期末レポート試験 (2020 年 7 月 21 日)

Version : 1.0　　実施日 : July 21, 2020

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$: 自然数全体の集合,
$\mathbb{Z}$: 整数全体の集合,
$\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合,
$\mathbb{R}$: 実数全体の集合,
$\mathbb{C}$: 複素数全体の集合,
とし解答に自由に用いてよい. 答案に問題番号が明記されていればどの問題から解いても構わない. (解けそうな問題から先に解くことを勧めます.)

問題 1. 複素数に関する以下の問いに答えよ. -1 の 3 乗根のうち虚部が正である複素数を ω とする. 実数に対する自然対数には「log」ではなく「ln」の記号を用いること.

(1) $e^{2iz} = \omega^2 - \omega$ を満たす複素数 z をすべて求め, $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形に表せ.

(2) 複素数 $\log \omega$ の取りうる値をすべて求め, $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形に表せ.

(3) 複素数 ω^i の取りうる値をすべて求め, $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形に表せ.

(4) 次のべき級数の収束半径 R を求めよ: (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

(5) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とする. 複素平面全体で正則な関数 $f(z)$ の実部 u が, $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ のように与えられているとき, $f(z)$ を (z の関数として) 具体的に決定せよ.

(6) 次の複素線積分の値を, コーシーの積分公式・コーシーの積分定理を用いて求めよう :

$$I_R = \int_{C_R} \frac{3z^2}{z^3 + 1} dz, \quad C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5i| = R,\ R > 0\}.$$

ただし積分路の向きは反時計まわりとする.

(a) 以下の部分分数展開を考える. 展開係数 A, B, C を求めよ. ($\omega, \overline{\omega}$ を用いて答えてよい.)

$$\frac{1}{z^3 + 1} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z - \omega} + \frac{C}{z - \overline{\omega}}.$$

(b) $R = 7$ のとき, 積分値 I_7 を求めよ. (コーシーの積分公式・コーシーの積分定理を用いる場合はどこで用いたか一言添えること. 最後の答えに $\omega, \overline{\omega}$ を用いてはならない.)

(c) $R = 5, 3$ のときの積分値 I_5, I_3 はそれぞれいくらか? (答えのみでよい. $\omega, \overline{\omega}$ を用いて答えてははならない.)

(裏面に続く)

問題 2. 線形代数に関する以下の問いに答えよ.

(1) 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $P_2(\mathbb{R})$ を考える.

(a) 単項式の列 ($P_2(\mathbb{R})$ の基底) $1, x, x^2$ にシュミットの直交化法を適用し, 内積 $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ に関する $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 $e_0(x), e_1(x), e_2(x)$ を 1 つ求めよ.

(b) $f(x) = x^2$ を (a) で求めた正規直交基底 $e_0(x), e_1(x), e_2(x)$ の線形結合で表せ.

(2) 2 次曲線 $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 8\right\}$ の概形を描け. (x 軸, y 軸と交わるかどうかが分かるように描くこと (交点の座標まで求める必要はない). 2 次曲線の名称 (「楕円」か「双曲線」か「放物線」か) も添えること.)

問題 3. 実数列・実関数に関する以下の問いに答えよ. 以下必要であれば, アルキメデスの原理あるいはガウスの記号を用いてよい.

(1) 収束する数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることを示せ.

(2) 絶対収束する数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることを示せ.

(3) $a_n := n$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列でないことを示せ.

(4) $f_n(x) := \dfrac{x^{20}}{x^7 + n^{21}}$ で定義される関数列 $\{f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $I = [0, 1]$ 上 ($f(x) \equiv 0$ に) 一様収束することを示せ.

(5) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ. (必要であれば M 判定法を用いてよい.)

問題 4. 複素線積分に関する以下の問いに答えよ. 積分路 C はすべて単位円の円周とし積分路の向きは反時計まわりとする: $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(1) n を整数とする. 以下の線積分を計算せよ：$J_n = \displaystyle\int_C z^n dz$

(2) n を自然数とする. $z = e^{i\theta}$ のとき, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ であることを利用して以下の実積分を求めよ.

$$K_n = \int_0^{2\pi} \cos^n\theta \, d\theta$$

(3) $\left|\displaystyle\int_C (z-1)^2 dz\right| < 4\pi$ を示せ.

(問題はここまで)