

# Hyper-Kähler 幾何の数理と物理

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科  
浜中 真志<sup>1, 2</sup>

(2011 年 12 月 9 日受理)

## 概要

Hyper-Kähler 多様体とは, 性質の良い 3 つの複素構造が四元数的に備わった Riemann 多様体のことである. 素粒子論においては対称性の高い理論の moduli 空間として現れ, duality の立証や分配関数の計算などで重要な役割を果たしてきた. この記事では, 主に non-compact な Hyper-Kähler 多様体の性質を, 具体的計量の構成・解析により, 詳しく議論する. 数学的基礎や関連する話題についても少し触れる.

## 目次

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>246</b>
<b>2</b>	<b>Symplectic Geometry and Moment Map</b>	<b>246</b>
2.1	Symplectic Formalism . . . . .	246
2.2	Moment Map . . . . .	249
<b>3</b>	<b>Hyperkähler Quotient and ADHM/Nahm Construction</b>	<b>253</b>
3.1	Quotient Manifold . . . . .	253
3.2	Moduli Space and Hyperkähler Geometry . . . . .	254
<b>4</b>	<b>Metrics of Hyperkähler Manifolds</b>	<b>256</b>
4.1	$M : 4$ 次元の hyperkähler 多様体, $G = U(1) : \text{Circle Action}$ . . . . .	257
4.2	$M : 4$ 次元の hyperkähler 多様体, $G = SU(2)$ . . . . .	259
4.3	Nuts and Bolts . . . . .	262
4.4	Examples . . . . .	263
<b>5</b>	<b>Hyperkähler Quotient Construction of Moduli Spaces</b>	<b>266</b>
<b>6</b>	<b>Legendre Transform Construction of Moduli Spaces</b>	<b>268</b>
<b>7</b>	<b>Relation to Integrable Systems</b>	<b>270</b>
<b>8</b>	<b>3-dimensional Mirror Symmetry</b>	<b>273</b>
<b>9</b>	<b>おわりに</b>	<b>275</b>

<sup>1</sup>E-mail address: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

<sup>2</sup>Home-Page address: <http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka/>

# 1 Introduction

Hyper-Kähler 多様体とは、性質の良い3つの複素構造が四元数的に備わった Riemann 多様体のことであり、Holonomy 群が  $SO(4n)$  から  $Sp(n)$  に reduce する実  $4n$  次元の Riemann 多様体としても定義される。Hyper-Kähler 多様体は Ricci-flat であり、Einstein 方程式の真空解としても記述される。したがって Euclid 空間での Einstein 方程式の重力インスタントン解として具体的な計量が、Eguchi-Hanson, Gibbons-Hawking たちによって、1970 年代後半に初めて求められた。また、instanton や monopole の moduli 空間も Hyper-Kähler 多様体となることが知られており、instanton 背景における経路積分の過程で moduli 空間の体積を計算する際、その具体的な計量が不可欠であった。さらに、4次元  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論の真空の moduli も Hyper-Kähler 多様体となり、超弦理論や超対称ゲージ理論におけるさまざまな duality の立証にも重要な役割を果たしてきた。

この解説記事では、主に non-compact な Hyper-Kähler 多様体の性質を、具体的な計量の構成・解析により、詳しく議論する。特に、Hyper-Kähler quotient による構成法から、ある程度分類を行う。ツイスター理論や可積分系との関連についても触れ、<sup>3</sup> 3次元 mirror symmetry における役割についても紹介する。

## 2 Symplectic Geometry and Moment Map

この章では、以後の議論の準備として、Symplectic 幾何学の基礎について簡単に紹介する。主に、Hitchin-Karlhede-Lindström-Roček の論文 [27]、および Hitchin の講義録 [26] に沿って解説する。

### 2.1 Symplectic Formalism

まず symplectic manifold を定義する：

- (Symplectic Manifold)

$2n$  次元の微分可能多様体  $M$  が closed 2-form  $\omega$  を持ち、 $\omega^n$  が至るところゼロにならないとき、 $(M, \omega)$  を symplectic 多様体であるという。また、 $\omega$  を symplectic form あるいは symplectic 構造という。

symplectic 多様体の例を挙げる。

- $M = \mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$

座標を  $(x^i, y^i) \in \mathbf{R}^{2n}$ ,  $z^i = x^i + iy^i \in \mathbf{C}^n$  と表すと symplectic 構造は

$$\omega = dx^i \wedge dy_i = \frac{i}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^i \quad (2.1)$$

である。<sup>4</sup> 実際、これが closed 2-form であることは明らかであり、 $\omega^n = (\text{non-zero const.}) \times dx^1 \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n$  が至る所ゼロにならないのも明らかである。

<sup>3</sup>関連を強調した解説としては [27] 以外に [22] もある。

<sup>4</sup>以後特に断りのない限り、同じ項で添え字が重なる場合はその添え字について和をとることとする (Einstein の規約)。

- cotangent bundle  $M^{2n} = T^*X \xrightarrow{\pi} X$

$X$  の座標を  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $T^*X$  の  $dx^1, \dots, dx^n$  に関する fiber 座標を  $(p^1, \dots, p^n)$  とする. このとき, symplectic 構造は,

$$\omega = dp_i \wedge dx^i \quad (2.2)$$

となる (上の例と全く同様). なお,  $\lambda = p_i dx^i$  を Liouville form といい,  $\omega = d\lambda$  が成り立つ.

- Kähler 多様体  $(M^{2n}, J, g, \omega)^5$

$M$  を向き付け可能な  $2n$  次元の Riemann 多様体,  $J$  を複素構造,  $g$  をエルミート計量とする. いま,  $\omega$  を

$$\omega(u, v) = g(Ju, v) \quad (2.3)$$

で定義すると,  $\omega(v, u) = -\omega(u, v)$  が成り立ち,  $\omega$  は 2 次微分形式とみなすことができる. この  $\omega$  が閉形式であるとき, すなわち symplectic 構造であるとき,  $\omega$  あるいは  $J$  を Kähler form と呼び,  $(M, J, g)$  を Kähler 多様体という. このとき holonomy は  $SO(4n)$  から  $U(2n)$  にまで reduce し, Levi-Civita connection  $\nabla$  は

$$\nabla J = 0 \quad (2.4)$$

を満たす. 式 (2.4) は複素構造が平行移動のもと不変であることを表しており, この結果 Kähler 多様体は複素多様体となる. したがって  $J$  を複素構造と呼んで差し支えない. Kähler 多様体は複素多様体と symplectic 多様体の共通部分である. Kähler 多様体の複素座標を  $(z^i, \bar{z}^i)$  で表すと, Kähler 多様体の metric は Kähler potential と呼ばれる実 scalar 関数  $K(z, \bar{z})$  を用いて

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} K(z, \bar{z}) \quad (2.5)$$

と表される. したがって, metric は Kähler 変換

$$K(z, \bar{z}) \rightarrow K(z, \bar{z}) + F(z) + F^*(\bar{z}) \quad (2.6)$$

のもと不変であり, Kähler potential は正則関数  $F(z)$  の不定性を持つ.

compact Kähler 多様体の例としては,  $n$  次元複素射影空間  $CP_n$ , 複素 Grassmann 多様体  $G_{p,q}^C$ , 4 次元 torus  $T^4$ , compact Riemann 面  $\Sigma_g$  などがある.

- Hyperkähler 多様体

3 つの「四元数的」Kähler 構造  $I, J, K$  を持つ, 向き付け可能な  $4n$  次元 Riemann 多様体  $M$  を hyperkähler 多様体という. ただし, 「四元数的」Kähler 構造  $I, J, K$  とは,

$$\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0 \quad (2.7)$$

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = K, JK = I, KI = J \quad (2.8)$$

<sup>5</sup>詳しい記述は, 例えば [10, 15, 39, 40, 44] にある.

を満たす, 3つの概複素構造のことである.<sup>6</sup>

hyperkähler 多様体は Kähler 多様体であるから, 前の Kähler 多様体の例における議論が適用できる. すなわち, 3つの「四元数的」Kähler 構造  $I, J, K$  に対応した Kähler form が 3つずつ作れる:

$$\omega_1(X, Y) = g(IX, Y), \quad \omega_2(X, Y) = g(JX, Y), \quad \omega_3(X, Y) = g(KX, Y) \quad (2.9)$$

これらをまとめて  $\bar{\omega}$  と表す.

hyperkähler 多様体は  $4n$  次元であり, holonomy が  $SO(4n)$  から  $Sp(n)$  にまで reduce する. 逆に holonomy が  $SO(4n)$  から  $Sp(n)$  にまで reduce する  $4n$  次元 Riemann 多様体は hyperkähler 多様体になることが知られている. また, 一般に hyperkähler 多様体は Ricci-flat であることが知られており, この場合 Einstein 方程式の真空解になっている.

compact な hyperkähler 多様体の例としては, K3 曲面や 4次元 torus  $T^4$  などがあるが, ここでは non-compact な hyperkähler 多様体を主に扱う. non-compact な hyperkähler 多様体の例としては,  $\mathbf{R}^{4n} = \mathbf{H}^n$ , ALE 空間, ALF 空間, Calabi 多様体, Atiyah-Hitchin 多様体などがあり, 重力 instanton や monopole moduli 空間として現れる.

symplectic 多様体には,

- (Darboux の定理)

symplectic 構造は局所的には皆同型であり, うまく局所座標  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  を選ぶことで

$$\omega = dx^i \wedge dy_i \quad (2.10)$$

と書ける.

があるため, Riemann 幾何学における曲率のような局所不変量は存在しない.

1 次の de Rham cohomology 群が trivial であるような symplectic 多様体には,

$$\iota(X_H)\omega = dH \quad (2.11)$$

$X_H$  :  $H$  の生成する vector 場

を満たす滑らかな関数  $H$  が存在する.  $\iota$  は内部積を表す. 式 (2.10) を満たす座標を用いると,

$$X_H = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (2.12)$$

$$\iota(X_H)\omega = a_i dy^i - b_i dx^i \quad (2.13)$$

$$\text{ただし} \quad a_i = \frac{\partial H}{\partial y^i}, \quad b_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (2.14)$$

となる. 今考えている多様体を  $T^*M$  にとり, fiber 座標を  $(y^1, \dots, y^n) = (p^1, \dots, p^n)$  で表すと, 式 (2.14) は古典力学における Hamilton の正準方程式に一致する. したがって,  $H$  のことを Hamilton 関数という.  $H$  は定数の不定性を除いて一意に定まる.

<sup>6</sup>式 (2.8) は  $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$  とまとめられる.

symplectic 構造  $\omega$  を  $X_H$  方向へ Lie 微分すると,

$$L_{X_H}\omega = (d(\iota(X_H)\omega) + \iota(X_H)d\omega) = d(dH) = 0 \quad (2.15)$$

となるので, vector 場  $X_H$  は symplectic 構造  $\omega$  を保つ. 1 行目では Cartan の公式  $L_X = d\iota(X) + \iota(X)d$  を用いた.

逆に  $X$  を symplectic 構造  $\omega$  を保つ vector 場であるとする,

$$0 = L_X\omega = d(\iota(X)\omega) + \iota(X)d\omega \quad (2.16)$$

となり,  $d(\iota(X)\omega) = 0$  が得られる. このとき 1 次の de Rham cohomology 群が trivial であるとすれば, Poincaré の補題により,  $\iota(X)\omega = dH$  となる関数  $H$  の存在が言える. これで式 (2.11) が証明された.<sup>7</sup>

## 2.2 Moment Map

Lie 群  $G$  が symplectic 構造  $\omega$  を保ちながら, symplectic 多様体  $M$  に作用しているものとする. このとき, Lie 群  $G$  の Lie 環  $\mathcal{G}$  の各々の元  $\xi$  に対して, vector 場  $X_\xi$  が定まり, 式 (2.11) より Hamilton 関数  $H_\xi$  が定まる. これによって,  $\mathcal{G}$  から  $C^\infty(M)$  への vector 空間としての準同型が定まる. すなわち,  $\mathcal{G}^*$  に値をとる  $M$  上の関数  $\mu$  が定まる:

$$d\mu^{X_\xi} = \iota(X_\xi)\omega \quad (2.17)$$

$$\langle \mu(x), \xi \rangle = H_\xi(x) \quad (2.18)$$

$\mu$  のことを moment map という.  $\mu$  の肩の  $X$  は省略することがある. moment map は  $G$  の作用のもと不変な定数  $\zeta (\in \mathcal{G}^*)$  の不定性を除いて一意に定まる. これは  $G$  の abelian character の元である.

moment map の例を挙げる.

- $M = T^*\mathbf{R}^3, G = \mathbf{R}^3$  (並進)

$\mathbf{R}^3$  の座標を  $(x^1, x^2, x^3)$ , cotangent vector を  $p_i dx^i$  と書く. symplectic 構造は

$$\omega = dx^i \wedge dp_i \quad (2.19)$$

である. Lie 環  $\mathcal{G}$  の元  $\xi$  が生成する  $\mathbf{R}^3$  の vector 場  $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , ( $a^i$ : 定数) は座標  $p_i$  に対して trivial な作用をするので  $(L_X dx^i \stackrel{[L_X, d]}{=} d(L_X dx^i) = da^i = 0)$ ,  $T^*\mathbf{R}^3$  の vector 場は

$$X_\xi = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.20)$$

<sup>7</sup>vector 場の用語についてまとめておく.

- vector 場  $X$  が Killing である.  $\Leftrightarrow L_X g = 0$
- vector 場  $X$  が Hamiltonian である.  $\Leftrightarrow L_X \omega = 0$
- vector 場  $X$  が holomorphic である.  $\Leftrightarrow L_X I = 0$
- vector 場  $X$  が tri-holomorphic である.  $\Leftrightarrow L_X I = L_X J = L_X K = 0$

である.

$$\iota(X_\xi)\omega = a^i dp_i = d(a^i p_i) \quad (2.21)$$

より, moment map は

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad (2.22)$$

である. これは, 普通の運動量である.

- $M = T^*\mathbf{R}^3, G = SO(3)$  (回転)

$G$  の生成する vector 場は  $X = x^i a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , ( $a_{ij}$ : 反対称行列) と表される.

$$L_X dx^j = d(x^i a_i^j) = a_i^j dx^i \quad (2.23)$$

より, 座標  $(p^1, p^2, p^3)$  への作用は  $p^j \rightarrow p^i a_i^j$  となる. したがって,

$$X_\xi = a_i^j \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + p^i \frac{\partial}{\partial p^j} \right) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \iota(X_\xi)\omega &= a_i^j (x^i dp^j - p^i dx^j) = a_i^j (x^i dp^j + p^j dx^i) \\ &= a_i^j d(x^i p_j) = \frac{1}{2} a_i^j d(x^i p_j - p^i x^j) \end{aligned} \quad (2.25)$$

となり, moment map は

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \quad (2.26)$$

である. これは角運動量である. したがって moment map は運動量, 角運動量の一般化になっている.

- $M = \mathbf{C}^n, G = U(1)$

$e^{i\theta} \in U(1)$  の  $\mathbf{C}^n$  に対する作用を

$$e^{i\theta}(z_1, \dots, z_n) = (e^{ik_1\theta}, \dots, e^{ik_n\theta}), \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z} \quad (2.27)$$

で定義する.  $U(1)$  の Lie 環  $\mathcal{U}(1)$  の生成する vector 場は  $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$  であり,

$$\begin{aligned} X_\xi &= i \sum_{i=1}^n k_i \left( z^i \frac{\partial}{\partial z^i} - \bar{z}^i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \right) = \sum_{i=1}^n k_i \left( x^i \frac{\partial}{\partial y^i} - y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad z^i = x^i + iy^i \\ \iota(X_\xi)\omega &= -\frac{1}{2} k_i (z^i d\bar{z}^i + \bar{z}^i dz^i) = -\frac{1}{2} d \left( \sum_{i=1}^n k_i |z^i|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

となる. よって, moment map は

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{2} (k_1 |z_1|^2 + \dots + k_n |z_n|^2) \quad (2.29)$$

である.

- $M = \mathbf{C}^n, G = U(n)$

$\mathbf{C}^n$  の座標を  $(z^1, \dots, z^n)$  とすると, symplectic 構造は Kähler form

$$\omega = \frac{i}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} \quad (2.30)$$

である.  $U(n)$  の Lie 環  $\mathcal{U}(n)$  の生成する vector 場は

$$X_\xi = z^i A_i^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial z^{\bar{j}}} + \bar{z}^{\bar{i}} A_i^{* \bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}}, \quad A_{i\bar{j}}: \text{反エルミート行列} \quad (2.31)$$

と表される. よって,

$$\iota(X_\xi)\omega = \frac{i}{2} z^i A_{i\bar{j}} d\bar{z}^{\bar{j}} - \frac{i}{2} \bar{z}^{\bar{i}} A_i^{* \bar{j}} dz^j = \frac{i}{2} A_{i\bar{j}} (z^i d\bar{z}^{\bar{j}} + \bar{z}^{\bar{j}} dz^i) = \frac{i}{2} A_{i\bar{j}} d(z^i \bar{z}^{\bar{j}}) \quad (2.32)$$

となり, moment map は

$$\mu(z_1, \dots, z_n)^{i\bar{j}} = \frac{i}{2} z^i \bar{z}^{\bar{j}} \quad (2.33)$$

である.

- $M = M(n, \mathbf{C}), G = U(n)$ : conjugation action

$Z_{ij} \in M(n, \mathbf{C})$  と書くと, symplectic 構造は Kähler form

$$\omega = \frac{i}{2} dZ_{ij} \wedge dZ_{i\bar{j}}^* = \frac{i}{2} \text{Tr} (dZ \wedge dZ^\dagger) \quad (2.34)$$

である. 前の例と同様 moment map は

$$\langle \mu(Z), A \rangle = \frac{i}{2} \text{Tr} (AZZ^\dagger) \quad (2.35)$$

となる.  $A = \text{ad}B$  の場合は

$$\langle \mu(Z), A \rangle = \frac{i}{2} \text{Tr} ((\text{ad}BZ)Z^\dagger) = \frac{i}{2} \text{Tr} (BZZ^\dagger - ZBZ^\dagger) = \frac{i}{2} \text{Tr} (B(ZZ^\dagger - Z^\dagger Z)) \quad (2.36)$$

したがって moment map は

$$\mu(Z) = \frac{i}{2} [Z, Z^\dagger] \quad (2.37)$$

と書き直すことができる.

この最後の例を複素数から四元数に拡張すると ADHM/Nahm 構成法における一連の self-dual 方程式 (ADHM/Nahm 方程式) が得られる [24]. それを説明するため, まず四元数について説明する.

四元数全体の集合  $\mathbf{H}$  とは,

$$\mathbf{H} = \left\{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j \right\} \quad (2.38)$$

で定義される 4次元の非可換代数のことである. 実数, 複素数をさらに拡張した数体系のことである.  $i, j, k$  は  $SU(2)$  の生成子と同じ交換関係をみたす.

次に四元数 vector 空間  $\mathbf{H}^n$  を考える. この空間の元を縦 vector として表すと, 右から四元数が, 左から  $n \times n$  四元数行列が作用する. この2つの作用は互いに可換である. また, 四元数 vector 空間には内積が定義されるが, 内積を保つ行列は  $Sp(n)$  (成分が四元数であるような unitary 行列) である.

$v, w \in \mathbf{H}^n$  の内積を  $(v, w)$  で表すと, symplectic 構造は

$$\omega_1(v, w) = (iv, w), \quad \omega_2(v, w) = (jv, w), \quad \omega_3(v, w) = (kv, w) \quad (2.39)$$

のように3つ作ることができる. これらは Kähler form である.

さてここで moment map を構成する. 3つの symplectic 構造  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  に対応する3つの moment map  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  を構成することができる. これらをまとめて,

$$\mu : \mathbf{H}^n \longrightarrow \mathcal{G}^* \otimes \mathbf{R}^3 \quad (2.40)$$

と表すことがある.

- $M = M(n, \mathbf{H}), G = Sp(n)$  の部分群で symplectic 構造 (2.39) を保つもの (conjugation action)

symplectic 構造 (2.39) を保つには, 内積を保ちかつ四元数の作用と可換でなければならない. したがって,  $G = O(n)$  となる.

$M$  の元を,

$$M = M(n, \mathbf{H}) \ni B = B_0 + iB_1 + jB_2 + kB_3, \quad B_\mu \in M(n, \mathbf{R}) \quad (2.41)$$

と書き表す ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). また,  $B_\mu$  は反対称行列であるとする.  $B_\mu$  に対して,  $G = O(n)$  が adjoint に作用している.

まず,  $i$  の右からの作用について考える.  $B$  は

$$B = B_0 + iB_1 + k(B_3 + iB_2) = Z + kW \quad (2.42)$$

と表すことができる. これは前の例の2つのコピーの直和 ( $k$  についての実部, 虚部) であるから,

$$\begin{aligned} \mu_1(B) &= \frac{i}{2}[Z, Z^\dagger] + \frac{i}{2}[W, W^\dagger] \\ &= \frac{i}{2}[B_0 + iB_2, -(B_0 - iB_2)] + \frac{i}{2}[B_3 + iB_2, -(B_3 + iB_2)] \\ &= [B_2, B_3] - [B_0, B_1] \end{aligned} \quad (2.43)$$

が得られる.  $Z, W$  に対しては,  $G = U(n)$  が adjoint に作用している.  $j, k$  についても同様のことを行えば  $\mu_2, \mu_3$  も求まる:

$$\begin{cases} \mu_1(B) = -[B_0, B_1] + [B_2, B_3] \\ \mu_2(B) = -[B_0, B_2] - [B_1, B_3] \\ \mu_3(B) = -[B_0, B_3] + [B_1, B_2] \end{cases} \quad (2.44)$$

これは ADHM/Nahm 構成法に現れる一連の self-dual 方程式 (ADHM/Nahm 方程式) と同じような形である [24]. conjugation action が四元数の作用と可換であるところが ADHM/Nahm 構成法と共通した点であり, これが本質的な点なのである.

### 3 Hyperkähler Quotient and ADHM/Nahm Construction

この section ではある幾何構造 (symplectic 構造, Kähler 構造, hyperkähler 構造など) を持った多様体から同じ幾何構造を持つ新しい多様体を構成する方法について紹介し, ADHM/Nahm データの moduli 空間について再び考察を行う.

#### 3.1 Quotient Manifold

多様体  $M$  に compact Lie 群  $G$  が free に作用<sup>8</sup>しているとき,  $M/G$  もまた多様体になる.  $M/G$  のことを quotient manifold という. 次元については  $\dim(M/G) = \dim M - \dim G$  が成り立つ. Lie 群  $G$  の作用が free でないとき,  $M/G$  は多様体になるとは限らない.

このとき, もともとの多様体  $M$  の幾何構造がどれくらい  $M/G$  に遺伝していくかが問題となってくる. 例えば,  $M$  が Kähler 多様体で,  $G$  が  $U(1)$  のときは  $\dim(M/G)$  は奇数となり  $M/G$  は Kähler 多様体になりえない. しかし,  $G$  の作用にある制限を加えると,  $M$  の symplectic 構造, Kähler 構造, hyperkähler 構造が  $M/G$  にも遺伝し, 新しい symplectic 多様体, Kähler 多様体, hyperkähler 多様体を作ることができる. この方法についての数学的事実を紹介する.

- Symplectic Quotient

$(M, \omega, g)$  を symplectic 多様体とし,  $G$  が  $\omega$  を保ちつつ  $M$  に作用しているものとする. これより, moment map  $\mu$  を構成することができるが,  $\mu^{-1}(0)/G$  は symplectic 多様体となり,  $\mu^{-1}(0)/G$  の symplectic 構造は  $\rho(X, Y) := \omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$ , ( $\tilde{X}, \tilde{Y}$  はそれぞれ  $X, Y \in T\mu^{-1}(0)$  を  $\mu^{-1}(0)/G$  の接線方向に射影したもの) で与えられる.

- Kähler Quotient

$(M, J, \omega, g)$  を Kähler 多様体とし,  $G$  が  $J, \omega$  を保ちつつ  $M$  に作用しているものとする. これより, moment map  $\mu$  を構成することができるが,  $\mu^{-1}(0)/G$  は Kähler 多様体となり,  $\mu^{-1}(0)/G$  の Kähler 構造は  $\rho(X, Y) := \omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$  で与えられる.

- Hyperkähler Quotient[27]

$(M, I, J, K, \vec{\omega}, g)$  を hyperkähler 多様体とし,  $G$  が  $I, J, K, \vec{\omega}$  を保ちつつ  $M$  に作用しているものとする. これより, moment map  $\vec{\mu} : M \rightarrow \mathcal{G}^* \otimes \mathbf{R}^3$  を構成することができるが,  $\vec{\mu}^{-1}(0)/G$  は hyperkähler 多様体となり,  $\vec{\mu}^{-1}(0)/G$  の hyperkähler 構造は  $\vec{\rho}(X, Y) := \vec{\omega}(\tilde{X}, \tilde{Y})$  で与えられる.

---

<sup>8</sup>群の作用についての用語をまとめておく.

$G \times M \ni (g, p) \mapsto \sigma(g, p) \in M$  の時,

- 群の作用が transitive : 任意の 2 点  $p_1, p_2 \in M$  に対して,  $p_1$  を  $p_2$  にうつす変換  $\sigma(g, p_1) = p_2 \in G$  が存在する.
- 群の作用が free : 任意の変換 ( $\sigma(e, *)$  を除く) に対して,  $M$  に不動点が存在しない ( $e$  は  $G$  の単位元).
- 群の作用が effective :  $\sigma(e, *)$  以外には  $M$  への trivial action が存在しない.

以前に述べたように, moment map には  $G$  の作用で不変な  $\mathcal{G}^*$  の元  $\zeta$  ( $G$  の abelian character) の分だけ不定性がある. そのため,  $\mu^{-1}(0)/G$  の代わりに,  $\mu^{-1}(\zeta)/G$  として構成した hyperkähler quotient も hyperkähler 多様体となることが示される. 一般に  $\mu^{-1}(0)/G$  が non-compact なとき, それを compact 化すると特異点が現れるが,  $\mu^{-1}(\zeta)/G$  の場合には特異点が現れない. したがって, moduli 空間の topology など調べる際には, この  $\zeta$  を普通加える. compact な空間に対しては Morse 理論などの強力な道具が使えるため moduli 空間の topology を調べるのが容易になるのである.<sup>9</sup>  $\mu = 0$  あるいは  $\mu = \zeta$  を moment map 方程式と呼ぶ. moment map 方程式の解空間を群作用で割ったものが  $\mu^{-1}(0)/G$  あるいは  $\mu^{-1}(\zeta)/G$  である.

例を一つ挙げる.

- $M = \mathbf{C}^n, G = U(1)$  (250 ページの例)

$\zeta < 0$  とする.  $k_1 = \dots = k_n$  のとき,  $\mu^{-1}(\zeta)/G$  は複素射影空間  $\mathbf{C}P_n$  である. なお, 一般の  $k_1, \dots, k_n$  の場合の  $\mu^{-1}(\zeta)/G$  のことを, 重みつき射影空間というが, この場合  $\mu^{-1}(\zeta)/G$  は多様体でない.

この hyperkähler quotient における  $\vec{\mu} = 0$  あるいは  $\vec{\mu} = \vec{\zeta}$  が ADHM/Nahm 方程式に対応している. これを以下で議論する.

### 3.2 Moduli Space and Hyperkähler Geometry

252 ページで議論した例: 「 $M = M(k, \mathbf{H}), G = Sp(k)$  の部分群で symplectic 構造 (2.39) を保つもの (conjugation action)」と同様, hyperkähler 多様体の場合にも式 (2.44)

$$\begin{cases} \mu_1(B) = -[B_0, B_1] + [B_2, B_3] \\ \mu_2(B) = -[B_0, B_2] - [B_1, B_3] \\ \mu_3(B) = -[B_0, B_3] + [B_1, B_2] \end{cases} \quad (3.1)$$

が成り立つ. よって,

$$\mathcal{M} = \left\{ B_\mu \left| \begin{array}{l} [B_0, B_1] - [B_2, B_3] = \zeta_1 \\ [B_0, B_2] + [B_1, B_3] = \zeta_2 \\ [B_0, B_3] - [B_1, B_2] = \zeta_3 \end{array} \right. \right\} / G \quad (3.2)$$

は, hyperkähler 多様体である.

なお, 普通は  $X = B_0 + iB_1, Y = B_2 + iB_3$  とし, 式  $\vec{\mu} = \vec{\zeta}$  を

$$\begin{cases} \mu_R = [X, X^\dagger] + [Y, Y^\dagger] = \zeta_R \\ \mu_C = [X, Y] = \zeta_C \end{cases} \quad (3.3)$$

と書くことが多い. なお,  $\zeta_C, \zeta_R$  のうちどちらかが 0 でなければ, moduli 空間には特異点がない.

<sup>9</sup>このあたりの事情については例えば [41] に解説がある.

ADHM 方程式をこの形に表すには,

$$\begin{aligned}\Delta &= B + Cx = \begin{pmatrix} S_{[N] \times [2k]} \\ T_{[2k] \times [2k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{[N] \times [2k]} \\ 1_{[2k] \times [2k]} \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma_{[N] \times [k]}^\dagger & \Lambda_{[N] \times [k]} \\ (T_0 + iT_3)_{[k] \times [2k]} & (T_2 + iT_1)_{[k] \times [k]} \\ -(T_2 - iT_1)_{[k] \times [k]} & (T_0 - iT_3)_{[k] \times [k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{[N] \times [2k]} \\ 1_{[2k] \times [2k]} \end{pmatrix} x\end{aligned}\quad (3.4)$$

において,  $X = T_0 - iT_3, Y = T_2 + iT_1$  とおけばよい.<sup>10</sup> このとき

$$\begin{aligned}\Delta^\dagger \Delta &= S^\dagger S + T^\dagger T + x^\dagger T + T^\dagger x + x^\dagger x \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma \Gamma^\dagger + X X^\dagger + Y Y^\dagger + 2x^\mu T_\mu & \Gamma \Lambda + X Y - Y X \\ \Lambda^\dagger \Gamma^\dagger + Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger & \Lambda^\dagger \Lambda + Y^\dagger Y + X^\dagger X + 2x^\mu T_\mu \end{pmatrix} + |x|^2 + \underbrace{i x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}^-}_{=0 \dots (*)}\end{aligned}\quad (3.5)$$

となるので,  $\Delta^\dagger \Delta$  のパウリ行列 (四元数の 2 次元表現の行列) との可換性 ( $\Delta^\dagger \Delta \propto e_0 = 1_{[2]}$ ) より

$$\Gamma \Gamma^\dagger + X X^\dagger + Y Y^\dagger + 2x^\mu T_\mu + |x|^2 = \Lambda^\dagger \Lambda + Y^\dagger Y + X^\dagger X + 2x^\mu T_\mu + |x|^2 \quad (3.6)$$

$$\Gamma \Lambda + X Y - Y X = \Lambda^\dagger \Gamma^\dagger + Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = 0 \quad (3.7)$$

から, ADHM 方程式

$$\begin{cases} [X, X^\dagger] + [Y, Y^\dagger] + \Gamma \Gamma^\dagger - \Lambda^\dagger \Lambda = 0 \\ [X, Y] + \Gamma \Lambda = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

が得られる. これは  $\Gamma, \Lambda$  の部分を除けば,  $\zeta_R = \zeta_C = 0$  の場合の moment map 方程式 (3.3) そのものである. conjugation action が四元数の作用と可換であるという条件が両者に共通しており, その結果 ADHM 方程式と moment map 方程式が同じような形になる.

Nahm 方程式についても同様に  $\alpha = \frac{i}{2}(T_0 - iT_3), \beta = \frac{i}{2}(T_2 + iT_1)$  とおくと,

$$\begin{cases} \mu_R = \frac{d}{dz}(\alpha + \alpha^\dagger) + 2([\alpha, \alpha^\dagger] + [\beta, \beta^\dagger]) = 0 \\ \mu_C = \frac{d\beta}{dz} + 2[\alpha, \beta] = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

が得られる. これも  $X = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} + \alpha, Y = \beta$  とおけば, 完全に  $\zeta_R = \zeta_C = 0$  の場合の moment map 方程式 (3.3) と一致する ( $X^\dagger = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} + \alpha^\dagger$  に注意).

ADHM 方程式の右辺が 0 なので, ADHM データの moduli 空間  $\mathcal{M}_{k,N}^{\text{ADHM}}$  を compact 化した空間  $\bar{\mathcal{M}}_{k,N}^{\text{ADHM}}$  には特異点が現れる. 具体的には次のような構造を持つ:

$$\bar{\mathcal{M}}_{k,N}^{\text{ADHM}} = \mathcal{M}_{k,N}^{\text{ADHM}} \cup (\mathcal{M}_{k-1,N}^{\text{ADHM}} \times \mathbf{R}^4) \cup (\mathcal{M}_{k-2,N}^{\text{ADHM}} \times \text{Sym}^2 \mathbf{R}^4) \cup \dots \cup \text{Sym}^k \mathbf{R}^4 \quad (3.10)$$

右辺の  $\text{Sym}^i \mathbf{R}^4$  は  $\mathbf{R}^4$  の点の  $i$  次の対称積を表す. これに対応する instanton は size がゼロの instanton である.  $(\mathcal{M}_{k-i,N}^{\text{ADHM}} \times \text{Sym}^i \mathbf{R}^4)$  は  $k$  個の instanton のうち,  $i$  個が zero-size instanton になっているような instanton 解に対応している (図 1 参照).

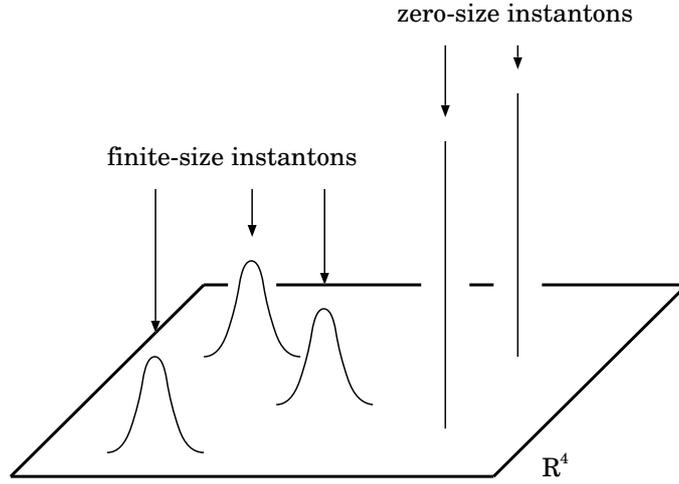


図 1:  $(\mathcal{M}_{k-i,N}^{\text{ADHM}} \times \text{Sym}^i \mathbf{R}^4)$  に対応する instantons ( $k = 5, i = 2$ )

対称積は点と点がぶつかる場所で特異点をもつ. この特異点が,  $\zeta$  を導入することで解消される. なお, この特異点解消の数学的理論として Hilbert scheme がある [42].

ところで,  $\zeta$  を自然に出す試みの一つとして非可換幾何の方法がある [45]. 非可換幾何では座標関数は可換ではなく, 例えば

$$[z_0, \bar{z}_0] = [z_1, \bar{z}_1] = -\frac{\zeta}{2}, \quad \text{others} = 0 \quad (3.11)$$

のように座標の交換子が non-zero になる (ただし  $z_0 = x_0 - ix_3, z_1 = x_2 + ix_1$ ). このとき式 (3.5) の (\*) の部分は 0 にはならず, 式 (3.6), (3.7) は

$$\begin{aligned} \Gamma\Gamma^\dagger + XX^\dagger + YY^\dagger + 2x^\mu T_\mu + z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 &= \Lambda^\dagger\Lambda + Y^\dagger Y + X^\dagger X + 2x^\mu T_\mu + \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_0 z_0 \\ \Gamma\Lambda + XY - YX + \bar{z}_0 z_1 - z_1\bar{z}_0 &= \Lambda^\dagger\Gamma^\dagger + Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger + \bar{z}_1 z_0 - z_0\bar{z}_1 = 0 \end{aligned}$$

となり, (3.3) の  $\zeta_R = \zeta, \zeta_C = 0$  の場合の ADHM 方程式

$$\begin{cases} [X, X^\dagger] + [Y, Y^\dagger] + \Gamma\Gamma^\dagger - \Lambda^\dagger\Lambda = \zeta \\ [X, Y] + \Gamma\Lambda = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

が得られる.

## 4 Metrics of Hyperkähler Manifolds

[24] で議論した ADHM/Nahm データ (すなわち instanton/ monopole の moduli 空間) は, hyperkähler quotient  $\mathcal{M}$  として記述できるので, hyperkähler 多様体としての構造を持つ. [24] では, ADHM/Nahm データと instanton/monopole の moduli 空間とが集合として 1:1 であることが示されたが, 実はさらに強く hyperkähler 多様体としての構造も一致することが示される.  $\mathbf{R}^4$

<sup>10</sup>(3.3) の時と添字 1 と 3 の順序が異なるのは, 四元数の 2 次元表現であるところのパウリ行列  $e^\mu$  の定義を  $e_0 = 1_2, e_1 = i\sigma_1, e_2 = i\sigma_2, e_3 = i\sigma_3$  のようにしたからである. (このとき四元数  $i, j, k$  はそれぞれ  $e_3, e_2, e_1$  に対応する.)

上の instanton moduli と ADHM データの moduli については [37] で,  $\mathbf{R}^3$  上の monopole moduli と Nahm データの moduli については [46] で,  $T^4$  上の instanton moduli と  $\widehat{T}^4$  上の instanton moduli については [6] で証明がなされている. これらの証明では直接 moduli 空間の metric が求められたわけではないが, 簡単な状況では metric を正確に求めることができる. いくつかの例で, それを実際に計算する.

#### 4.1 $M$ : 4次元の hyperkähler 多様体, $G = U(1)$ : Circle Action

$M$  を 4次元の hyperkähler 多様体とし, それに作用する群  $G$  が symplectic 構造を保つ circle action であるとする.  $X$  を circle action が生成する vector 場であるとする,

$$\iota(X)\vec{\omega} = d\vec{\mu} \quad (4.1)$$

が成り立つ. あるいは,

$$\text{grad } \mu_1 = IX, \text{ grad } \mu_2 = JX, \text{ grad } \mu_3 = KX \quad (4.2)$$

が成り立つ.

circle action の場合,  $M - \{X = 0\}$  は  $\mathbf{R}^3$  上の  $S^1$ -bundle となる.  $M$  の metric は circle の軌道に直交する水平部分空間を定める. bundle を局所自明化することで, その connection は,

$$A = A_i dx^i \quad (4.3)$$

と書ける. このとき, 局所座標を

$$(\tau, x_1, x_2, x_3) \quad (4.4)$$

と書くことにする. 水平部分空間は connection  $(d\tau + A)$  と内積をとると 0 になる vectors の張る空間である.  $M$  の metric は

$$ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j + k(\mathbf{x})(d\tau + A)^2 \quad (4.5)$$

と書ける. いま,  $X = \frac{\partial}{\partial \tau}$  であるから,

$$k(\mathbf{x}) = g\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) = g(X, X) =: V(\mathbf{x})^{-1} \quad (4.6)$$

と  $k$  が求まる.  $g^{-1}$  を cotangent space に対する metric とすると,

$$g^{-1}(dx^i, dx^j) = g^{-1}(d\mu_i, d\mu_j) = g(\text{grad } \mu_i, \text{grad } \mu_j) \quad (4.7)$$

となる.

$$g^{-1}(dx^1, dx^1) = g(\text{grad } \mu_1, \text{grad } \mu_1) = g(IX, IX) = g(X, X) = V^{-1} \quad (4.8)$$

$$g^{-1}(dx^1, dx^2) = g(IX, JX) = -g(JIX, X) = g(KX, X) = 0 \quad (4.9)$$

などにより,

$$g^{-1}(dx^i, dx^j) = V^{-1}\delta_{ij} \quad (4.10)$$

が分かり, metric は

$$ds^2 = Vdx_i^2 + V^{-1}(d\tau + A_i dx^i)^2 \quad (4.11)$$

と求まる. ‘cotangent space における metric’ は

$$ds^2 = V^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - A_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 + V \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \quad (4.12)$$

となる.

これより,

$$I \frac{\partial}{\partial \tau} = V^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad (4.13)$$

などが分かり, 直交基底として

$$e_0 = V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad e_i = V^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} - A_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad (4.14)$$

$$Ie_0 = e_1, \quad Ie_1 = -e_0, \quad Ie_2 = e_3, \quad Ie_3 = -e_2 \quad (4.15)$$

がとれて, symplectic 構造が

$$\omega_1 = (d\tau + A_i dx^i) \wedge dx_1 - V dx_2 \wedge dx_3 \quad (4.16)$$

$$d\omega_1 = d(A_i dx^i) \wedge dx_1 - dV \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (4.17)$$

と求まる.  $d\omega_1 = 0$  より,

$$dV = *dA \quad (4.18)$$

が得られる. この式は

$$\text{grad } V = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{あるいは局所的に } \Delta V = 0 \quad (4.19)$$

と書き換えられる.  $\Delta V = 0$  は 3次元の Laplace 方程式 (線型方程式) であり, 解は,

$$V = \lambda + \sum_{i=1}^k \frac{2m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \quad m_i, \lambda: \text{実定数} \quad (4.20)$$

と書ける.  $\lambda = 0$  の場合と  $\lambda \neq 0$  の場合とで解の振る舞いが異なってくるが, 後者の場合は  $\lambda = 1$  に規格化することができる. また,  $\forall i, m_i = M$  のとき  $x = x_i$  における特異点は座標特異点となる.

このようにして得られた metric

$$ds_{\text{GH}}^2 = Vdx_i^2 + V^{-1}(d\tau + A_i dx^i)^2 \quad (4.21)$$

$$\text{grad } V = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$V = \lambda + 2M \sum_{i=1}^k \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \quad M, \lambda \in \mathbf{R}$$

を Gibbons-Hawking multi-center metric という [18].

特に,  $\lambda$  が次のような場合

$$\begin{aligned} \lambda = 0 & : \text{ multi-Eguchi-Hanson } \begin{cases} k = 1 : \text{ flat} \\ k = 2 : \text{ Eguchi-Hanson [17]} \end{cases} \\ \lambda = 1 & : \text{ multi-Euclidean Taub-NUT [23] } (k=1 : \text{ Taub-NUT}) \end{aligned}$$

とよばれる多様体となる. 上記の multi-Eguchi-Hanson 空間のことを ALE 空間 ( $A_{k-1}$  型),  $M > 0$  の multi-Euclidean Taub-NUT 空間のことを ALF 空間 ( $A_k$  型) と呼ぶことがある.<sup>11</sup>  $M < 0$  の multi-Euclidean Taub-NUT 空間は  $r = M$  に曲率特異点を持つ.

解 (metric) として式 (4.5) の形の仮定をおくことで, 非線形な Einstein 方程式が線形な Laplace 方程式 (4.19) に帰着され, 厳密解が求まったのである. これは, 't Hooft ansatz を用いた instanton 解の導出と同様である. (ALE metric が Jackiw-Nohl-Rebbi 解に, ALF metric が 't Hooft 解に対応している.)

## 4.2 $M$ : 4次元の hyperkähler 多様体, $G = SU(2)$

$M$  を  $SU(2)$  (あるいは  $SO(3)$ ) の対称性を持った 4次元の hyperkähler 多様体とする. これは, Einstein 方程式の真空解になっている.  $SU(2)$  (あるいは  $SO(3)$ ) の対称性を持った Einstein 方程式の真空解の metric は次のように表される [34] §118 :

$$ds^2 = f(r)^2 dr^2 + a(r)^2 \sigma_x^2 + b(r)^2 \sigma_y^2 + c(r)^2 \sigma_z^2 \quad (4.22)$$

$$\text{ただし} \begin{cases} \frac{bc}{f} \frac{da}{dr} = b^2 + c^2 - a^2 - 2\lambda bc \\ \frac{ca}{f} \frac{db}{dr} = c^2 + a^2 - b^2 - 2\lambda ca \\ \frac{ab}{f} \frac{dc}{dr} = a^2 + b^2 - c^2 - 2\lambda ab \end{cases} \quad (4.23)$$

$\lambda$  は 0 か 1 の定数である. また,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  は  $SU(2)$  の左作用に対して不変な 1-form であり, 具体的には

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{1}{2}(\sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\phi) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \sigma_y = -\frac{1}{2}(\cos \psi d\theta + \sin \psi \sin \theta d\phi) & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ \sigma_z = \frac{1}{2}(d\psi + \cos \theta d\phi) & 0 \leq \psi \leq \begin{cases} 2\pi & G = SO(3) \text{ の場合} \\ 4\pi & G = SU(2) \text{ の場合} \end{cases} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$d\sigma_x = 2\sigma_y \wedge \sigma_z, \quad d\sigma_y = 2\sigma_z \wedge \sigma_x, \quad d\sigma_z = 2\sigma_x \wedge \sigma_y \quad (4.25)$$

である.<sup>12</sup> 微分方程式 (4.23) は真空の Einstein 方程式  $R_{ab} = 0$  から導出される.  $R_{ab}$  は

$$R^a_b := d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad (4.26)$$

<sup>11</sup>ALE は Asymptotically Locally Euclidean の略, ALF は Asymptotically Locally Flat の略である.

<sup>12</sup>ここで用いた  $\sigma_{x,y,z}$  の convention は [16] に従った. この convention を用いると,  $\mathbf{R}^4$  の極座標表示が最も simple に書ける (例えば,  $ds^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$ ,  $dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = -r^3 dr \wedge \sigma_x \wedge \sigma_y \wedge \sigma_z$ ). [4, 20, 19] のものは式 (4.24) の係数の  $\frac{1}{2}$  がない.

$$\begin{aligned}
T^a &:= de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0 \\
e^0 &= f(r)dr, \quad e^1 = a(r)\sigma_x, \quad e^2 = b(r)\sigma_y, \quad e^3 = c(r)\sigma_z
\end{aligned} \tag{4.27}$$

から求まる (ここでは添字の足  $a, b, c = 1, 2, 3$  は local Lorentz の足). また  $\lambda$  の値は  $SU(2)$  が symplectic 構造  $\bar{\omega}$  に対して, trivial に作用するか adjoint に作用するかによって決まる. trivial に作用する場合は  $\lambda = 0$  であり, adjoint に作用する場合は  $\lambda = 1$  である.

symplectic 構造は

$$\omega_i = \begin{cases} 2e_0 \wedge e_i + \epsilon_{ijk}e_j \wedge e_k & \lambda = 0 \text{ の場合} \\ \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_i g \sigma_j g^{-1})(2e_0 \wedge e_j + \epsilon_{jkl}e_k \wedge e_l) & \lambda = 1 \text{ の場合} \end{cases} \tag{4.28}$$

ただし  $g = e^{\frac{i}{2}\phi\sigma^3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^2} e^{\frac{i}{2}\psi\sigma^3}$

である ( $i = 1(= x), 2(= y), 3(= z)$ ).

微分方程式 (4.23) の解は V.Belinskii, G.Gibbons, D.Page, D.Pope, M.Atiyah, N.Hitchin により調べられていて, その中で non-singular な解は次のいずれかに帰着する [4, 20, 5].

- $\lambda = 1, a = b = c$  の場合 :  $\mathbf{R}^4$
- $\lambda = 1, a = b \neq c$  の場合 : Taub-NUT ( $SU(2)$  対称性を持つ<sup>13</sup>)
- $\lambda = 1, a \neq b \neq c$  の場合 : Atiyah-Hitchin あるいはその二重被覆空間 ( $SO(3)$  対称性を持つ)
- $\lambda = 0, a = b \neq c$  の場合 : Eguchi-Hanson ( $SO(3)$  対称性を持つ)

Atiyah-Hitchin metric の  $r$  依存性を調べてみる. Atiyah-Hitchin metric の一般解は

$$f = -\frac{b}{2r}, \quad w_1 := \frac{1}{4}bc, \quad w_2 := \frac{1}{4}ca, \quad w_3 := \frac{1}{4}ab \tag{4.29}$$

$$r = 2K(\sin \frac{1}{2}\beta), \quad \pi \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \pi \tag{4.30}$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau (1 - k^2 \sin^2 \tau)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.31}$$

とおくと,<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}
w_1 &= -\sin \beta \cdot r \frac{dr}{d\beta} - \frac{1}{2}(1 + \cos \beta)r^2 \\
w_2 &= -\sin \beta \cdot r \frac{dr}{d\beta} \\
w_3 &= -\sin \beta \cdot r \frac{dr}{d\beta} - \frac{1}{2}(1 - \cos \beta)r^2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

となる [19].  $a, b, c$  の  $r$  依存性は図 2 のようになる :

<sup>13</sup> $a = b$  であることからさらに余分な対称性  $U(1)$  が加わる. 従って Taub-NUT metric の対称性は全て合わせて  $U(2)$  である.

<sup>14</sup> $f$  は普通  $f = abc$  ととるが, ここでは [19] に従った.

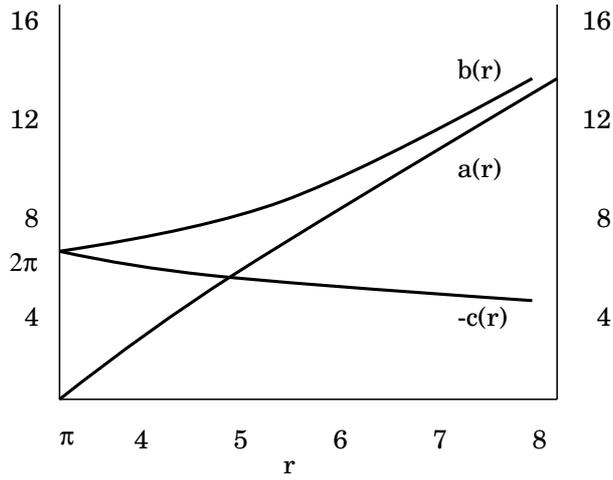


図 2: Atiyah-Hitchin metric における  $a, b, c$  の  $r$  依存性

また,  $r$  大における  $a, b, c$  の漸近形は

$$\begin{aligned}
 a &\approx 2r \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} - 8r^2 \left(1 - \frac{1}{2r^2}\right) e^{-r} + \dots \\
 b &\approx 2r \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + 8r^2 \left(1 - \frac{2}{r} - \frac{1}{2r^2}\right) e^{-r} + \dots \\
 c &\approx -4 \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

となる. ただし ( $r$  の多項式)  $\times e^{-2r}$  の項を無視した. これより,  $r \rightarrow \infty$  で  $a$  と  $b$  の差は exponentially にゼロに近づき,

$$a \approx b \approx 2r \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad c \approx -4 \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \approx - \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.34}$$

となって, Atiyah-Hitchin metric の漸近形は

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + 4 \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1} (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 \tag{4.35}$$

となる. これは, 「質量」<sup>15</sup> が  $-1$  の Taub-NUT metric である. すなわち, Atiyah-Hitchin metric は  $r \rightarrow \infty$  で exponentially に Taub-NUT metric に近づく. なお, Atiyah-Hitchin metric は至るところ smooth であるが, 「質量」が  $-1$  の Taub-NUT metric は  $r = 2$  に特異点を持つ ([16] 253 ページ).

Atiyah-Hitchin 多様体において,

$$(\theta, \phi, \psi) \sim (\pi - \theta, \pi + \phi, -\psi) \tag{4.36}$$

の同一視を行ったものが Atiyah-Hitchin 多様体の二重被覆空間であり, これも non-singular である.

<sup>15</sup>式 (4.46) の  $m$  のことである.

なお, Atiyah-Hitchin 多様体は重心座標の自由度と gauge 変換の自由度を除いた  $G = SU(2)$  2-monopole moduli 空間を表す. 一般に  $G = SU(2)$   $k$ -monopole moduli 空間  $\mathcal{M}_k$  は次のような構造を持つ:

$$\mathcal{M}_k = \mathbf{R}^3 \times \frac{S^1 \times \widetilde{\mathcal{M}}_k^0}{\mathbf{Z}_k} \quad (4.37)$$

ただし,  $\mathbf{R}^3$  は  $k$ -monopole の重心座標の自由度を,  $S^1$  は Higgs 場の生成する  $U(1)$  gauge 変換の自由度を表し,  $\widetilde{\mathcal{M}}_k^0$  は実  $4k - 4$  次元の hyperkähler 多様体である.

### 4.3 Nuts and Bolts

metric の特異点の中に, nuts あるいは bolts と呼ばれるものがある. これについて解説する. まず, 次の形の metric を考える:

$$ds^2 = d\tau^2 + a(\tau)^2 \sigma_x^2 + b(\tau)^2 \sigma_y^2 + c(\tau)^2 \sigma_z^2 \quad (4.38)$$

この metric の  $\tau = 0$  の近傍の振る舞いを調べる.

- Nut Singularity

$\tau = 0$  の近傍で metric が

$$a^2 = b^2 = c^2 = \tau^2 \quad (4.39)$$

のように振る舞うとき, この metric は  $\tau = 0$  に nut singularity を持つという. このとき, metric は,

$$ds^2 = d\tau^2 + \tau^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \quad (4.40)$$

なるが, これは  $\mathbf{R}^4$  の座標を極座標表示したものであり, nut singularity は座標特異点である.

nut singularity が一つあるごとに Euler 数が  $+1$  ずつ count される.

- Bolt Singularity

$\tau = 0$  の近傍で metric が

$$a^2 = b^2 \neq 0, \quad c^2 = n^2 \tau^2, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (4.41)$$

のように振る舞うとき, この metric は  $\tau = 0$  に bolt singularity を持つという. このとき, metric は,

$$ds^2 = d\tau^2 + \frac{a^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{1}{4}n^2 \tau^2 d\psi^2 \quad (4.42)$$

となるが, 右辺第 2 項は  $S^2$  (角度座標は  $\theta, \phi$ ) を表している. また,  $\theta = \phi = \text{const.}$  の面における metric は

$$ds^2|_{S^2} = d\tau^2 + \frac{1}{4}n^2 \tau^2 d\psi^2 \quad (4.43)$$

となるので,  $\frac{1}{2}n\psi$  が角度変数とみなせる場合 (すなわち  $\frac{1}{2}n\psi$  が  $2\pi$  の周期を持つ場合), この metric は  $\mathbf{R}^2$  を表しており, bolt singularity は座標特異点となる.

bolt singularity が一つあるごとに Euler 数が  $+2$  ずつ count される.

## 4.4 Examples

具体例について調べる.

- Taub-NUT metric

式 (4.22),(4.23) の  $\lambda = 1, a = b$  の解は,

$$f = \frac{1}{2}abc, \quad a^2 = b^2 = \frac{1 + 4m^2r}{4m^2r^2}, \quad c^2 = \frac{4m^2}{1 + 4m^2r} \quad (4.44)$$

であり,

$$r \longrightarrow \frac{1}{2m(r - m)} \quad (4.45)$$

の変数変換を行うと, Taub-NUT metric の極座標表示が得られる :

$$\begin{aligned} ds_{TN}^2 &= \frac{1}{4} \frac{r+m}{r-m} dr^2 + (r^2 - m^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + 4m^2 \frac{r-m}{r+m} \sigma_z^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{r+m}{r-m} dr^2 + \frac{1}{4}(r^2 - m^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + m^2 \frac{r-m}{r+m} (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

ただし  $r \geq m, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \psi < 4\pi$

$r = m$  でこの metric は発散している.  $r = m + \epsilon$  としてこの特異点近傍を調べる. metric は

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{2} (d\tau^2 + \tau^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)) \\ \tau &:= \sqrt{2m\epsilon} \end{aligned} \quad (4.47)$$

のように漸近するので,  $r = m$  は nut singularity であり, 座標特異点であることが分かる.

なお,  $r \gg m$  のとき, metric は

$$ds^2 \approx \frac{1}{4} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (2m)^2(d\psi + \cos \theta d\phi)^2) \quad (4.48)$$

となり,  $\mathbf{R} \times S^2 \times S^1 \simeq \mathbf{R}^3 \times S^1$  の形をしていることが分かる. つまり Taub-NUT 空間の無限遠は  $S^3$  になっている (図 3 参照). Taub-NUT 空間の Euler 数は 1 である.

- Eguchi-Hanson metric

式 (4.22),(4.23) においてまず  $r \rightarrow -r$  と変換して, 式 (4.23) の左辺に負号を出した方程式 (ただし  $\lambda = 0, a = b$ ) の解は,

$$f = \frac{1}{2}abc, \quad a^2 = b^2 = m^2 \cosh(m^2r), \quad c^2 = \frac{2m^2}{\sinh(2m^2r)} \quad (4.49)$$

であり,

$$r \longrightarrow \frac{1}{m^2} \coth^{-1} \left( \frac{r^2}{m^2} \right) \quad (4.50)$$

の変数変換を行うと, Eguchi-Hanson metric の極座標表示が得られる :

$$\begin{aligned} ds_{EH}^2 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{r}\right)^4} dr^2 + r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (1 - \left(\frac{m}{r}\right)^4)\sigma_z^2) \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{r}\right)^4} dr^2 + \frac{r^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{r^2}{4}\left(1 - \left(\frac{m}{r}\right)^4\right)(d\psi + \cos \theta d\phi)^2 \end{aligned}$$

ただし  $r \geq m, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$

となる.  $r = m$  でこの metric は発散している.  $\theta = \phi = \text{const.}$  として  $r \simeq m$  の振る舞いを調べると, metric は

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4}(du^2 + u^2 d\psi^2) \\ u &:= r\sqrt{1 - \left(\frac{m}{r}\right)^4} \end{aligned} \quad (4.51)$$

となり,  $r = m$  は bolt singularity になっていることが分かる. したがって  $\psi$  が  $2\pi$  の周期を持てばこの特異点は座標特異点となる.

なお multi-ALE 空間 ( $A_{k-1}$  型) の無限遠は  $m = 1$  の lens 空間  $L(k, 1)$  になっており,<sup>16</sup> Eguchi-Hanson 空間の無限遠は  $L(2, 1) \approx S^3/\mathbf{Z}_2 \approx \mathbf{RP}^3$  である (図 3 参照). Eguchi-Hanson 空間の Euler 数は 2 である.

- 2次元複素射影空間  $\mathbf{CP}_2$

$n$ 次元複素射影空間  $\mathbf{CP}_n$  は Kähler 多様体であり, Kähler potential は

$$K = \log(1 + z^i \bar{z}^i) \quad (4.52)$$

である. 式 (2.5) より,  $\mathbf{CP}_2$  の metric は,

$$ds_{\mathbf{CP}_2}^2 = \frac{1}{(1+r^2)^2} dr^2 + \frac{r^2}{1+r^2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{r^2}{(1+r^2)^2} \sigma_z^2 \quad (4.53)$$

となる.  $r = 0$  は明らかに nut singularity になっており, 座標特異点である. 一方  $r \rightarrow \infty$  では  $\theta, \phi$  を固定すると,

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + \frac{1}{4}u^2 d\psi^2 \\ u &:= \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.54)$$

となり, bolt singularity になっていることが分かる. したがって  $\psi$  が  $4\pi$  の周期を持てばこの特異点は座標特異点となる (図 3 参照). 2次元複素射影空間  $\mathbf{CP}_2$  の Euler 数は  $1 + 2 = 3$  である.

<sup>16</sup>一般の lens 空間は  $L(k, m) := S^3(= \partial \mathbf{C}^2)/((z_1, z_2) \sim (e^{2\pi i/k} z_1, e^{2\pi i m/k} z_2))$  で定義される.

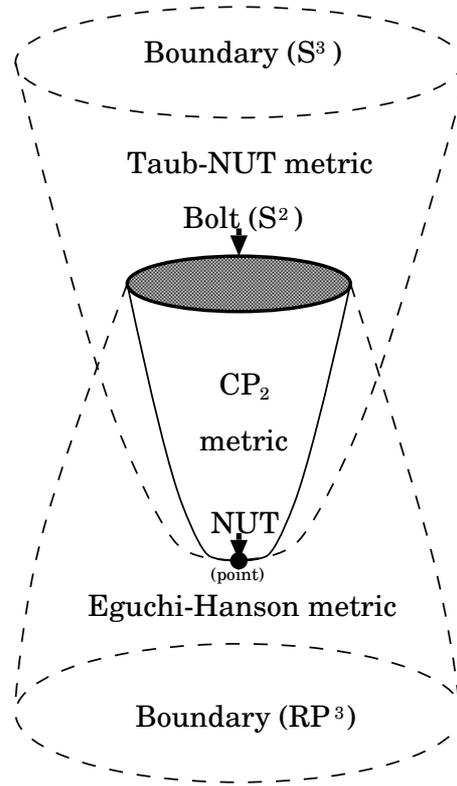


図 3: Nuts and Bolts of Taub-NUT, Eguchi-Hanson and  $CP_2$

- Atiyah-Hitchin metric

Atiyah-Hitchin metric は  $r = \pi$  に特異性がある.  $r \simeq \pi$  近傍での振る舞いを調べる. このとき

$$f \simeq -1, \quad a \simeq 2(r - \pi), \quad b \simeq \pi, \quad c \simeq -\pi \quad (4.55)$$

となる. また,

$$\tilde{r} = r - \pi \quad (4.56)$$

$$e^{\frac{i}{2}\tilde{\phi}\sigma^1} e^{\frac{i}{2}\tilde{\theta}\sigma^3} e^{\frac{i}{2}\tilde{\psi}\sigma^1} = e^{\frac{i}{2}\phi\sigma^3} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^2} e^{\frac{i}{2}\psi\sigma^3} \quad (4.57)$$

の変数変換を行うと,

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + 4\tilde{r}^2(d\tilde{\psi} + \cos\tilde{\theta}d\tilde{\phi}) + \pi^2(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\phi}^2) \quad (4.58)$$

となる. 右辺第 3 項は半径  $\pi$  の 2 次元球面  $S^2$  を表す. また,  $\tilde{\theta}, \tilde{\phi}$  を fix すると,

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + 4\tilde{r}^2d\tilde{\psi}^2 \quad (4.59)$$

となり, Bolt singularity になっていることが分かる. したがって,  $\tilde{\psi}$  が周期  $\pi$  を持てばこの特異点は座標特異点となる.

## 5 Hyperkähler Quotient Construction of Moduli Spaces

ここでは, G.Gibbons, R.Goto, P.Rychenkova によって与えられた, hyperkähler quotient による metric の導出法について紹介する. これらの metric はさまざまな multi-monopole moduli の例になっている.

まず, ここで考える群作用と moment map についてまとめておく.  $(M, I, J, K, \bar{\omega}, g)$  を hyperkähler 多様体とし, Lie 群  $G$  が hyperkähler 構造を保ちながら作用しているとする. このとき moment map  $\bar{\mu} : M \rightarrow \mathcal{G}^* \otimes \mathbf{R}^3$  が定まり, hyperkähler quotient  $\bar{\mu}^{-1}(0)/G$  は hyperkähler 多様体となる. この空間の metric を導出する.

まずは,  $M = \mathbf{H}$  とする.  $\mathbf{H}$  の座標を  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  と表す.  $\mathbf{H}$  の metric は

$$ds^2 = dqd\bar{q} \quad (5.1)$$

と表される. また, Kähler form は

$$-\frac{1}{2}dq \wedge d\bar{q} = i\omega_1 + j\omega_2 + k\omega_3 \quad (5.2)$$

となる.

ここで,  $M$  に対する群作用として次の2つのものを考える.

- $G = \mathbf{R}$  : 並進  $q \rightarrow q + t, \quad t \in \mathbf{R}$

このとき moment map は

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) \quad (5.3)$$

となる. 群作用は free である.

- $G = U(1)$  : 右からの circle action  $q \rightarrow qe^{it}, \quad t \in (0, 2\pi]$  このとき moment map は

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}qi\bar{q} \quad (5.4)$$

となる. 群作用は原点以外で free であり, moment map は fiber が  $S^1$  であるような Riemann submersion  $\mathbf{R}^4 - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{0\}$  を与える.

またここで, metric (5.1) の書き換えを行っておく. 任意の四元数  $q$  は

$$q = ae^{\frac{i}{2}\psi}, \quad \psi \in (0, 4\pi], \quad a = -\bar{a} \quad (5.5)$$

と表すことができる. このとき,  $U(1)$  action  $q \rightarrow qe^{it}$  は

$$\psi \rightarrow \psi + 2t \quad (5.6)$$

となり, moment map (5.4) は

$$\mathbf{r} = qi\bar{q} = ai\bar{a} = -aia \quad (5.7)$$

という3つの座標を定める.<sup>17</sup>

この座標  $(\psi, \mathbf{r})$  を用いると, metric (5.1) は

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} d\mathbf{r}^2 + r(d\psi + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r})^2 \right) \quad (5.8)$$

$$\text{ただし} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (5.9)$$

となる.

次に今の議論を  $M = \mathbf{H}^m$  の場合に拡張する. tri-holomorphic な  $T^m$  作用の下不変な hyperkähler 多様体の metric は, 次のように表される [48] :

$$ds^2 = \frac{1}{4} G_{pq} d\mathbf{r}^p d\mathbf{r}^q + \frac{1}{4} G^{pq} (d\tau_p + \mathbf{A}_{pr} \cdot d\mathbf{r}^r) (d\tau_q + \mathbf{A}_{qs} \cdot d\mathbf{r}^s) \quad (5.10)$$

ただし,  $p, q, r, s \dots = 1, \dots, m$  である. Killing vector 場  $\frac{\partial}{\partial \tau_p}$  が  $T^m$  作用を生成する.  $G_{pq}$  と  $\omega_{pq}$  とはある線型微分方程式によって関連づけられているので  $G_{pq}$  を求めれば, この metric が求まることになる.  $G_{pq} = \frac{\delta_{pq}}{r_p}$  (no sum) のとき上記の metric は flat metric に一致する.

この metric を出発点にして, 様々な moment map の組合せにより, 様々な hyperkähler quotient の metric を導出することができる.

結果は次の通りである :

hyperkähler quotient (下段 : 対応する monopole)	$M$ (座標)	群作用
Taub-NUT $SU(3) \rightarrow U(1)^2$	$\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ $(q, w)$	$q \rightarrow qe^{it}, \quad t \in \mathbf{R}$ $w \rightarrow w + \lambda t, \quad \lambda \in \mathbf{R}$ (parameter)
Lee-Weinberg-Yi [35]	$\mathbf{H}^m \times \mathbf{H}^m$ $(q_p, w_p)$	$q_p \rightarrow q_p e^{it_p}$ (no sum), $t_p \in \mathbf{R}$ $w_p \rightarrow w_p + \lambda_p^q t_q, \quad \lambda_p^q \in \mathbf{R}$ (parameter)
Calabi [7]	$\mathbf{H}^{m+1} \ni q_p$	$q_p \rightarrow q_p e^{it}, \quad t \in (0, 2\pi]$
Taubian-Calabi [49] $SU(4) \rightarrow SU(2) \times U(1)^2$	$\mathbf{H}^m \times \mathbf{H}$ $(q_p, w)$	$q_p \rightarrow q_p e^{it}$ $w \rightarrow w + t, \quad t \in \mathbf{R}$
$A_m$ 型 ALE (multi-EH)	$\mathbf{H}^m \times \mathbf{H}$ $(q_p, q)$	$q_p \rightarrow q_p e^{it_p}$ (no sum) $q \rightarrow q e^{i(t_1 + \dots + t_m)}$
$A_m$ 型 ALF (multi-TN)	$\mathbf{H}^m \times \mathbf{H}$ $(q_p, w)$	$q_p \rightarrow q_p e^{it_p}$ (no sum) $w \rightarrow w + t, \quad t \in \mathbf{R}$
Gibbons-Manton [19]	$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}m(m+1)} \times \mathbf{H}^m$ $(q_{pq}, w_p), \quad p < q$	$q_{pq} \rightarrow q_{pq} e^{it_{pq}}$ $w_p \rightarrow w_p + \sum_r t_{pr}$

monopole は破れた gauge 対称性に  $U(1)$  が含まれていれば存在する.<sup>18</sup>

このうちいくつかの例について実際に導出する.

<sup>17</sup> $a = x_1 i + x_2 j + x_3 k$  のとき,  $\mathbf{r} = (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)i + 2x_1 x_2 j + 2x_1 x_3 k$  である.

<sup>18</sup>gauge 群  $G$  が自発的に群  $H$  に破れたとき, monopole の存在条件は  $\pi_2(G/H) \neq 0$  であるが,  $G$  が単連結の場合は homotopy 完全系列より  $\pi_1(H) \simeq \pi_2(G/H)$  であることが分かり, 結局  $\pi_1(H) \neq 0$  が monopole の存在条件となる.  $H$  に  $U(1)$  が含まれていれば  $\pi_1(U(1)) \simeq \mathbf{Z}$  より monopole の存在が言える.

### Taub-NUT metric

上記の群作用に対する, moment map は,

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{1}{2}qi\bar{q} + \frac{\lambda}{2}(w - \bar{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{r} + \lambda\mathbf{y} \\ \text{ただし } w &= y + \mathbf{y}, \quad y \in \mathbf{R}\end{aligned}\tag{5.11}$$

となる.  $\mathcal{M}$  の flat metric (5.1) は

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\lambda} d\mathbf{r}^2 + r(d\psi + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r})^2 \right) + dy^2 + d\mathbf{y}^2\tag{5.12}$$

である. 上記の群作用は  $(\psi, y)$  に対しては,

$$(\psi, y) \rightarrow (\psi + 2t, y + \lambda t)\tag{5.13}$$

と書ける. よって,  $\tau = \psi - \frac{2y}{\lambda}$  を不変に保つことが分かる.  $\vec{\mu} = 0$  は  $\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{r}}{2\lambda}$  で与えられるので,  $\vec{\mu}^{-1}(0)$  の metric は,

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} d\mathbf{r}^2 + r(d\tau + \frac{2}{\lambda} dy + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r})^2 \right) + dy^2 + \frac{1}{4\lambda^2} d\mathbf{r}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda^2} \right) d\mathbf{r}^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (d\tau + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r})^2 \\ &\quad + \left( \frac{r}{\lambda^2} + 1 \right) \left( dy + \frac{r\lambda}{2 \left( \frac{r}{\lambda^2} + 1 \right)} (d\tau + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) \right)^2\end{aligned}\tag{5.14}$$

となる.  $\vec{\mu}^{-1}(0)$  の metric 得るには, これを Killing vector 場  $\frac{\partial}{\partial y}$  に直交する方向に射影すればよいから,

$$ds_{Taub-NUT}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda^2} \right) d\mathbf{r}^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda^2} \right)^{-1} (d\tau + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r})^2\tag{5.15}$$

が得られる. これは標準的な「正質量」の Taub-NUT metric の形をしている (質量  $m = \frac{\lambda^2}{2}$ ).

## 6 Legendre Transform Construction of Moduli Spaces

この section では, Legendre 変換を用いた hyperkähler metric の構成法を議論する.  $M = \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^n$  とし, 座標を  $(x^i, z^i)$  と表す. 次の 2 階線形微分方程式

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right) F = 0\tag{6.1}$$

を考える. これは  $3n$  次元 Laplace 方程式である. この方程式の一般解は

$$F(x^i, z^i, \bar{z}^i) = \operatorname{Re} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\zeta}{2\pi i} G(\eta^i(\zeta), \zeta)\tag{6.2}$$

$$\eta^i = z^i - \zeta x^i - \zeta^2 \bar{z}^i\tag{6.3}$$

で与えられる.

いまこの  $F(x^i, z^i, \bar{z}^i)$  を変数  $x^i$  について Legendre 変換することを考える:

$$K(u^i, \bar{u}^i, z^i, \bar{z}^i) = F(x^i, z^i, \bar{z}^i) - (u^i + \bar{u}^i)x^i \quad (6.4)$$

ただし,  $x^i$  は  $z^i, \bar{z}^i, u^i + \bar{u}^i$  の関数で

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = u^i + \bar{u}^i \quad (6.5)$$

を満たす. こうして得られた,  $K(u^i, \bar{u}^i, z^i, \bar{z}^i)$  は  $4n$  次元の hyperkähler 多様体の Kähler potential になっている. metric および symplectic 構造は

$$\frac{1}{2}ds^2 = K_{u^i \bar{u}^j} du^i d\bar{u}^j + K_{u^i \bar{z}^j} du^i d\bar{z}^j + K_{z^i \bar{u}^j} dz^i d\bar{u}^j + K_{z^i \bar{z}^j} dz^i d\bar{z}^j \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{2}\omega^1 = i(K_{u^i \bar{u}^j} du^i \wedge d\bar{u}^j + K_{u^i \bar{z}^j} du^i \wedge d\bar{z}^j + K_{z^i \bar{u}^j} dz^i \wedge d\bar{u}^j + K_{z^i \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j)$$

$$\frac{1}{4}\omega^+ = du^i \wedge dz^i - (K_{u^i \bar{u}^j})^{-1} K_{\bar{u}^j z^k} dz^i \wedge dz^k \quad (6.7)$$

$$\omega^- = (\omega^+)^{\dagger}$$

ただし,

$$K_{u^i \bar{u}^j} = -(F_{x^j x^i})^{-1}, \quad K_{u^i \bar{z}^j} = -(F_{x^k x^i})^{-1} F_{x^k \bar{z}^j}$$

$$K_{z^i \bar{z}^j} = -(F_{x^i x^j} + F_{z^i x^k} (F_{x^l x^k})^{-1} F_{x^l \bar{z}^j})$$

$$2du^i = F_{x^i x^j} dx^j + F_{x^i z^j} dz^j + F_{x^i \bar{z}^j} d\bar{z}^j + idy^i$$

となる.

4次元で具体例を構成する.  $G(\eta, \zeta)$  として,

$$G_1 = -\frac{1}{2\zeta^3} \eta^2, \quad G_2 = \frac{1}{\zeta^2} \eta \log \eta \quad (6.8)$$

をとる. ただし,  $G_1, G_2$  に対応する積分路は図 4 の通りである.

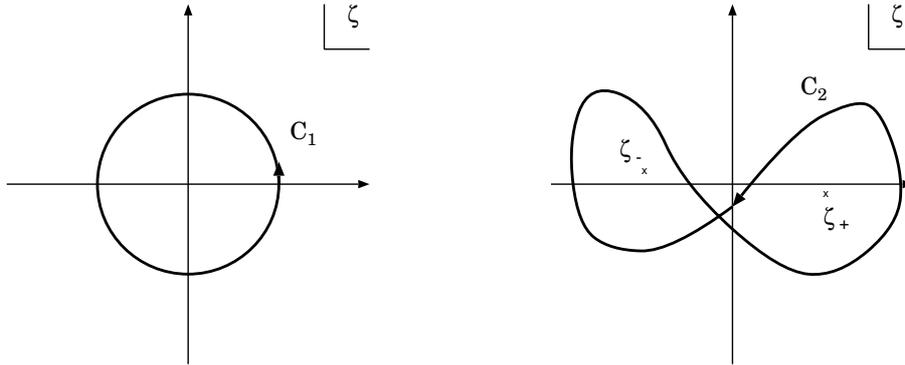


図 4:  $G_1, G_2$  に対応する積分路

また,

$$r^2 = x^2 + 4z\bar{z} \quad (6.9)$$

$$\eta = -\bar{z}(\zeta - \zeta_+)(\zeta - \zeta_-) \quad (6.10)$$

$$\zeta_{\pm} = -\frac{1}{2\bar{z}}(x \pm r) \quad (6.11)$$

である. このとき Legendre 変換をして得られた  $F_1, F_2$  は

$$F_1 = -\frac{1}{2}x^2 + z\bar{z} \quad (6.12)$$

$$F_2 = r - x \log(x+r) + \frac{1}{2}x \log(4z\bar{z}) \quad (6.13)$$

となる. この  $F_1, F_2$  のさまざまな組合せにより, 具体的な metric を書き下すことができる. 結果は,

$$\text{Eguchi-Hanson} : F_{\text{EH}} = \sum_{i=1}^{k+1} F_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}^i) \quad (6.14)$$

$$\text{Taub-NUT} : F_{\text{TN}} = F_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^k F_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}^i) \quad (6.15)$$

である. より高い次元についても例えば,

$$\text{Calabi} : F_{\text{Ca}} = \sum_{i=1}^k F_2(\mathbf{r}^i) + F_2\left(\mathbf{r} - \sum_{i=1}^k \mathbf{r}^i\right) \quad (6.16)$$

のように  $F_1$  と  $F_2$  の適当な組み合わせによって metric を構成することができる. hyperkähler quotient による構成法と非常に類似した形になっている.

### Notes

Legendre 変換は U.Lindström and M.Roček によって一般化され [36], Atiyah-Hitchin metric も書き下されている [30]. さらに最近, Cherkis-Hitchin により, D 型の ALF 空間の計量も求められた [9].

## 7 Relation to Integrable Systems

可積分系<sup>19</sup> との関連を視野に入れ, Lax pair という formalism について解説する. Lax pair とは,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = [A, B] \quad (7.1)$$

を満たす演算子の pair  $(A, B)$  のことである. またこの方程式を Lax 方程式という. このとき線形方程式系,

$$A\psi = \lambda\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -B\psi, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0 \quad (7.2)$$

は Lax 方程式を与える. 例えば, KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (7.3)$$

の Lax pair 表示は

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \quad B = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.4)$$

<sup>19</sup>ここで取り扱っている話題に関連する可積分系の短くて読みやすい本として [28] がある.

である.

Lax 方程式より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \text{Tr}(A^N) &= \text{Tr}(N[A, B]A^{N-1}) = N \text{Tr}(ABA^{N-1} - BA^N) \\ &= N \text{Tr}(BA^N - BA^N) = 0, \quad \forall N \in \mathbf{Z}\end{aligned}\quad (7.5)$$

となるので, 無限個の保存量の存在が言える. これは可積分系の1つの特徴である.

前の subsection では, 四元数 vector 空間  $\mathbf{H}^n$  を3種類の「虚数単位」 $i, j, k$  (以下複素構造と呼ぶ) それぞれから3つの moment map を導出した. ここでは,  $j, k$  をまとめて扱うことを考える. 四元数の「虚数部分」を

$$\text{Im } \mathbf{H} = \{x_1 i + x_2 j + x_3 k \mid x_i \in \mathbf{R}\} \quad (7.6)$$

と書く.

$$(x_1 i + x_2 j + x_3 k)^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot 1 \quad (7.7)$$

であるから,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  のとき,  $(x_1 i + x_2 j + x_3 k)$  が複素構造となる. 言い替えると, 2次元球面の各点が  $\mathbf{H}^n$  の複素構造を定めている.

この2次元球面を Riemann 球面として扱い, Riemann 球面の座標として  $\zeta$  を導入する.  $\zeta$  により定まる  $\mathbf{H}^n$  の複素構造を  $I_\zeta$  と書く. このとき  $\zeta$  と  $x_1, x_2, x_3$  との関係は,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{1 - \zeta \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}}, \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}}, \frac{i(\zeta - \bar{\zeta})}{1 + \zeta \bar{\zeta}} \right) \quad (7.8)$$

である. よって,  $\mathbf{H}^n$  の複素構造  $I_\zeta$  は,

$$I_\zeta = \frac{1 - \zeta \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}} i + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + \zeta \bar{\zeta}} j + \frac{i(\zeta - \bar{\zeta})}{1 + \zeta \bar{\zeta}} k \quad (7.9)$$

となる. これより,

$$\{z^i - \zeta \bar{w}^i, w^i + \zeta \bar{z}^i\} \quad (7.10)$$

が, この複素構造  $I_\zeta$  に対応する複素座標であることが分かる.

$$x_0^i + i x_1^i + j x_2^i + k x_3^i = z^i + k w^i \quad (7.11)$$

とおくと, 式 (2.39) は,

$$\begin{cases} \omega_1 = dx_0^i \wedge dx_1^i - dx_2^i \wedge dx_3^i \\ \omega_2 = dx_0^i \wedge dx_2^i - dx_3^i \wedge dx_1^i \\ \omega_3 = dx_0^i \wedge dx_3^i - dx_1^i \wedge dx_2^i \end{cases} \quad (7.12)$$

となる. このとき,

$$dz^i \wedge dw^i = d(x_0^i + i x_1^i) \wedge d(x_3^i + i x_2^i) = \omega_3 + i \omega_2 \quad (7.13)$$

となるので,  $(\omega_3 + i\omega_2)$  が複素構造  $i$  に対応する複素 symplectic 構造であることが分かる.

同様に

$$(dx^i - \zeta d\bar{w}^i) \wedge (dw^i + \zeta d\bar{z}^i) = (\omega_3 + i\omega_2) - 2i\zeta\omega_1 + \zeta^2(\omega_3 - i\omega_2) \quad (7.14)$$

が複素構造  $I_\zeta$  に対応する複素 symplectic 構造であることが分かる.

いま群  $G$  が symplectic 構造  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  を保ちながら,  $\mathbf{H}$  に作用しているとする,

$$\iota(X_\xi)((\omega_3 + i\omega_2) + 2\zeta\omega_1 - \zeta^2(\omega_3 - i\omega_2)) = d\langle(\mu_3 + i\mu_2) + 2\zeta\mu_1 - \zeta^2(\mu_3 - i\mu_2), \xi\rangle \quad (7.15)$$

となり, 複素 moment map は,

$$(\mu_3 + i\mu_2) + 2\zeta\mu_1 - \zeta^2(\mu_3 - i\mu_2) \quad (7.16)$$

となるが, これが全ての  $\zeta$  についてゼロになるというのは,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$  と等価である.

式 (2.44) より,

$$(\mu_3 + i\mu_2)(B) = -2[B_0 + iB_1, B_3 + iB_2] = -2[Z, W] \quad (7.17)$$

等とまとめることができ, moment map 方程式は

$$[Z - \zeta W^\dagger, W + \zeta(Z^\dagger + Z) - \zeta^2 W^\dagger] = 0 \quad (7.18)$$

と書ける.  $B_\mu$  の言葉で書き下すと,

$$[(B_0 + iB_1) + \zeta(B_3 - iB_2), (B_3 + iB_2) + 2i\zeta B_1 + \zeta^2(B_3 - iB_2)] = 0 \quad (7.19)$$

となる. これが moment map 方程式を Lax pair の言葉で表したものである.

具体例として Nahm 方程式を Lax pair の言葉で表す. この場合は,

$$B_0 = \frac{d}{dz} - iT_0, \quad B_1 = -iT_1, \quad B_2 = -iT_2, \quad B_3 = -iT_3 \quad (7.20)$$

であるから, 式 (7.19) は,

$$[(\frac{d}{dz} - iT_0 + T_1) + \zeta(-iT_3 + T_2), (-iT_3 + T_2) + 2\zeta T_1 + \zeta^2(-iT_3 + T_2)] = 0 \quad (7.21)$$

となる. したがって, Nahm 方程式の Lax pair 表示は以下ようになる:

$$\frac{dA}{dz} = [A, B] \quad (7.22)$$

ただし

$$\begin{aligned} A &= (T_2 - iT_3) + 2\zeta T_1 + \zeta^2(T_2 - iT_3) \\ B &= T_1 - iT_0 + \zeta(T_2 - iT_3) \end{aligned} \quad (7.23)$$

## Notes

Bogomol'nyi 方程式についても同様の記述が可能である. それをさらに代数曲線の言葉で表したのが spectral curve と呼ばれるものである. これから monopole の moduli 空間の次元を求めるのは比較的容易である ([26] 33-40 ページ参照).

## 8 3-dimensional Mirror Symmetry

このようにして求めた metric は, 様々な moduli 空間を記述している. 一つの応用例として, 3次元 gauge 理論における真空の moduli の Higgs branch および Coulomb branch の duality (Higgs/Coulomb branch duality) を議論する [29]. この duality は 3次元の mirror symmetry と呼ばれているものである.

まず 3次元  $\mathcal{N} = 4$  gauge 理論を説明する. この理論は 6次元  $\mathcal{N} = 1$  gauge 理論の dimensional reduction によって得られる (4,5,6 方向を dimensional reduction したとする). global な symmetry は  $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$  である (時空を回す global な symmetry  $SU(2)_E$  もあるがここでは考えない). ただし,  $SU(2)_L$  は 6次元から 3次元へ dimensional reduction した際, gauge 場の第 4,5,6 成分から生じた 3つの scalar を回す変換であり,  $SU(2)_R$  は 6次元  $\mathcal{N} = 1$  gauge 理論の  $\mathcal{R}$ -symmetry である. 真空の moduli は hyperkähler 多様体であり, 3つの Kähler form  $\bar{\omega}$  がある. 2つの branch において  $\bar{\omega}$  の変換性は次の通りである:

- Coulomb branch :  $\bar{\omega}$  は  $SU(2)_L$  の adjoint で変換する.
- Higgs branch :  $\bar{\omega}$  は  $SU(2)_R$  の adjoint で変換する.

また, gauge coupling, mass term, FI D-term の  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  についての変換性は次の通りである:

	$SU(2)_L \times SU(2)_R$	量子補正を受ける branch
gauge coupling	$(\mathbf{1} + \mathbf{3}, \mathbf{1})$	Coulomb
mass term	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})$	Coulomb
FI D-term	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})$	Higgs

ここでの主張は, 3次元  $\mathcal{N} = 4$  gauge 理論に対する dual な理論が P.Kronheimer の論文 [32] に起源を持つ quiver gauge 理論であり,

	3次元 $\mathcal{N} = 4$ gauge 理論	$\leftarrow$ dual $\rightarrow$	quiver gauge 理論
(i)	$SU(2)_L$	$\leftrightarrow$	$SU(2)_R$
(ii)	$SU(2)_R$	$\leftrightarrow$	$SU(2)_L$
(iii)	Coulomb branch	$\leftrightarrow$	Higgs branch
(iv)	Higgs branch	$\leftrightarrow$	Coulomb branch
(v)	mass term	$\leftrightarrow$	FI D-term
(vi)	FI D-term	$\leftrightarrow$	mass term

が成り立つということである. (ii)(iii) から, 解析が困難な Coulomb branch での量子効果が, 解析が容易な dual な理論の Higgs branch での古典効果から分かる.

具体的には,

3次元 $\mathcal{N} = 4$ gauge 理論	$\leftarrow$ dual $\rightarrow$	quiver gauge 理論
$G = U(1)$ with $n$ hypermultiplets	$\leftrightarrow$	$K_{A_{n-1}}$ 理論
$G = SU(2)$ with $n$ hypermultiplets	$\leftrightarrow$	$K_{D_n}$ 理論

が成り立つ.

quiver gauge 理論について簡単に説明する.  $G$  を  $A, D, E$  型の Lie 群であるとする.  $K_G$  quiver gauge 理論とは,

$$\begin{aligned} \text{gauge 群} & : K_G = \prod_{i=0}^r U(n_i)/U(1) \quad r := \text{rank } G \\ \text{matter} & : \oplus_{ij} a_{ij}(\mathbf{n}_i, \bar{\mathbf{n}}_j) \end{aligned} \quad (8.1)$$

として構成される理論である.  $n_i, a_{ij}$  は拡大 Dynkin 図から読みとることができる. 具体例を示す.

- $A_r$  型 ( $G = SU(r+1)$ )

拡大 Dynkin 図は図 5 のようになる.

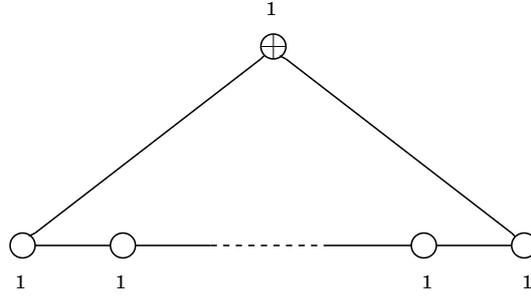


図 5:  $A_r$  型 ( $G = SU(r+1)$ ) の拡大 Dynkin 図

ただし頂点  $\oplus$  は, 普通の Dynkin 図には現れない頂点を表す. 頂点の数は  $\text{rank } G + 1$  と一致するので, この場合頂点の数は  $r + 1$  個である.  $i$  番目の頂点に書かれた数字は  $n_i$  を表す. また,  $a_{ij}$  は  $i$  番目の頂点と  $j$  番目の頂点とが辺で結ばれていれば 1, 結ばれていなければ 0 を表す. すなわち  $a_{ij}$  は各辺上で値 1 をとるものである. よって, 拡大 Dynkin 図の頂点が gauge 群を, 辺が matter を表していると言ってよい.

この場合は

$$\begin{aligned} \text{gauge 群} & : K_G = \underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{r+1 \text{ 個}} / U(1) = U(1)^r, \quad \dim K_G = r \\ \text{matter} & : \oplus_{ij} a_{ij}(\mathbf{n}_i, \bar{\mathbf{n}}_j) = (r+1)(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{1}}) \end{aligned} \quad (8.2)$$

であり, matter (hypermultiplet) の数は  $r + 1$  である. また, FI parameter の数 ( $= K_G$  の  $U(1)$  factor の数) は  $r$  である.

- $D_r$  型 ( $G = SO(2r)$ )

拡大 Dynkin 図は図 6 のようになる.

この場合頂点の数は  $r + 1$  個であり,

$$\begin{aligned} \text{gauge 群} & : K_G = U(1)^4 \times U(2)^{r-3} / U(1) = U(1)^r \times SU(2)^{r-3}, \quad \dim K_G = 4r - 9 \\ \text{matter} & : \oplus_{ij} a_{ij}(\mathbf{n}_i, \bar{\mathbf{n}}_j) = 4(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{2}}) + (r-4)(\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}}) \end{aligned} \quad (8.3)$$

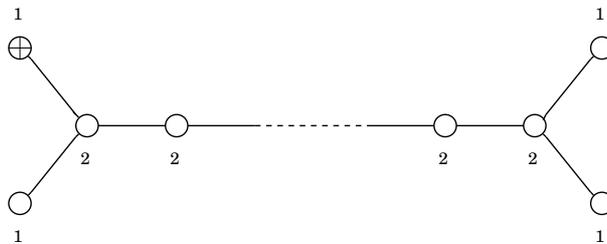


図 6:  $D_r$  型 ( $G = SO(2r)$ ) の拡大 Dynkin 図

である. matter (hypermultiplet) の数は  $4r - 8$  であり, FI parameter の数は  $r$  である.

この duality はそれぞれの mass term の数, FI parameter の数が一致すること, およびそれぞれの Higgs branch, Coulomb branch の moduli 空間の metric が一致することで示される. 3次元  $\mathcal{N} = 4$  gauge 理論の moduli 空間の metric の導出は [50, 51] でなされている. 結果は次の通りである:

3次元 $\mathcal{N} = 4$ gauge 理論 $G = U(1)$ with $n$ -hypermultiplets	$\leftarrow$ dual $\rightarrow$ (下欄は共通点を表す)	quiver gauge 理論 $K_{A_{n-1}}$ gauge 理論
Coulomb branch	multi-Taub-NUT 空間 ( $A_{n-1}$ 型)	Higgs branch
Higgs branch	multi-Eguchi-Hanson 空間 ( $A_{n-1}$ 型)	Coulomb branch
$\sharp$ (mass term)	1	$\sharp$ (FI D-term)
$\sharp$ (FI D-term)	$n - 1$	$\sharp$ (mass term)

## Notes

3次元 mirror symmetry の  $G = SU(N)$  の場合への一般化は G.Chalmers-A.Hanany によってなされた [8]. ここでも moduli 空間の一致が duality の判定に用いられている. また, 3次元 mirror symmetry の D-brane を用いた記述は, J.de Boer-K.Hori-H.Ooguri-Y.Oz-Z.Yin[11] や A.Hanany-E.Witten [25] によって議論されている. 最近では, Alday-Gaiotto-Tachikawa (AGT) 対応 [1] から派生した, 3d/3d 対応の研究でも活躍している ([12] and refs. therein).

## 9 おわりに

以上, Hyper-Kähler 多様体の基礎について議論を行った. 省略した話題も多くあるが, 特に D-brane 配置による ALE 空間および ALF 空間の実現 (Douglas-Moore [14] および Witten[53]) は弦理論の話題としても興味深いものであり, また機会があれば素粒子論研究の電子版にて詳しく議論したい.

**謝辞:** この解説は, 2000年1月に東京大学に提出した著者の修士論文の後半部分に, 若干の加筆・修正を行ったものです. この記事に関連したゼミでお世話になりました, 江口徹先生, 加藤晃史先生, 松尾泰先生に特別感謝を申し上げます. また, 雑誌「素粒子論研究」には, 著者の修士論文の前半部分を掲載していただき, 多くの人の目に触れる機会を与えていただきました. これまで長年にわたり何時も有難う御座居ました. 今後も努めて参りたく存じます. 何卒宜しく願い申し上げます. この記事の作成は, 豊秋奨学会および科学研究費補助金 若手研究 B(#23740182) の経済援助の下行われました.

## 参考文献

- [1] L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, “*Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories*,” *Lett. Math. Phys.* **91** (2010) 167 [0906.3219 [hep-th]].
- [2] M.F.Atiyah, V.G.Drinfeld, N.J.Hitchin and Yu.I.Manin, “*Construction of Instantons*” *Phys. Lett.* **65A** (1978) 185-187
- [3] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz and Yu.S.Tyupkin, “*Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*,” *Phys. Lett.* **59B** (1975) 85-87
- [4] V.A.Belinskii, G.W.Gibbons, D.N.Page and C.N.Pope, “*Asymptotically Euclidean Bianchi IX Metrics in Quantum Gravity*,” *Phys. Lett.* **76B** (1978) 433-435
- [5] M.Atiyah and N.Hitchin, “*The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*” (Princeton Univ. Press ; 1988) [ISBN/0-691-08480-7]
- [6] P.J.Braam and P.van Baal, “*Nahm’s Transformation for Instantons*,” *Commun. Math. Phys.* **122** (1989) 267-280
- [7] E.Calabi (translated by Y.Konishi), “*Kähler Metrics and Holomorphic Bundles*,” *Soryushiron Kenkyu* **105-2** (2002) 27.
- [8] G.Chalmers and A.Hanany, “*Three Dimensional Gauge Theories and Monopoles*,” *Nucl. Phys.* **B489** (1997) 223-244 [hep-th/9608105]
- [9] S. A. Cherkis and N. J. Hitchin, “*Gravitational instantons of type  $D(k)$* ,” *Commun. Math. Phys.* **260** (2005) 299 [hep-th/0310084].
- [10] S.-S.Chern, “*Complex Manifolds without Potential Theory (second edition)*” (Springer-Verlag ; 1995) [ISBN/0-387-90422-0]
- [11] J. de Boer, K. Hori, H. Ooguri, Y. Oz and Z. Yin, “*Mirror symmetry in three-dimensional theories,  $SL(2, Z)$  and  $D$ -brane moduli spaces*,” *Nucl. Phys. B* **493** (1997) 148 [hep-th/9612131].
- [12] T. Dimofte, D. Gaiotto and S. Gukov, “*Gauge Theories Labelled by Three-Manifolds*,” [1108.4389 [hep-th]].
- [13] S.K.Donaldson and P.B.Kronheimer, “*The Geometry of Four-manifolds*” (Oxford Univ. Press ; 1990) [ISBN/0-19-850269-9]
- [14] M.R.Douglas and G.Moore, “*D-branes, Quivers, and ALE Instantons*” [hep-th/9603167]
- [15] 江口 徹 「位相的場の理論とその周辺」 特定領域研究 (B)707 「超対称性理論」 講義録シリーズ **No.2** (1999) Appendix
- [16] T.Eguchi, P.B.Gilkey and A.J.Hanson, “*Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*” *Physics Reports* **66** (1980) 213-393
- [17] T.Eguchi and A.J.Hanson, “*Asymptotically Flat Self-dual Solutions to Euclidean Gravity*,” *Phys. Lett.* **74B** (1978) 249-251

- [18] G.W.Gibbons and S.W.Hawking, “*Gravitational Multi-instantons*,” Phys. Lett. **78B** (1978) 430-432
- [19] G.W.Gibbons and N.S.Manton, ‘*Classical and Quantum Dynamics of BPS Monopoles*’ Nucl. Phys. **B274** (1986) 183-224
- [20] G.W.Gibbons and C.N.Pope, “*The Positive Action Conjecture and Asymptotically Euclidean Metrics in Quantum Gravity*,” Commun. Math. Phys. **66** (1979) 267-290
- [21] G.W.Gibbons, P.Rychenkova and R.Goto<sup>20</sup>, “*Hyperkähler Quotient Construction of BPS Monopole Moduli Spaces*,” Commun. Math. Phys. **186** (1997) 581-599 [hep-th/9608085]
- [22] R.Goto, “*Hyperkähler Manifolds, Monopoles and Legendre Transformation*,” 数理解析研究所講究録 **775** (1992) 44-74
- [23] S.W.Hawking, “*Gravitational Instantons*,” Phys. Lett. **60A** (1977) 81-83
- [24] 浜中 真志, “ADHM/Nahm 構成法とその双対性,” 素粒子論研究 **106-1** (2002-10) 1-60.<sup>21</sup>
- [25] A.Hanany and E.Witten, “*Type IIB Superstrings, BPS Monopoles, and Three-dimensional Gauge Dynamics*,” Nucl. Phys. **B492** (1997) 152-190 [hep-th/9611230]
- [26] N.Hitchin, “*Monopoles, Minimal Surfaces and Algebraic Curves*” Séminaire de Mathématiques Supérieures **105** (Les Presses de l’Université de Montréal ; 1987) [ISBN/2-7606-0801-8]
- [27] N.J.Hitchin, A.Karlhede, U.Lindström and M.Roček, “*Hyperkähler Metrics and Supersymmetry*,” Commun. Math. Phys. **108** (1985) 535-589
- [28] N.J.Hitchin, G.B.Segal and R.S.Ward, “*Integrable Systems : twistors, loop groups, and Riemann surfaces*” (Oxford Univ. Press ; 1999) [ISBN/0-19-850421-7]
- [29] K.Intriligator and N.Seiberg, “*Mirror Symmetry in Three Dimensional Gauge Theories*,” Phys. Lett. **B387** (1996) 513-519 [hep-th/9607207]
- [30] I.T.Ivanov and M.Roček, “*Supersymmetric  $\sigma$ -models, Twistors, and the Atiyah-Hitchin Metric*,” Comm. Math. Phys. **182** (1996) 291-302 [hep-th/9512075]
- [31] R.Jackiw, C.Nohl and C.Rebbi, “*Conformal Properties of Pseudoparticle Configurations*,” Phys. Rev. **D15** (1977) 1642-1646
- [32] P.B.Kronheimer, “*The Construction of ALE Spaces as Hyper-Kähler Quotients*,” J. Diff. Geom. **29** (1989) 665-689
- [33] P.B.Kronheimer and H.Nakajima, “*Yang-Mills Instantons on ALE Gravitational Instantons*,” Math. Ann. **288** (1990) 263-307
- [34] ランダウ・リフシッツ 『場の古典論 (原書第6版)』 (東京図書 ; 1978) [ISBN/4-489-01161-X]

<sup>20</sup>e-print のものには author として R.Goto が加わっていない。内容は e-print のものも Commun.Math.Phys. のものも同じであると思われる。

<sup>21</sup>私が書いた解説記事は、私のホームページ [http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hamanaka/hamanaka.html] から入手可能です。

- [35] K. -M. Lee, E. J. Weinberg and P. Yi, “*The Moduli space of many BPS monopoles for arbitrary gauge groups,*” Phys. Rev. D **54** (1996) 1633 [hep-th/9602167].
- [36] U.Lindström and M.Rocěk, “*New Hyperkähler Metrics and New Supermultiplets,*” Commun. Math. Phys. **115** (1988) 21-29
- [37] A.Maciocia, “*Metrics on the Moduli Spaces of Instantons over Euclidean 4-space,*” Commun. Math. Phys. (1991) 467-482
- [38] L.J.Mason and N.M.J.Woodhouse, “*Integrability, Self-duality, and Twistor Theory*” (Oxford Univ. Press ; 1996) [ISBN/0-19-853498-1]
- [39] 松島 与三 『多様体入門』 数学選書 5 (裳華房 ; 1965) [ISBN/4-7853-1305-6]
- [40] 村上 信吾 『多様体 (第2版)』 共立数学講座 19 (共立出版 ; 1989) [ISBN/4-320-01419-7]
- [41] H.Nakajima, “*Resolutions of Moduli Spaces of Ideal Instantons on  $\mathbf{R}^4$ ,*” in “*Topology, Geometry and Field Theory*” (World Scientific ; 1994) 129-136 [ISBN/981-02-1817-6]
- [42] H.Nakajima, “*Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*” (AMS ; 1999) [ISBN/0-8218-1956-9]
- [43] W. Nahm, “*The construction of all self-dual multimonopoles by the ADHM method,*” in *Monopoles in Quantum Field Theory* ed. by N. S. Craigie, P. Goddard and W. Nahm, (World Sci., 1982) p. 87 [ISBN/9971950294].
- [44] C.Nash, “*Differential Topology and Quantum Field Theory*” (Academic Press ; 1991) [ISBN/0-12-514076-2]
- [45] N.Nekrasov and A.Schwarz, “*Instantons on Noncommutative  $\mathbf{R}^4$ , and  $(2, 0)$  Superconformal Six Dimensional Theory,*” Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689-703 [hep-th/9802068]
- [46] H.Nakajima, “*Monopoles and Nahm’s Equations’* in “*Einstein Metrics and Yang-Mills Connections,*” Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **145** (Dekker ; 1993) 193-211 [ISBN/0-8247-9069-3].
- [47] H. Ooguri and C. Vafa, “*Summing up  $D$  instantons,*” Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3296 [hep-th/9608079].
- [48] H.Pedersen and Y.S.Poon, ‘*Hyper-Kähler Metrics and Generalization of the Bogomolny Equations’* Comm. Math. Phys. **117** (1988) 569-580
- [49] M. Rocek, “*Supersymmetry and Nonlinear Sigma Models,*” Physica **15D** (1985) 75.
- [50] N.Seiberg, ‘*IR Dynamics on Branes and Space-time Geometry’* Phys. Lett. **B384** (1996) 81-85 [hep-th/9606017]
- [51] N.Seiberg and E.Witten, ‘*Gauge Dynamics and Compactification to Three Dimensions’* [hep-th/9607163] in “*The Mathematical Beauty of Physics*” Advanced Series in Mathematical Physics **24** (World Scientific ; 1997) 333-366 [ISBN/9810228074]
- [52] J.Wess and J.Bagger, “*Supersymmetry and Supergravity (second edition)*” (Princeton Univ. Press ; 1992) Appendix C,D [ISBN/0-691-02530-4]

- [53] E. Witten, “*Branes, Instantons, and Taub-NUT Spaces,*” JHEP **0906** (2009) 067 [0902.0948 [hep-th]].