

# 期末レポート試験略解・講評 (2020年7月28日)

作成日: July 27, 2020 Updated: July 27, 2020

## 期末レポート試験講評 配点・解答案内

**問題1** (35点) (1)~(3) 各4点, (4) 3点×2 (5) 6点 (6) (a) 3点 (b) 4点 (c) 2点×2. 詳しくは H007 のプリント参照.  $\omega = e^{i\pi/3}$ ,  $\omega^3 = -1$ ,  $1 - \omega + \omega^2 = 0$ ,  $\bar{\omega} = -\omega^2$  などに注意.  $n \in \mathbb{N}$  として (1)  $z = (n+1/2)\pi$  (2)  $z = i(2n+1/3)\pi$  (3)  $z = e^{-(2n+1/3)\pi}$  (4) (a)  $R = 1/7$  (b)  $R = e \left( (1 - 1/n)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1/\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = 1/\left\{ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/e \right)$  (5)  $f(z) = z^2 + z + ic$  ( $c$  は実定数) (6) (a)  $A = 1/3, B = -1/(3\bar{\omega}), C = -1/(3\omega)$  (b)  $I_7 = 6\pi i$  (c)  $I_5 = 2\pi i, I_3 = 0$

**問題2** (24点) (1) (a) 6点 (b) 4点 (4) 14点. (H008 のプリント参照)

$$(1) (a) e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, e_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1) \quad (b) f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}e_0(x) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}e_2(x)$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix} \text{ とおく. } |\lambda E - A| = (\lambda - 16)(\lambda + 4) = 0 \text{ より, } A \text{ の固有値}$$

は  $\lambda = 16, -4$  である.  $\lambda = 16$  に属する固有ベクトルは  $\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -4$  に

属する固有ベクトルは  $\vec{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$  ととれる (正規化を行った). このとき,  $P :=$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} \text{ は角度 } \pi/3 \text{ の回転行列である.}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とおくと, 曲線 } C \text{ の式は, } x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$(x, y)PP^{-1}APP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (X, Y) \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 16X^2 - 4Y^2 = 8 \text{ とあらわされる.}$$

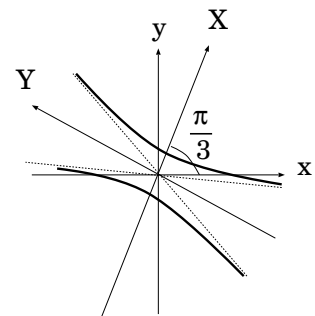
よって  $(X, Y)$  座標でみると, もとの曲線  $C$  は  
双曲線  $2X^2 - (1/2)Y^2 = 1$  として記述される.

(漸近線の式は,  $Y = \pm 2X$  である.)

したがって曲線  $C$  の概形は右図のようになる.

(なお, 漸近線の式は,  $y = -\frac{5\sqrt{3} \pm 8}{11}x$  である.

方向ベクトルを回転行列で変換すれば求まる.)



**問題3** (25点 = 5点×5) 詳しい解答は H009 のプリント参照 ((2) は全員に5点を与える.)

**問題4** (16点) (1) 6点 (2) 6点 (3) 4点

(1) H010 のプリント参照 (2)  $(z + 1/z)^n$  の二項展開と (1) の結果より,  $K_n = (\pi/2^{n-1})_n C_{1/2}$

( $n$  が偶数のとき),  $K_n = 0$  ( $n$  が奇数のとき) (3)  $\left| \int_c (z-1)^2 dz \right| < \int_0^{2\pi} |(e^{i\theta} - 1)^2 i e^{i\theta}| d\theta =$

$$\int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - 1|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |\cos \theta + i \sin \theta - 1|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} ((\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos \theta) d\theta = 4\pi. \text{ (最初の不等号の等号成立は起こり得ない)}$$

[講評] 平均点は76点でした。90点以上が二人(94,93点)でした。

後半に取り扱った内容が濃ゆくて、試験準備はなかなか大変だったと思いますが今回も全体的には悪くなかったと思います。基本を押さえてしっかり復習した形跡が見られました。特に問題2・3の正解率が非常に高かったです。ただ、問題1の(-1)の3乗根を1の3乗根と読み間違えている答案が予想以上に多かったです。複素線積分は宿題の出来が非常に悪く、実積分への応用はやめて基本問題だけにしたつもりでしたが、芳しくありませんでした。問題3(2)は出題ミスで証明のできない命題です。申し訳ございません.. 全員に5点を与えています。(例えば $a_n = (-1)^n$ で反例が作れます。)

前も言いましたが、試験の目的というのは学生さんを品定めをすることではありません。この機会に(特に解けなかった問題を)しっかり見直してください。そのための課題を以下に出しました。

半年間どうもありがとうございました。有意義な夏休みをお過ごしください。

### 問題1. (課題：提出期限はどちらも8月3日(月)24時です)

- (1) (先週分の課題とします) 期末レポート試験で解けなかった問題を(好きなだけ)解け。
- (2) (今週の課題) 次の(a),(b) **いずれか**を解け：
  - (a) これまでの数学演習の授業で出題した問題の中でもう一度解きたい問題・解くべきと思う問題を好きなだけ解け。
  - (b) この演習授業についてのご意見・感想などを述べよ。(特に今後の参考になるような建設的・批判的ご意見を歓迎します。)