中間レポート試験 (2020年6月16日)

Version : 1.0　　実施日 : June 16, 2020

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$：自然数全体の集合,
$\mathbb{Z}$：整数全体の集合,
$\mathbb{Q}$：有理数全体の集合,
$\mathbb{R}$：実数全体の集合,
$\mathbb{C}$：複素数全体の集合,
とし解答に自由に用いてよい. 答案に問題番号が明記されていればどの問題から解いても構わない. **(解けそうな問題から先に解くことを勧めます.)**

問題 1. 2次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $P_2(\mathbb{R}) := \{a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ を考える.

(1) $x^2,\ 2x+1,\ (x+1)^2$ は $P_2(\mathbb{R})$ の基底とならないことを示せ.

(2) $1,\ x-1,\ x^2-x$ は $P_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ.

(3) 次式で定義される $P_2(\mathbb{R})$ の線形変換 T の, 基底 $1, x-1, x^2-x$ に関する表現行列 A を求めよ: $T(f(x)) = f(x+1)$

問題 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について以下の問いに答えよ. (像, 原像などを求める解答は，方程式を用いた表現でも基底を用いた表現でも，どのような表現でもよいが，集合として正しい記号を用いること.)

(1) A の行列式の値を計算せよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の T_A による像 $\mathrm{Im}\ T_A$ を求めよ.

(3) 原点の原像 $\mathrm{Ker}\ T_A$ を求めよ.

(4) 平面 $\pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$ の T_A による像 $T_A(\pi)$ を求めよ.

問題 3. 1 の 3 乗根のうち, 複素平面で第 2 象限にあるものを ω と表す.

(1) $\omega^{20} + \omega^6 + \omega^{16}$ の値を以下の選択肢から一つ選べ. (答えのみでもよい)

(ア) 0　(イ) 1　(ウ) -1　(エ) ω　(オ) ω^2　(カ) それ以外の値

(2) $\alpha^4 + \alpha^2 + 1 = 0$ を満たす複素数 α をすべて求めよ. (解答に ω を用いてもよい.)

(3) $|z - \omega| = 2|z|$ を満たす複素数 z の軌跡は円になる. その円の半径 r と円の中心の座標 X を求めよ.

(4) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{z-\omega}{z-\omega^2}$ によって, z 平面上の単位円の外部 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ は w 平面にどのようにうつされるか. 変換後の領域 $f(D)$ を図示せよ.

(ω と w を区別して書くこと.)

(裏面に続く)

問題 4. 集合と写像について以下の問いに答えよ．ただし与えられた集合はどれも空集合ではないとする．

(1) $f : X \to Y$ を写像として, A, B は X の部分集合とする．このとき, 以下が成り立つことを証明せよ: $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

(2) X, Y, Z を集合として, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．また, $g \circ f : X \to Z$ を f と g の合成写像とする．このとき, $g \circ f$ が全射で g が単射ならば, f は全射であることを証明せよ．

(3) U, V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間として, $T : U \to V$ を線形写像とする．このとき, $\mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$ ならば T は単射であることを証明せよ．

問題 5. 実数列について, 以下の問いに答えよ．必要であればアルキメデスの原理を用いてよい．ガウスの記号も断りなく用いてよい．

(1) 次の数列の極限を求めよ：$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β はともに有限値) を満たすとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(6a_n + 16b_n) = 6\alpha + 16\beta$ が成り立つことを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．数列 $\{a_n\}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束するとき, 数列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a) \in \mathbb{R}$ に収束することを ε 論法で証明せよ．

問題 6. 実関数について, 以下の問いに答えよ．必要であればアルキメデスの原理を用いてよい．ガウスの記号も断りなく用いてよい．

(1) 次の関数の極限を求めよ： (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x + \log\dfrac{1-x}{1+x}}{2x - e^x + e^{-x}}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{5^x + 3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(2) 次の関数の導関数を求めよ：$f(x) = x^{2x}$ $(x > 0)$.

(3) 実関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^6}$ は $x = 1$ において連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法で示せ.
$(0 < x < 2$ としてよい.)

(問題はここまで)