに注意。1 次方程式はまた、

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) = 0$$

と書くこともできる。すなわち、平面とは「点 $\boldsymbol{x_0}$ を通り $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ の定める方向と直交するような点の集まり」でもある。このとき $\boldsymbol{a}$ をこの平面の法ベクトルと呼ぶ。



このような例を見れば分かるように、数ベクトルは単に「数の組」というだけでなく、「位置」や「方向」といった直感的意味を伴うことがある。具体的な問題を扱う上では、登場するベクトルのこのような幾何学的意味を意識することが大切である。

問題 2. (提出問題) 次の条件を満たす平面の方程式を求めよ。

(1) 3 点 $A = (2, 1, 1)$, $B = (1, 0, -4)$, $C = (-3, 4, 4)$ を通る平面

(2) 平面 $x - 2y + 3z = 0$ に平行で、点 $A = (1, 2, -1)$ を通る平面

(3) 点 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ で単位球面に接する平面

問題 3. 平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ との距離を求めよ。（ヒント：点 $\boldsymbol{x}_0$ からこの平面に下ろした垂線の足を $\boldsymbol{x}_1$ とすると、$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1$ はこの平面の法ベクトル

$\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に平行なので実数 k を用いて $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1 = k\boldsymbol{n}$ と書ける。このことと点 $\boldsymbol{x}_1$ が平面上の点であることを用いよ。)

平面のパラメータ表示

点 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通り、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の方向に広がった平面は

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{ある } s, t \in \mathbb{R} \text{ が存在して } \boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}_0 \right\}$$

と書ける。上の s, t は自由に動く変数であり、パラメータという。これは「まっすぐに広がった空間」という平面のイメージにも近い。しかしながら、起点や方向 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の選び方に恣意性が高く扱いにくいという側面も持っている。それに、例えば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ だと平面ではなく直線になってしまう。

問題 4. 点 $(4, 4, 3)$ を通り $(1, -1, 0), (6, 2, 3)$ 方向に広がった平面と、原点を通り $(-2, 2, 0), (2, 6, 3)$ 方向に広がった平面は同じものであることを示せ。

方程式による表示とパラメータ表示が同等であることを練習問題によって確かめよう。

問題 5. (提出問題) 次の方程式で定まる平面をパラメータ表示せよ。

(1) $x + y + z + 1 = 0$

(2) $3x + 4y - 5z = 0$

逆にパラメータ表示から平面の方程式を求めるには、適当に 3 点を選んで未定係数を求めてもよいし、パラメータである s, t を消去して求めてもよい。

問題 6. 次の平面の方程式を求めよ.

(1) 点 $\boldsymbol{x}_0 = (1, 1, 1)$ を通り、$\boldsymbol{a} = (-1, -3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (2, -2, -2)$ の方向に広がった平面

(2) 原点、$(3, 3, 4)$、$(-4, 4, -3)$ を通る平面

外積

上で方向ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から法ベクトルを求めた計算を洗練させたものが外積である。ポイントは、法ベクトルの向きと長さに自然な選択があるということである。

定義 3. ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3,\ a_3 b_1 - b_3 a_1,\ a_1 b_2 - b_1 a_2) \end{aligned}$$

で定まるベクトルを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**と呼ぶ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. (外積の基本的性質)

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, および $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が成り立っていることを示せ。

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面は空間を 2 つに分ける。このうち、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が向いているのは、右手の親指にベクトル $\boldsymbol{a}$、人差し指にベクトル $\boldsymbol{b}$ を置いたとき、中指が自然に向く方である。（ベクトルが直交しているというわけではない。）

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平面 $z=0$ 上にあるときにこの事実を示せ。

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の長さは、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が定める平行四辺形の面積に等しいことを示せ。

(5) Jacobi の恒等式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$ を示せ。

問題 8. 問題 2 の (1) を再度考える。平面の法ベクトルを外積を使って求めることにより、この平面の方程式を求めよ。

問題 9. (提出問題)　平面 $z=0$ において、原点を中心とする半径 r の円周上を、質量 m の質点 P が角速度 ω で反時計周りに運動している。この時、位置ベクトルと運動量ベクトルの外積を計算せよ。

おまけ: 空間内の直線

平面を 1 次方程式の解空間だと思うと、直線は 2 つの平面の交わり、つまり連立 1 次方程式の解空間と考えられる。このように、方程式の立場で見ると、次元の低い図形の方が却って扱いが複雑になるという側面がある。一方で、空間内の直線は

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{ある } t\in\mathbb{R} \text{ が存在して } \boldsymbol{x}=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}_0\right\}$$

とパラメータ表示できる。こちらはパラメータの数が減ったという意味で単純になっている。

問題 10. 平面 $x+2y+3z=3$ と平面 $x+3y+4z=2$ の交わりとして得られる直線をパラメータ表示せよ。

問題 11. 球面と平面の交わりは必ず円を成すことを証明せよ。