作成者：久本 智之　研究室：A343　　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

理解の確認：解答

分からなかったところは必ず復習してください。前期のノートを見返す、教科書を調べる、Cafe David に来る、など、色々なやり方を試すこと。

問題 1. (1) 答え　-89.

(2) 「ある列の定数倍を別の列に加えても行列式の値は変わらない」ことを思い出す。

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目に 2,3,4 列目の +1 倍を加えた)}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目の共通項をくくりだした)}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & -b+c & b-c \\ 0 & -a+c & -b & a-c \\ 0 & -a+b & a-b & -c \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目を掃き出した)}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & -b+c & b-c \\ -a+c & -b & a-c \\ -a+b & a-b & -c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a+b-c & -b+c & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ -a+b-c & a-b & -c \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目に 3 列目の +1 倍を加えた)}$$

$$= -(a+b+c)(a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & -b+c & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ 1 & a-b & -c \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目の共通項をくくりだした)}$$

$$= -(a+b+c)(a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & -b+c & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ 1 & a-b & -c \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目の共通項をくくりだした)}$$

$$= -(a+b+c)(a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & -b+c & b-c \\ 0 & -b & a-c \\ 0 & a-c & -b \end{vmatrix} \quad \text{(1 列目を掃き出した)}$$

$$= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

(注意) 3 辺の長さが a, b, c の三角形の面積を S とするとき、$-16S^2$ はこの行列式に等しい。

作成者：久本 智之 研究室：A343 E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. 基本行列とは、基本変形に対応する行列のことであった。例えば、3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

に対し「3 行目の c 倍を 1 行目に足す」という基本変形を考えると、これは行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を左から掛ける操作と一緒である。実際、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+ca_{31} & a_{12}+ca_{32} & a_{13}+ca_{32} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

が成り立っている。このように、基本変形はある行列を左ないしは右から掛けることで実現できる。詳しくは前期の内容を復習せよ。

問題の解答を与える。まず、与えられた行列の 1 列目を単位ベクトルにする (掃き出す) には「2 行目の-1 倍を 3 行目に加える」基本変形をすればよい。すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

という行列を得る。1 列目は確かに、単位ベクトルになっている。この行列に「2 行目の 1 倍を 3 行目に加える」基本変形をすれば元に戻る。このことを基本行列の言葉で述べると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。1 番右に現れた行列に対し同じように基本変形を繰り返していく。例えば、「1 行目と 2 行目を入れ替える」基本変形を考えることで、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る。1 番右に現れた行列の 2 列目を単位ベクトルにする (掃き出す) ような基本変形を考えれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

さらに、3 列目を単位ベクトルにする (掃き出す) ことで

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。以上より、与えられた対称行列は

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

と、基本行列の積に書ける。
このような表し方は全然一通りではない。例えば、最初に 1 行目と 2 行目を入れ替えてから 1 列目を掃き出せば、

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

とも書ける。

問題 3. 結論は次のようになる。(もちろん、結論だけでは解答として不十分である。)

$f(x)$ は至る所で連続である。原点以外では微分可能であるが、原点では微分可能でない。

まず連続性について議論する。$x \neq 0$ ならば関数 $1/x$ と $\sin x$ は実数に値を持つ連続関数だから、合成関数 $\sin(1/x)$ も連続である。従って、$f(x) = x\sin(1/x)$ は連続関数の積であり、原点以外で連続である。
原点における連続性は

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

が成り立つということである。これは、x がどのように 0 に近づいたとしても $f(x)$ は $f(0)$ に近づくという意味である。今の場合、

$$|f(x) - f(0)| = \begin{cases} |x\sin(1/x)| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

であり、いずれにしても $|f(x) - f(0)| \leq |x|$ は成り立っている。したがって、“挟み打ちの原理”により $x \to 0$ のとき $f(x) \to f(0)$ となることが分かる。

次に、微分可能性について議論する。原点での微分可能性を確かめればよい。これは

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

が、h がどのように 0 に近づいても同じ値に近づくということである。しかし、$h \neq 0$ ではこの値は $\sin(1/h)$ である。だから、h が 0 に近づくとき絶えず 1 と -1 の間を振動し、一定の値には近づかない。つまり $f(x)$ は原点で微分不可能である。

問題 4. 対称性より、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx$$

について考えれば十分である。まず、$x \to 0$ のとき $\log(\sin x) \to -\infty$ だから、この積分は広義積分である。$x \to 0$ のとき

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

であることに注意する。これは $x \to 0$ のとき広義積分の収束を示すのに、概ね $\sin x$ を x に取り替えて $\log x$ を考えればよいことを意味する。ちゃんとやるためにははさみうちの原理を使わなければいけないので、x の代わりに $x/2$ を用いるのが手頃である。実際、$0 < x < \pi/2$ の範囲において $\sin x \geq x/2$ だから

$$0 \geq \log\sin x \geq \log x - \log 2$$

と比較できる。さらに、$0 < x \leq 1$ に対して

$$\log x \geq -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

が成り立つ。右辺の原始関数は $-2\sqrt{x}$ で、広義積分

$$-\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

は収束する。今問題にしている広義積分が収束するかどうかは区間 $[0,1]$ の範囲に制限して考えればよく、それは結局

$$0 \geq \int_0^1 \log(\sin x)\ dx \geq -\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} - \log 2$$

と両側から押さえられる。よって、はさみうちの原理から広義積分が収束することが分かる。

(付記 1) $\log x$ の原始関数は $x\log x - x$ なので、$1/\sqrt{x}$ と比較せずに直接

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ x\log x - x\ \Big]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\log\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

と計算してもよい。

(付記 2) 広義積分が収束していることが分かると、次のように積分値を求めることができる:

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\ dx$$

とおけば

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\ dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2\cos x \sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 + I + I \end{aligned}$$

より

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

I が有限と分かっているからこのようなことができる。もちろん、原始関数が求められたわけではない。

問題 5. $f(x) = \arcsin x$ とおく。逆関数の微分法により

$$f(x)^{(1)} = f(x)' = (1-x^2)^{-1/2}$$

だから、

$$\begin{aligned} f(x)^{(2)} &= x(1-x^2)^{-3/2}, \\ f(x)^{(3)} &= (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}, \\ f(x)^{(4)} &= 9x(1-x^2)^{-5/2} + 15x^3(1-x^2)^{-7/2}, \\ f(x)^{(5)} &= 9(1-x^2)^{-5/2} + 90x^2(1-x^2)^{-7/2} + 105x^4(1-x^2)^{-9/2} \end{aligned}$$

と計算できる。Taylor の公式より、ある $0 \le x_0 \le x$ があって

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}x^5$$

が成り立つのであった。上の計算より

$$f(0)^{(1)} = 1,\ f(0)^{(2)} = 0,\ f(0)^{(3)} = 1,\ f(0)^{(4)} = 0$$

だから、$x = 1/5$ を代入すると

$$f(1/5) = (0.201333\ldots) + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}\left(\frac{1}{5}\right)^5$$

を得る。x_0 の具体的な値が分からないので、剰余項については大雑把に評価しよう。

$$x_0 \le \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{1-x_0^2} \le \frac{25}{24}$$

だから、

$$
\begin{aligned}
f(x_0)^{(5)} &= 9(1-x_0^2)^{-5/2} + 90x_0^2(1-x_0^2)^{-7/2} + 105x_0^4(1-x_0^2)^{-9/2} \\
&\le 5^5 \cdot 3^{-1/2} \cdot 2^{-15/2} + 5^6 \cdot 3^{-3/2} \cdot 2^{-19/2} + 7^1 \cdot 5^6 \cdot 3^{-7/2} \cdot 2^{-27/2} \\
&\le 5^5 \cdot 2^{-7}
\end{aligned}
$$

よって剰余項は

$$
\frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \le \frac{1}{5!2^7} = 0.000065\ldots
$$

と上から押さえられる。

$$
(0.201333\ldots) \pm (0.000065\ldots)
$$

を小数点以下 4 桁まで見ると、$\arcsin(1/5) = 0.201\ldots$ であることが分かる。

(注意) $\arcsin x$ は明らかに奇関数なので、本来、偶数次の項は計算する必要がない。一般化された二項係数を用いれば、積分と正項級数の交換により

$$
\begin{aligned}
\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int_0^x (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

と計算できる。

問題 6. 平面の方程式は $ax+by+cz+d=0$ と書けるので、3 つの平面の交わりは

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \end{pmatrix}
$$

を満たす (x,y,z) の集合である。ここで係数 a,b,c,d は a,b,c のいずれかがゼロでなければよい。このような係数を自由に選んだとき、左の行列は大抵の場合において正則である。すると、両辺に逆行列を掛けることで (x,y,z) はただ一つに定まる。

(付記) より厳密な表現を求めると、次のようになる。

> 行列式がゼロになるような $(a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'') \in \mathbb{R}^9$ の部分集合は
>
> $$ab'c'' - ab''c' - a'bc'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c = 0$$
>
> で定まるので、$\mathbb{R}^9$ における "体積" がゼロとなる。

作成者：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. (1) 問題の微分方程式は

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{1-x}\frac{dx}{dt}=1 \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}(\log|x|-\log|1-x|)=1 \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\log\left|\frac{x}{1-x}\right|=1$$

と変形できるから、ある定数 $c\in\mathbb{R}$ を用いて

$$\log\left|\frac{x}{1-x}\right|=t+c \ \Leftrightarrow\ x=\frac{e^{t+c}}{\pm 1+e^{t+c}}$$

と書ける。(符号は $t=0$ のときの x で決まる。)

(2) 問題の微分方程式は、微分の作用を分解することにより

$$\left(\frac{d}{dt}-\sqrt{-1}\omega\right)\left(\frac{d}{dt}+\sqrt{-1}\omega\right)x=0$$

と書ける。そこで、

$$y:=\left(\frac{d}{dt}+\sqrt{-1}\omega\right)x$$

とおくと

$$\left(\frac{d}{dt}-\sqrt{-1}\omega\right)y=0$$

だから、ある定数 A を用いて

$$y=Ae^{\sqrt{-1}\omega t}$$

と書ける。つまり

$$\left(\frac{d}{dt}+\sqrt{-1}\omega\right)x=Ae^{\sqrt{-1}\omega t}$$

が成り立っている。これも、前期で扱った 1 階の線形微分方程式

$$x'+P(t)x=Q(t)$$

の特別な場合である。その解は

$$x=e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C\right)$$

と書けるのであった。今の場合に適用すれば、一般解の表示として

$$x=A_1e^{\sqrt{-1}\omega t}+A_2e^{-\sqrt{-1}\omega t}=\tilde{A}_1\cos(\omega t)+\tilde{A}_2\sin(\omega t)$$

を得る。$\tilde{A}_1=A_1+A_2, \tilde{A}_2=\sqrt{-1}(A_1-A_2)$ は勝手な定数 (複素数) である。一般解として実数に値を取るものは、適当な実数 B_1, B_2 を用いて

$$x=B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)$$

と書けることが分かる。

(付記) (1) はロジスティック方程式と呼ばれ、生物の個体数変化などについて簡単なモデルを与える。個体数 x が増えるにつれ、食糧が減るなどして変化率 $(1-x)$ は減る、というわけである。(2) は調和振動子とも呼ばれ、質点が距離に比例する力を受けて運動する様子などを記述する。ω は振動数に当たる。