

# インフレーション宇宙の 初期特異点について

吉田 大介 (多元)

D.Yoshida, J.Quintin	CQG 35 (2018) 15, 155019	(arXiv:1803.07085)
(K. Nomura, D.Yoshida	JCAP 07 (2021) 047	(arXiv:2105.05642) )
K. Nishii, D.Yoshida	JHEP 10 (2021) 025	(arXiv:2105.12339)

# 研究の動機

## ■ 時空特異点：

典型的には低エネルギー有効理論としての重力理論の破綻を表す。

→ 現象論的な宇宙論モデルがどこまで有効かを教えてくれる。

もし、ある適当なモデルで宇宙の全歴史が記述できるのなら、宇宙には特異点はないはず。

- どのような宇宙に特異点がある/ないのか、  
特異点が生じないような仕組みは考えられるのか、  
特異点の無い宇宙の一般的性質は何か、

・・・などを明らかにしたい。

# 今日の話の概要

- インフレーション宇宙はマイナーなタイプの特異点を持つ場合がある。

これは、インフレーションのエネルギースケールが有限でも生じる。

D.Yoshida, J.Quintin    CQG 35 (2018) 15, 155019 (arXiv:1803.07085)

- この特異点が実際に高エネルギー物理の効果を励起するかどうかを調べた。

K. Nishii, D.Yoshida    JHEP 10 (2021) 025 (arXiv:2105.12339)

# Contents

1. インフレーション宇宙の特異点
2. 特異点の影響

# Contents

1. インフレーション宇宙の特異点

2. 特異点の影響

# 時空の特異点とは

## ■ 定義:

時空が過去向きに特異点を持つとは、

- 「有限のaffine lengthを持つ past inextendible geodesic」 (past incomplete geodesic) が存在する。
- その incomplete geodesic に沿って以上時空を滑らかに拡張できない。

## ■ 例: ビッグバン特異点 (減速膨張宇宙の初期特異点)

flat FLRW universe with dust or radiation

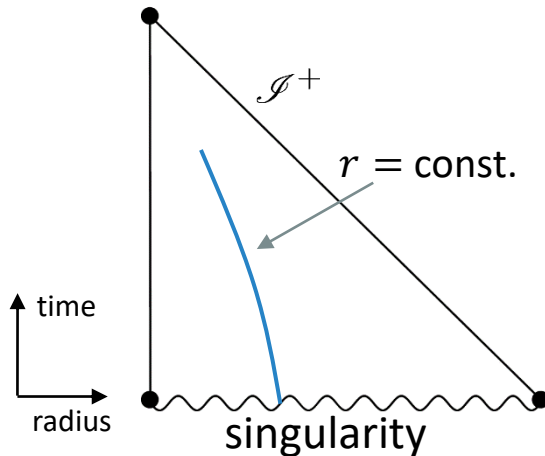
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

$$a \propto t^{2/3}(\text{dust}), t^{1/2}(\text{radiation})$$

- $t = 0$  は有限の固有時で到達できる。

- リッチスカラーが発散するため、  
時空は  $t = 0$  を超えて拡張できない。

(scalar curvature singularity)



$$R \propto \frac{1}{t^2}$$

# 特異点定理からの示唆

- 特異点定理: 適当な仮定の下、特異点の存在を示した定理。

Penrose (1965)

- ・ 時空の大域的構造 : globally hyperbolic with non-compact Cauchy surface
- ・ 曲率に対する条件 : null energy condition (～ヌル測地線に対して重力が引力的に働く)
- ・ 初期条件 : trapped surfaceの存在

→ **特異点が存在**

Penrose (1965),

Hawking (1967), Hawking, Penrose (1970)

**null energy conditionを仮定**

**strong energy conditionを仮定**  
(～ 減速膨張宇宙)

- インフレーション宇宙

- ・ strong energy conditionは破れている。
- ・ インフラトンによるモデル: null energy conditionは満たされる。
- ・ ハッブルスケールより半径の大きい球面が(past) trapped surfaceとなる。



globally hyperbolicでない、もしくはコンパクトなコーシー面を持つなら、特異点は無いかもしれない。

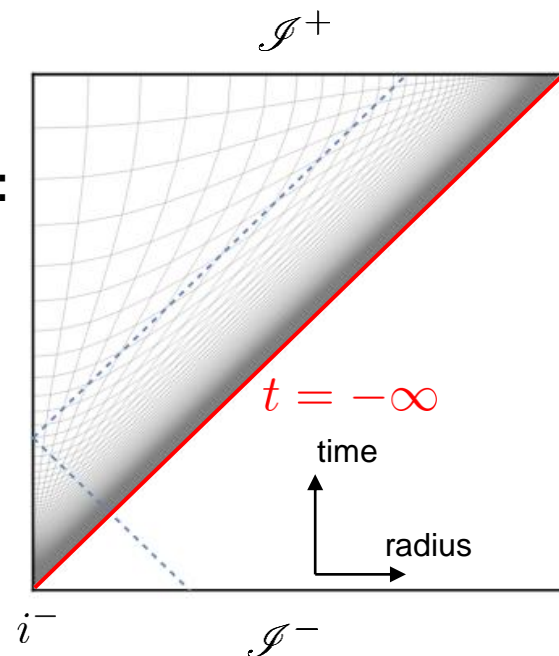
# 例：平坦なde Sitter時空

- 加速膨張宇宙の例として平坦なde Sitter時空を考えよう：

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\bar{H}t}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))$$

- Comoving geodesics ( $r, \theta, \phi = \text{const.}$ ) は past complete. 一定の膨張率 $\bar{H}$ で加速膨張している。
- ヌル測地線は有限のaffine parameter で  $t \rightarrow -\infty$  に到達。

$$\lambda(t) = \int^t a(t)dt = \frac{1}{\bar{H}}e^{\bar{H}t} \rightarrow 0 (t \rightarrow -\infty)$$



- 同様の性質は加速膨張宇宙一般になりつつ。

Borde, Guth, Vilenkinの定理：

**有限の膨張率を感じている観測者によって張られる時空領域は incomplete geodesicを持つ。**

Borde, Guth, Vilenkin (2003)

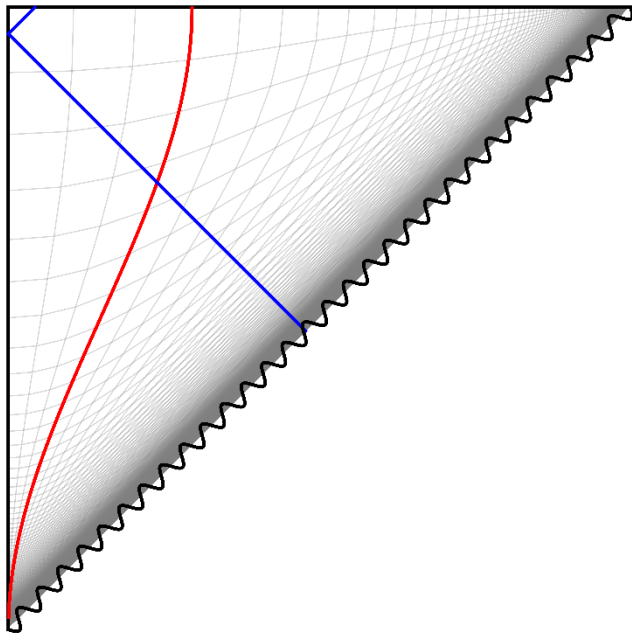
- ドジッター時空の場合、incompleteness は特異点を意味していない。

$t \rightarrow -\infty$  は時空の終わりではなく、単純に平坦座標の境界。  
時空はその先に拡張できる。



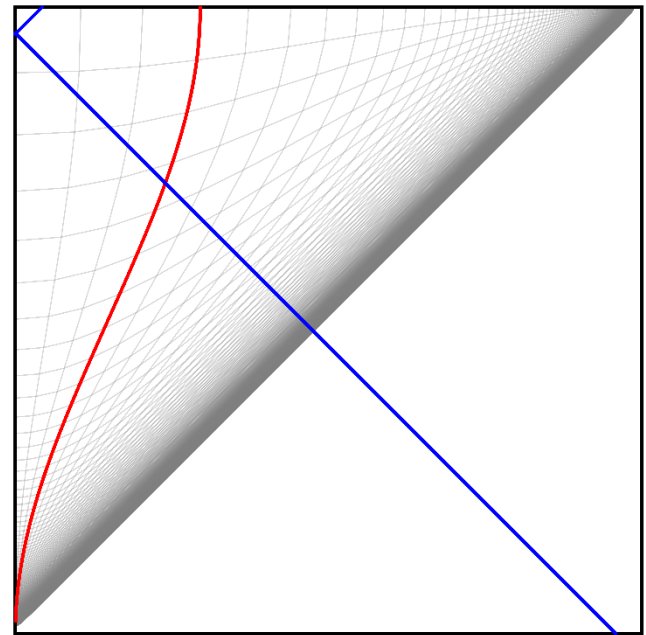
# 問題設定

より一般の加速膨張宇宙について、Borde, Guth, Vilenkinの定理の予言する時空の境界は特異点なのか、拡張可能な境界なのかを明らかにしたい。



singularity

or

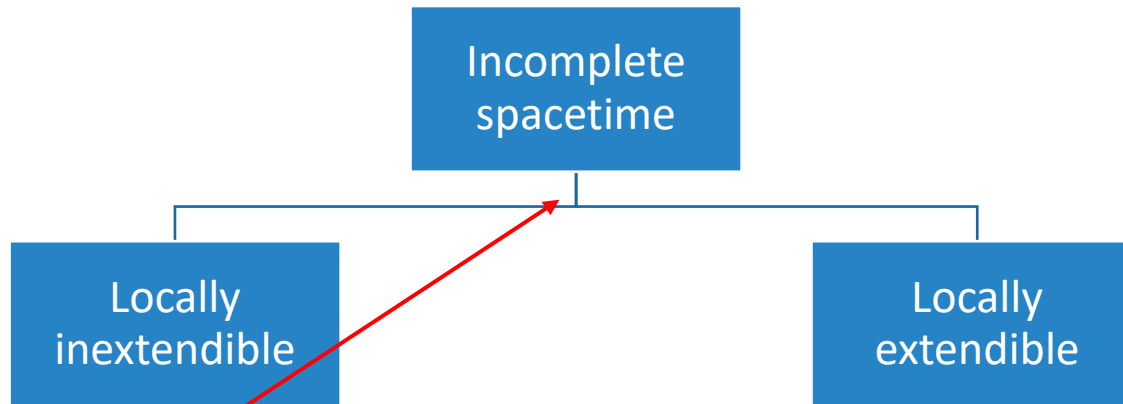


regular boundary

# 境界の拡張可能性

## ■ Classification of boundary

Ellis, Schmidt (1977)



Clarke (1973)

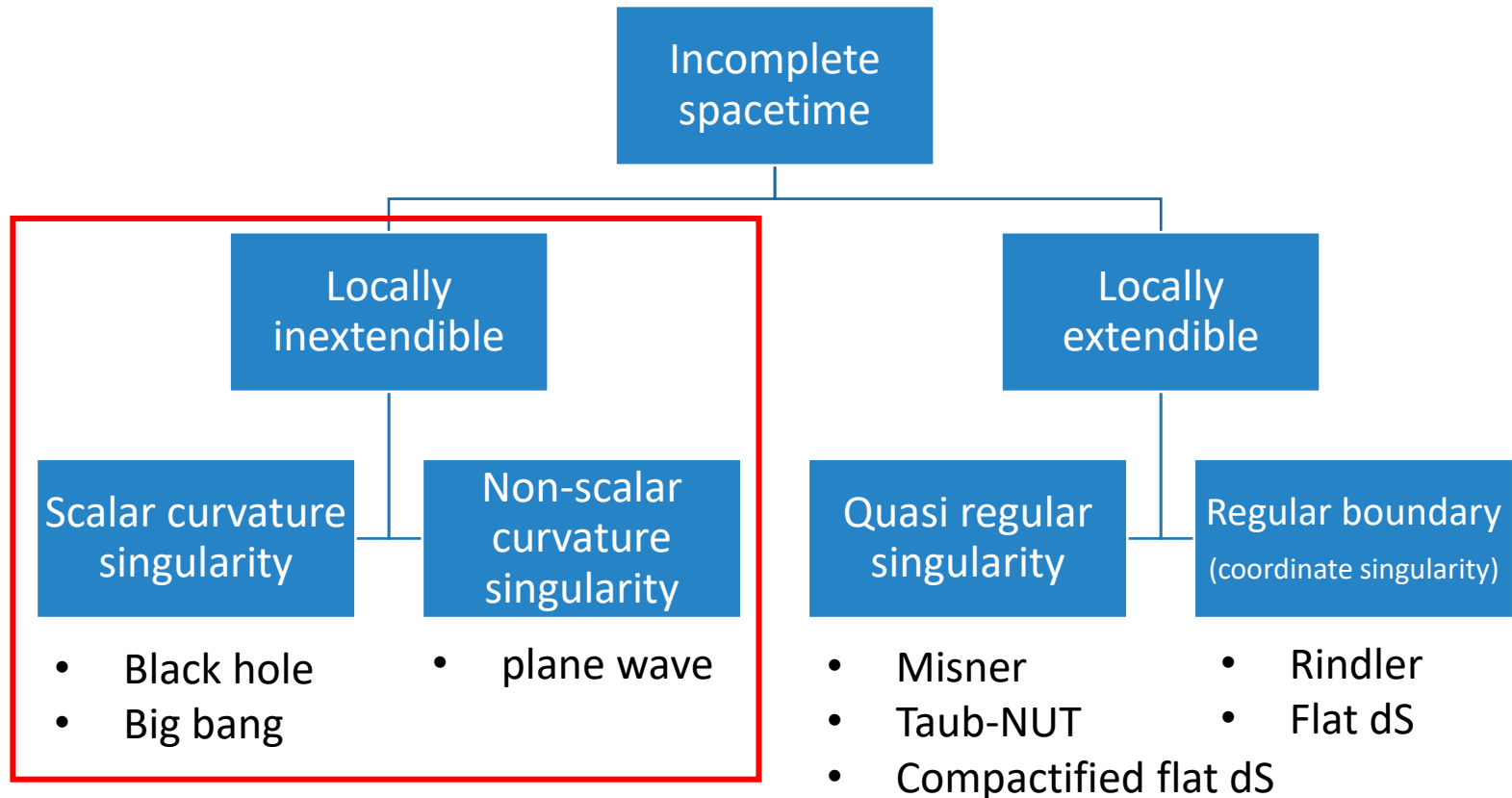
A boundary is locally  $C^2$  extendible if and only if every components of Riemann tensor measured by **parallelly propagated basis** along incomplete curve is finite.

Basis  $e^I$  that are parallel transportation along incomplete curve:  $k^\mu \nabla_\mu e^I = 0$   
(  $k^\mu$  :tangent vector of incomplete curve)

# 境界の拡張可能性

## ■ Classification of boundary

Ellis, Schmidt (1977)



**parallelly propagated (p.p.)  
curvature singularity**

( D.Yoshida, T.Numasawa (2019) )

# Parallely propagated tetrad

- quasi de Sitter Universe at the infinite past:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

$$a \propto e^{\bar{H}t} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

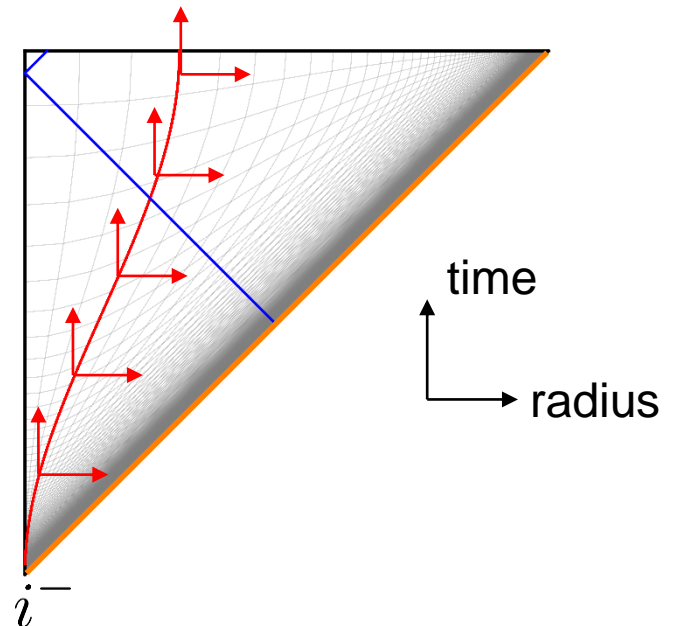
Let us focus on a null geodesic  $\eta + r = \text{const.}$  with tangent vector  $k^\mu$ .

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} : \text{conformal time}$$

- The simplest basis

$$e^0 = dt, \quad e^1 = adr, \quad e^2 = ar d\theta, \quad e^3 = ar \sin \theta d\phi$$

are well-defined along co-moving observers





# Parallelly propagated tetrad

- quasi de Sitter Universe at the infinite past:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

$$a \propto e^{\bar{H}t} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

Let us focus on a null geodesic  $\eta + r = \text{const.}$  with tangent vector  $k^\mu$ .

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} : \text{conformal time}$$

- The simplest basis

$$e^0 = dt, \quad e^1 = adr, \quad e^2 = ar d\theta, \quad e^3 = ar \sin \theta d\phi$$

are well-defined along co-moving observers  
but **ill defined along null geodesics.**

$$\text{For example: } k^\mu \nabla_\mu e^0 = H dr \neq 0$$

- new basis

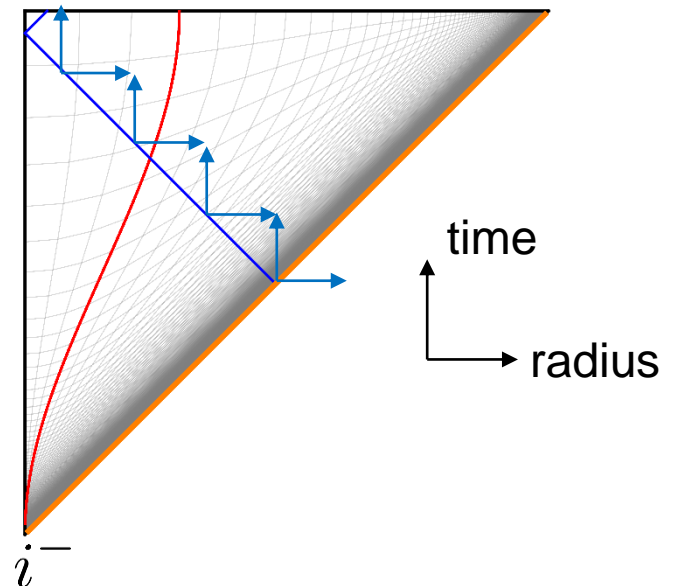
↙ Infinite Lorentz transformations

$$\hat{e}^0 = \cosh \log a e^0 + \sinh \log a e^1,$$

$$\hat{e}^1 = \sinh \log a e^0 + \cosh \log a e^1,$$

**are well-defined along null geodesics.**

$$k^\mu \nabla_\mu \hat{e}^I = 0$$



# 曲率テンソルの表式

D.Yoshida, J.Quintin (2018)

- 曲率から作られるスカラー量 :

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2), R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 3\dot{H}^2 + 9(\dot{H} + 2H^2)^2, C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = 0.$$

$$a \propto e^{\bar{H}t} \quad (t \rightarrow -\infty) \text{ の仮定のもとで常に有限 } (H \rightarrow \bar{H}, \dot{H} \rightarrow 0)$$

- ill-definedな基底での表式 (よく見る表式) : 成分は有限

$$R_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu = -3(\dot{H} + H^2)e^0 \otimes e^0 + (\dot{H} + 3H^2)\delta_{ij}\hat{e}^i \otimes \hat{e}^j$$

- parallelly propagated basisにおける表式:

$$R_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu = -2 \frac{\dot{H}}{a^2} \left( (1 + a^2)\hat{e}^0 - (1 - a^2)\hat{e}^1 \right)^2 + (\dot{H} + 3H^2)\eta_{mn}\hat{e}^m \otimes \hat{e}^n$$

Undetermined !

Quasi de Sitter universe has non-scalar curvature singularity if and only if

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{H}}{a^2} = \pm\infty$$

この特異点はインフレーションのエネルギースケールが有限 ( $H$ が有限) でも生じる

# Example 1

- 加速膨張宇宙に近づくが拡張不可能な時空：

$$a(t) = \frac{e^{H_\Lambda t}}{1 + e^{H_\Lambda t}} \simeq \begin{cases} 1 & (t \rightarrow \infty) \\ e^{H_\Lambda t} & (t \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

- ハッブルパラメータやその微分の表式：

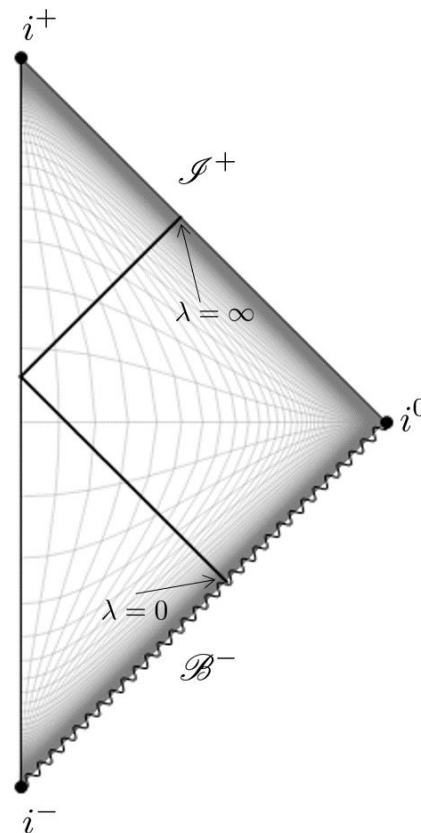
$$H(t) = \frac{H_\Lambda}{1 + e^{H_\Lambda t}}, \quad \dot{H}(t) = -H_\Lambda^2 \frac{e^{H_\Lambda t}}{(1 + e^{H_\Lambda t})^2} < 0$$

(consistent with the null energy condition)

- $\dot{H}/a^2$ は発散する:

$$\frac{\dot{H}}{a^2} = -H_\Lambda^2 e^{-H_\Lambda t} \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow -\infty)$$

→ non-scalar curvature singularityがある！





# Example 2

## ■ 特異点の無い宇宙の例

$$a(t) = \frac{2}{e^{H_\Lambda t} + e^{-H_\Lambda t}} = \frac{1}{\cosh H_\Lambda t} \simeq \begin{cases} e^{-H_\Lambda t} & (t \rightarrow \infty) \\ e^{H_\Lambda t} & (t \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

## ■ ハッブルパラメータやその微分の表式：

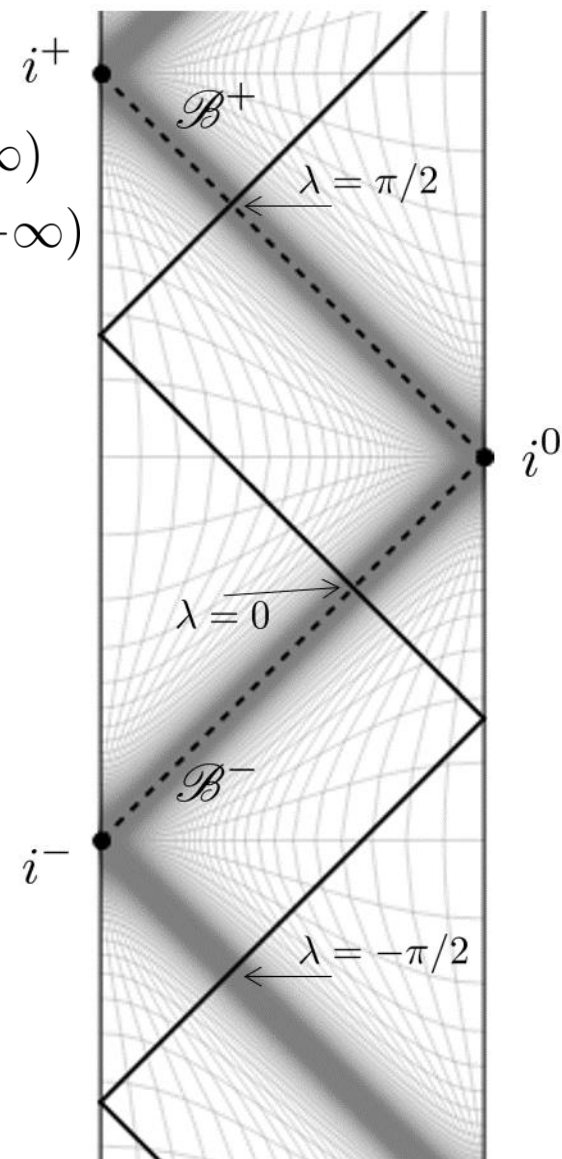
$$H(t) = -H_\Lambda \tanh H_\Lambda t, \quad \dot{H}(t) = -\frac{H_\Lambda^2}{\cosh^2 H_\Lambda t} < 0$$

(consistent with the null energy condition)

## ■ $\dot{H}/a^2$ は有限:

$$\frac{\dot{H}}{a^2} = -H_\Lambda^2 = \text{finite}$$

➡ 境界はドジッター時空のように**拡張可能!**



# Example 3: Starobinsky's inflation

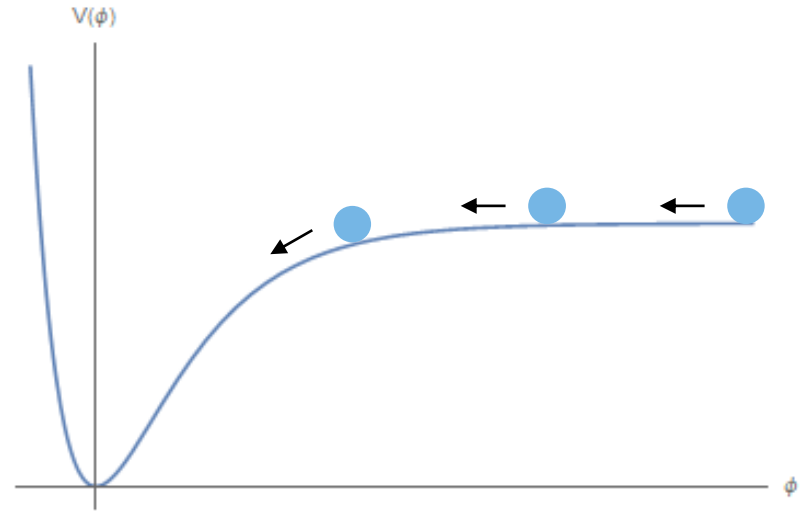
- Starobinsky model: slow roll inflation with the potential

$$V(\phi) = \frac{3}{4} m^2 M_{pl}^2 \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}}} \right)^2$$

- $t \rightarrow -\infty$  で  $\phi \rightarrow \infty$  となるような解 (ずっとスローロールしている解) を考える:

$$V \rightarrow \text{const.}$$

$$V' \rightarrow (\text{const.}) \times e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}}}$$



- $\dot{H}/a^2$  はインフレーションポテンシャルの言葉で書き直せ、評価できる:

field equations under the slow-roll approximations:  $3H^2 = \frac{V(\phi)}{M_{pl}^2}$ ,  $\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H}$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{H}}{a^2} = \lim_{\phi \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{6a_e^2} \frac{V'^2}{V} \exp \left( \frac{2}{M_{pl}^2} \int_{\phi_e}^{\phi} d\phi \frac{V}{V'} \right) \right]$$

$$\sim e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}}} \times \frac{3}{4} e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}}} \rightarrow \infty$$



Starobinsky's inflation has a non-scalar curvature singularity!

# Generalizations

to FLRW with a spatial curvature and Bianchi type I universe. K.Nomura, D.Yoshida (2021)

■ Results for Bianchi type I universe:  $ds^2 = -dt^2 + a_x^2(t)dx^2 + a_y^2(t)dy^2 + a_z^2(t)dz^2$

- To avoid divergence of scalar polynomials:  $a_x \rightarrow 0 (t \rightarrow -\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \dot{H}_j + H_j^2 \right) = \text{finite}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} H_i H_j = \text{finite},$$

- To avoid divergence of Riemann tensor with respect to parallelly propagated basis:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{a_x^2} \left( \dot{H}_y + H_y(H_y - H_x) \right) = \text{finite}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{a_x^2} \left( \dot{H}_z + H_z(H_z - H_x) \right) = \text{finite}$$

■ Example:

Bianchi type I universe with exponential scale factors:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + e^{2H_x t} dx^2 + e^{2H_y t} dy^2 + e^{2H_z t} dz^2$$
$$H_x > 0, H_y \neq 0, H_x \neq H_y$$

( which is a solution of limiting curvature theory aiming to resolve anisotropic singularity. )

Y.Sakakihara, D.Yoshida, K.Takahashi, J.Quintin (2020)

Since  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{a_x^2} \left( \dot{H}_y + H_y(H_y - H_x) \right) = \pm\infty$ ,

**this spacetime has a singularity that can not be found from curvature invariants.**

# Contents

1. インフレーション宇宙の特異点

**2. 特異点の影響**

# non-scalar curvature singularityは危険なのか？

- インフレーション宇宙の特異点は**有限のハッブルパラメータ**で起きる

$$H = \text{finite}$$

インフレーションを引き起こしている物質のエネルギー密度は有限

→ この特異点は低エネルギー有効理論の破綻を意味しているのか？

- non-scalar curvature singularity の典型例： **plane wave spacetime.**

plane wave 時空の特異点の弦理論への影響は古くから調べられている。

Horowitz, Steif (1990), de Vega, Sanchez (1992)

Plane wave上の弦理論の解析を応用して、  
インフレーション宇宙の特異点の影響を調べよう。

# non-scalar curvature singularityの強さ

- By using the affine parameter  $u$  as a time coordinate,

$$u(t) = \int^t a(t) dt \quad \text{with} \quad u = 0 \leftrightarrow t = -\infty : \text{position of the singularity}$$

The Ricci tensor can be expressed as,

$$R_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -2 \frac{\dot{H}}{a^2} du^2 + (3H^2 + \dot{H}) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- The strength of non-scalar curvature singularity is defined by the strength of divergence of  $R_{uu}$  at  $u = 0$ .

Tipler(1977), Krolak(1983)

We will use  $A(u)$  instead of  $R_{uu}$ :  $A(u) := -\frac{1}{2}R_{uu} = \frac{\dot{H}}{a^2}$

- For example, a quasi de Sitter universe with a scale factor

$$a(t) = e^{\bar{H}t} - \frac{\kappa \bar{H}^{\beta-2}}{(2-\beta)^2} e^{(3-\beta)\bar{H}t} + \dots \quad (t \rightarrow -\infty) \quad (0 < \beta < 2)$$

corresponds to the power law divergence  $A(u) = -\frac{\kappa}{u^\beta} + \dots$

# インフレーション宇宙のplane wave 極限

- To pick up the effect of singularity, we take **Penrose limit** of FLRW spacetime.

**Penrose limit: spreading an infinitesimal neighborhood of a null geodesic** Penrose (1976)  
(c.f. Lecture note by M. Blau)

- step 1: write FLRW metric in null coordinates:

$$ds^2 = -2dudv + a^2(u)dv^2 + a^2(u)(\eta(u) - v)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$v$  : constant along null geodesics,  $v = \eta + r$  ( $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$ : conformal time)

$u$  : affine parameter  $u(t) = \int^t a(t) dt$

- step 2: rescale the coordinates and metric. Then take the limit  $\epsilon \rightarrow 0$  (Penrose limit).

$$v = \epsilon^2 \hat{v}, \theta = \theta_0 + \epsilon x, \phi = \phi_0 + \frac{1}{\sin \theta_0} \epsilon y, \quad g_{\mu\nu} = \epsilon^2 g_{\mu\nu}^P$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} g_{\mu\nu}^P dx^\mu dx^\nu = -2dud\hat{v} + a^2(u)\eta^2(u)(dx^2 + dy^2)$$

plane wave spacetime in Rosen coordinates

- step 3: take coordinates transformation  $x = \frac{1}{a\eta} X, y = \frac{1}{a\eta} Y, \hat{v} = V - \frac{1}{2} \frac{(a\eta)'}{a\eta} (X^2 + Y^2)$

$$g_{\mu\nu}^P dx^\mu dx^\nu = -2dudV + A(u)(X^2 + Y^2)du^2 + dX^2 + dY^2$$

plane wave spacetime in Brinkmann coordinates

- Penrose limit preserve u components of curvature tensor:  $R_{\mu\nu}^P dx^\mu dx^\nu = -2A(u)du^2$

# Plane Wave 時空上の弦理論

- A String on a plane wave spacetime can be quantized exactly.

c.f. Horowitz, Steif (1990), de Vega, Sanchez (1992)

- Worksheet action: Polyakov action in 4 dimensional spacetime

$$S[h^{ab}, X^\mu] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} g_{\mu\nu}^P(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

$$\alpha' := (\text{string length})^2 \quad g_{\mu\nu}^P dx^\mu dx^\nu = -2du dV + A(u)(X^2 + Y^2) du^2 + dX^2 + dY^2$$

- Dynamical variables:

$h_{ab}(\tau, \sigma)$ : metric on two dimensional worldsheet

$X^\mu(\tau, \sigma) = \{u(\tau, \sigma), V(\tau, \sigma), X(\tau, \sigma), Y(\tau, \sigma)\}$

: 4 scalar fields on two dimensional worldsheet

- Equations of motion reduce to the following **linear wave equations**:

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2 + \alpha'^2 p^2 A(\alpha' p \tau)) X^i(\tau, \sigma) = 0$$

In conformal & light cone gauge:  $h_{ab} \propto \eta_{ab}$  and  $u = \alpha' p \tau$

Here,  $X^i(\tau, \sigma) = X(\tau, \sigma)$  and  $Y(\tau, \sigma)$



# Mode expansion

- Since wave equations are linear, we can use mode expansion:

$$X^i(\tau, \sigma) = X_0^i(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^i(\tau)e^{in\sigma} + X_n^{i*}(\tau)e^{-in\sigma})$$

Each mode  $X_n^i$  is described by a Schrodinger equation:

$$-\frac{d^2 X_n^i}{d\tau^2} + \mathcal{V}(\tau)X_n^i = E_n X_n^i \quad \mathcal{V}(\tau) = \alpha'^2 p^2 A(\alpha' p\tau), \quad E_n = n^2$$

For given a mode function  $f(\tau)$ , the general solution can be written as

$$X_n^i(\tau) = i \frac{\sqrt{\alpha'}}{n} (\alpha_n^i f(\tau) - (\tilde{\alpha}_n^i)^\dagger f^*(\tau))$$

- This system can be quantized as is in the flat space.

$(\alpha_n^i)^\dagger, (\tilde{\alpha}_n^i)^\dagger$  and  $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$  are understood as creation and annihilation operators:

$$[\alpha_n^i, (\alpha_m^j)^\dagger] = n\delta_{nm}\delta_{ij} \quad \text{and so on}$$

# 特異点の弦への影響

Nishii, Yoshida (2021)

c.f. Horowitz, Steif (1990),  
de Vega, Sanchez (1992)

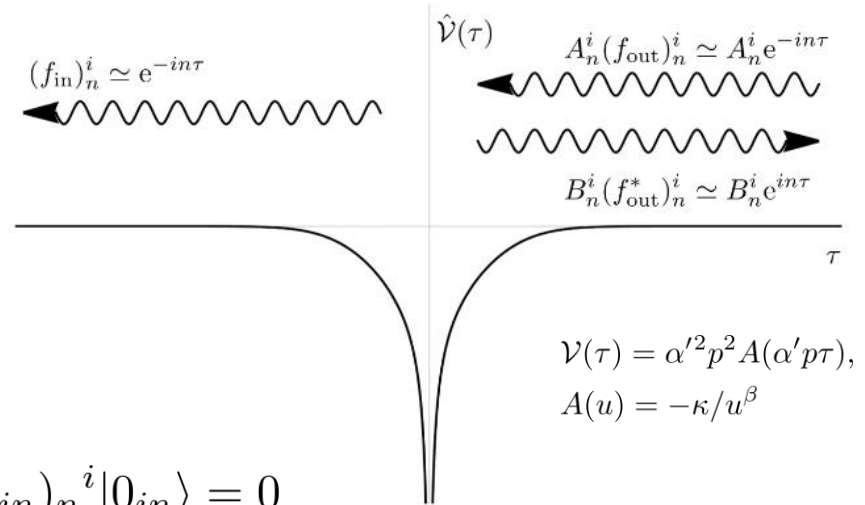
- To see how singularity at  $u = 0$  affects to the dynamics of string, let us extend spacetime to  $u < 0$  by

$$g_{\mu\nu}^P dx^\mu dx^\nu = -2dudV + A(u)(X^2 + Y^2)du^2 + dX^2 + dY^2$$

$$\longrightarrow g_{\mu\nu}^P dx^\mu dx^\nu = -2dudV + A(|u|)(X^2 + Y^2)du^2 + dX^2 + dY^2$$

- In general, natural mode function at  $\tau \rightarrow -\infty$  is different from that at  $\tau \rightarrow +\infty$ :

$$f_{in}(\tau) = A_n^i f_{out}(\tau) + B_n^i f_{out}^*(\tau)$$



It relates creation-annihilation operators:

$$(\alpha_{out})_n^i = A_n^i (\alpha_{in})_n^i - B_n^{i*} (\tilde{\alpha}_{in})_n^{i\dagger}$$

- consider the vacuum defined at  $\tau \rightarrow -\infty$ :  $(\alpha_{in})_n^i |0_{in}\rangle = 0$

(No oscillation modes at  $\tau \rightarrow -\infty$ )

$$\langle 0_{in} | M_{out}^2 | 0_{in} \rangle = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 n |B_n^i|^2 + (\text{zero point energy})$$

oscillation modes are excited by singularity at  $u = 0$  !

$$M_{out}^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 ((\alpha_{out})_n^{i\dagger} (\alpha_{out})_n^i + (\tilde{\alpha}_{out})_n^{i\dagger} (\tilde{\alpha}_{out})_n^i) + \dots$$

# Results:

- For  $A(u) = -\kappa/u^\beta$  Bogoliubov coefficient can be evaluated as

$$B_n^i \sim \begin{cases} n^{\beta-2} & (\beta < 1) \\ \infty & (1 \leq \beta < 2) \end{cases}$$

Then the mass squared are given by

$$\langle 0_{in} | M_{out}^2 | 0_{in} \rangle \sim \begin{cases} \text{finite} & (\beta < 1) \\ \text{infinite} & (1 \leq \beta < 2) \end{cases}$$

String propagation is well-defined  
String propagation is ill-defined  
(excites infinitely heavy modes)

- Initial singularity of quasi de Sitter space can be divided into two classes:

1. Divergence of  $A(u) = \frac{\dot{H}}{a^2}$  at  $u = 0$  is **weaker** than  $1/u$ : string propagation is **well-defined**

- $a(t) = e^{\bar{H}t} - \frac{\kappa \bar{H}^{\beta-2}}{(2-\beta)^2} e^{(3-\beta)\bar{H}t} + \dots$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) with  $0 < \beta < 1$ .

- hill-top inflation with large  $\eta$   $V(\phi) = 3M_{pl}^2 \bar{H}^2 \left( 1 - \frac{|\bar{\eta}|}{2} \frac{\phi^2}{M_{pl}^2} + \dots \right)$  with  $\frac{7}{12} < |\bar{\eta}| \leq \frac{4}{3}$

2. Divergence of  $A(u) = \frac{\dot{H}}{a^2}$  at  $u = 0$  is **stronger** than  $1/u$ : string propagation is **ill-defined**

- $a(t) = e^{\bar{H}t} - \frac{\kappa \bar{H}^{\beta-2}}{(2-\beta)^2} e^{(3-\beta)\bar{H}t} + \dots$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) with  $1 \leq \beta < 2$ .

- Starobinsky inflation

# Summary

# Summary

- インフレーション宇宙には、  
曲率スカラーでは測れない曲率特異点が生じる場合がある。

D.Yoshida, J.Quintin (2018)

特異点があるかどうかの判別条件を明らかにした：

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{H}}{a^2} = \pm\infty \quad \longleftrightarrow \quad \text{non-scalar curvature singularity}$$

- インフレーション宇宙の特異点の弦の伝播への影響を調べた。

K. Nishii, D.Yoshida (2021)

$$\frac{\dot{H}}{a^2} \text{ の発散が } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{u} \text{ より弱い：弦は特異点を通過できる。} \\ \frac{1}{u} \text{ より強い：弦は特異点を通過できない。} \end{array} \right.$$