

修士論文

Toric Calabi-Yau 多様体上の
位相的弦理論

信山 竜二*

*E-mail: nobuyama@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

目次

序	5
第 1 章 位相的弦理論	8
1.1 2次元 (2,2) SUSY	8
1.1.1 (2,2) SUSY 代数	9
1.1.2 超場形式	9
1.1.3 Lagrangian	11
1.1.4 Kähler 多様体上のシグマモデル	12
1.2 トポロジカルツイスト	12
1.2.1 理論の構成	13
1.2.2 BRST 変換性	15
1.2.3 moduli への依存性	16
1.2.4 Gromov-Witten 不変量	17
1.3 開弦と Chern-Simons 理論	20
1.3.1 位相的開弦の境界条件	20
1.3.2 instanton at infinity	21
1.3.3 Wilson loop	22
1.3.4 cubic string field theory との関連	23
第 2 章 Chern-Simons 理論	25
2.1 相関関数の計算	25
2.1.1 Wilson loop	26
2.1.2 Heegaard splitting	26
2.1.3 S^3 の分解	27
2.1.4 $\mathcal{H}(\Sigma)$ の性質	29
2.1.5 HOMFLY 多項式	30
2.1.6 S^3 上の分配関数	31
2.2 framing	32
2.2.1 $U(1)$ 部分	32
2.2.2 一般の G の場合	34

2.3	Wilson loop の相関関数	35
2.3.1	knot operator	35
2.3.2	unknot	36
2.3.3	Hopf link	37
2.3.4	応用	38
第 3 章	toric 幾何と conifold transition	40
3.1	toric diagram	40
3.1.1	\mathbb{C} の toric diagram	40
3.1.2	\mathbb{P}^1 の toric diagram	41
3.1.3	\mathbb{C}^3 の toric diagram	42
3.1.4	Calabi-Yau 多様体の構成	45
3.1.5	$\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の toric diagram	47
3.1.6	toric diagram の別の描き方	49
3.2	conifold	50
3.2.1	deformed conifold	51
3.2.2	resolved conifold	52
3.3	toric diagram と conifold transition	53
3.3.1	resolved conifold の toric diagram	53
3.3.2	deformed conifold の toric diagram	56
第 4 章	Gopakumar-Vafa duality	60
4.1	resolved conifold 上の自由エネルギー	60
4.1.1	Gopakumar-Vafa の式の g_s による展開	62
4.2	deformed conifold 上の自由エネルギー	64
4.2.1	't Hooft 展開	64
4.2.2	非摂動効果	66
4.2.3	S^3 上の自由エネルギー	67
4.2.4	摂動項の展開	68
4.2.5	非摂動項の展開	69
4.2.6	resolved conifold との比較	70
4.3	結び目と conifold transition	72
4.3.1	結び目と brane	72
4.3.2	Ooguri-Vafa operator	73
4.3.3	deformed conifold 側の自由エネルギー	75
4.3.4	resolved conifold 側	76
4.3.5	brane の対応	76

4.3.6	resolved conifold 側での自由エネルギー	77
第 5 章	topological vertex	80
5.1	toric Calabi-Yau 多様体上の A-model	80
5.1.1	巻きつき数と表現	80
5.1.2	3 点 vertex	83
5.1.3	brane と framing	84
5.1.4	propagator	86
5.2	vertex の導出	88
5.2.1	\mathbb{C}^3 と conifold transition	89
5.2.2	$C_{R,\bullet,\bullet}$ の導出	91
5.2.3	$C_{R_1,R_2,\bullet}$ の導出	93
5.2.4	C_{R_1,R_2,R_3} の導出	95
結論		99
補遺 A	Wess-Zumino-Witten 模型	100
A.1	理論の構成	100
A.1.1	対称性と保存カレント	100
A.2	Sugawara construction	102
A.3	表現と modular 変換	103
A.3.1	primary state	103
A.3.2	modular 変換性	105
A.3.3	quantum dimension	106
参考文献		113

序

弦理論はこの 20 年で飛躍的な発展を遂げて来た理論であり、特に第 2 次革命以来、弦理論の非摂動的側面への理解は急速に進歩した。しかし、実用的な問題として考えると、摂動論の範囲においてさえ弦理論への理解は未だ不十分であり、例えば適当な Calabi-Yau 多様体中を propagate する string の higher loop の寄与を具体的に計算する、といったような問題は通常の弦理論の摂動的手法では絶望的に困難である。この点で、本修士論文で扱う位相的弦理論ではこのような計算が著しく簡単化され、特に higher loop の寄与なども具体的な値を計算することが出来ることが知られており、位相的弦理論はその発見以来 [1] 精力的に研究されてきた。また、位相的弦理論は特に複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体と非常に相性が良く、Gromov-Witten 不変量、mirror symmetry など Calabi-Yau 多様体の様々な性質を調べる上でも重宝されている [2]。ただし、実際の物理への応用を考えると、位相的弦理論は飽くまで「位相的」弦理論であって、通常の (物理的) 超弦理論とは異なった理論であるため、位相的弦理論で得られた物理量はそのまま現実の物理へとつながるものではない。しかし、位相的弦理論と物理的な弦理論との関連についても様々な研究が為されていて [3, 4]、位相的弦理論で得られた結果の物理的弦理論との対応付けも詳しく調べられている。特に Gopakumar-Vafa による、位相的弦理論と M 理論との対応付け [5, 6] によって Calabi-Yau 多様体の不変量に対する新たな理解が得られ、Calabi-Yau 多様体中の string の higher loop の寄与の計算において大きな発展があった。また位相的弦理論は非摂動的な側面においても物理的弦理論と類似の特徴を兼ね備えており、位相的弦理論における AdS/CFT 対応の類似物である Gopakumar-Vafa duality [7] の発見により、A-model 側で閉弦の位相的弦理論と開弦の位相的弦理論が対応付けられ、また開弦の位相的弦理論は brane 上の Chern-Simons 理論を表す [8] ことから、Chern-Simons 理論 [9] を用いた位相的弦理論の解析が研究された。また、この Gopakumar-Vafa duality を応用して、一般の local toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の振幅を \mathbb{C}^3 上の vertex として計算する、“topological vertex”の値が [10] によって導かれた。この topological vertex を用いることにより、toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の振幅は組み合わせ的に全て計算することが出来、topological vertex は以前に用いられていた手法と比較しても極めて強力である。また Calabi-Yau 多様体上の振幅の topological vertex を用いた計算は、同じ Calabi-Yau 多様体から geometric engineering を用いて得られた理論の振幅と対応付けられることなどを用いて、様々な場面で確かめられ、応用されている。本修士論文ではこの topological vertex の導出を主な目標として、toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の諸相についてレビューを行う。

本修士論文の構成

この修士論文の全体として、[11, 12, 13]などを参考にした。

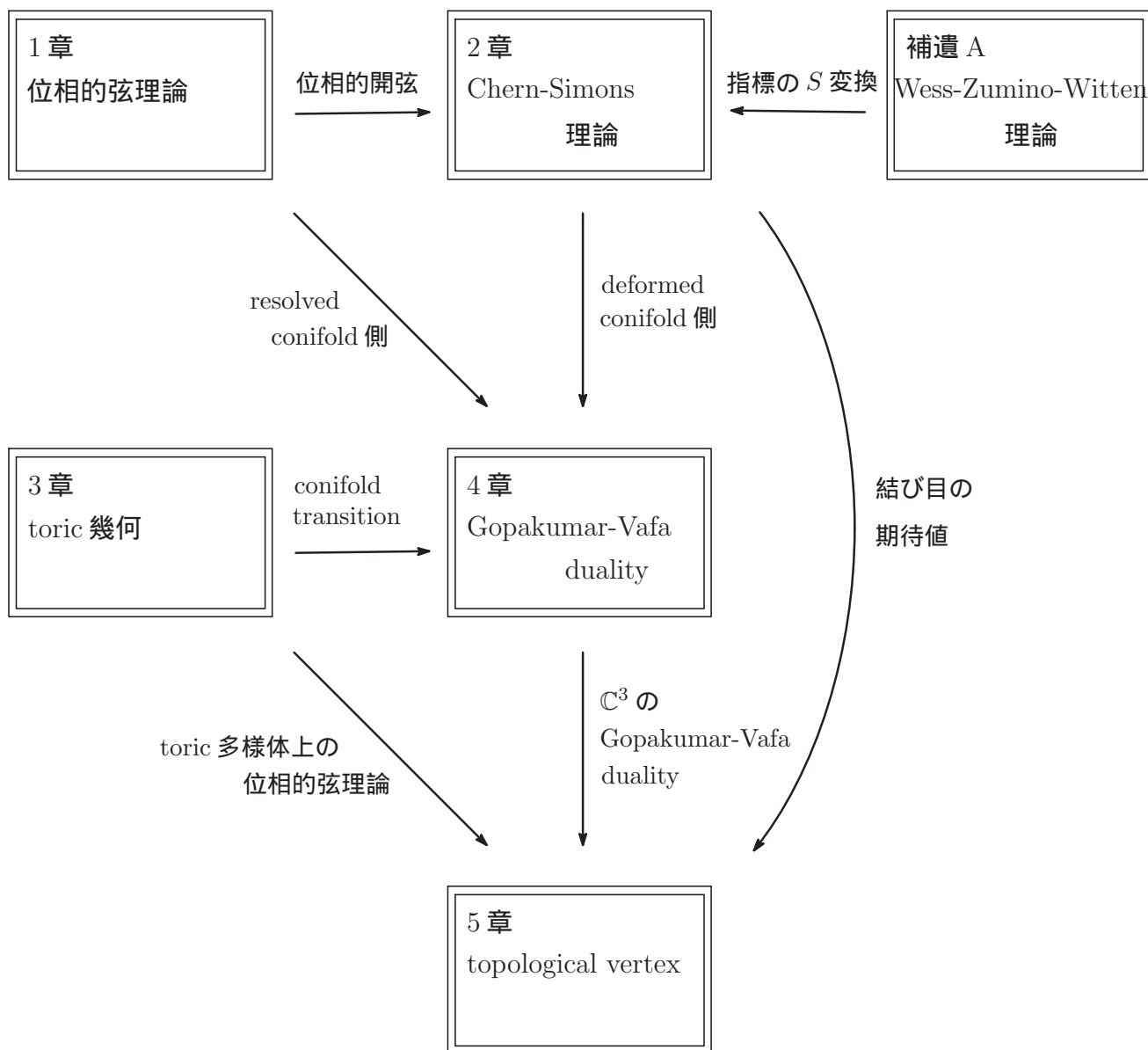
以下に各章の内容を述べる。

- 1章では、位相的弦理論の構成を行いその特徴を調べる。この論文では A-model 側の解析を行うが、A-model の特徴として得られるものは、
 1. worldsheet から target の Calabi-Yau 多様体への正則な写像のみ経路積分に寄与する。
 2. A-model は Calabi-Yau 多様体の complex moduli には依存せず、Kähler moduli の依存性は worldsheet の面積として作用に現れる。
 3. A-model の開弦は境界となる brane 上の Chern-Simons 理論となる。

などである。

- 2章では、A-model の開弦としての応用を踏まえ、Chern-Simons 理論の詳細について調べる。特に knot、Hopf link などの期待値が Wess-Zumino-Witten 理論の指標の変換行列から与えられることを見る。
- 3章では toric 幾何について概説し、Calabi-Yau 多様体の toric 幾何的構成や conifold transition の toric diagram による記述などについて述べる。
- 4章では Gopakumar-Vafa duality を両者の真空の自由エネルギーの比較により示し、また両者に non-compact な brane が含まれている場合の両者の自由エネルギーの一致を示す。
- 5章では Gopakumar-Vafa duality を応用して、一般の local toric Calabi-Yau 多様体に対する topological vertex を Chern-Simons 理論の期待値として導出する。
- 補遺 A では結び目の期待値の計算に用いられる Wess-Zumino-Witten 理論について概説する。

本修士論文の各章間の論理構造を次頁の図に示す。



第1章 位相的弦理論

位相的理論とは、理論に現れる物理量がその理論が定義されている時空の計量 g_{ij} に依存しない理論である。例えば Chern-Simons ゲージ理論 [9]¹ では Lagrangian が 3 次元空間 M 上でゲージ場の接続 A を用いて、

$$\mathcal{L} = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A)$$

と与えられていて、作用に計量が現れないので物理量も M 上の計量に依存しないことがわかる。即ち、ある物理量 $\langle \dots \rangle$ を考えたときに、明らかに、

$$\frac{\delta}{\delta g} \langle \dots \rangle = 0$$

が成り立つ。

一般の位相的理論においては物理量の計量による変分は 0 とはならないが、理論を BRST コホモロジーで表示した場合に BRST exact な量になることが要請される。即ち、BRST charge を Q とすると、 $Q^2 = 0$ であり、更に理論の observable \mathcal{O} は $\{Q, \mathcal{O}\} = 0$ を満たすとする。このとき理論が位相的になるという条件は、ある A が存在してエネルギー運動量テンソル T が

$$T = \{Q, A\}$$

となるという要請と同値である。実際この条件を満たす任意の物理量に対して、

$$\frac{\delta}{\delta g} \langle \dots \rangle \propto \langle T \dots \rangle = \langle \{Q, A\} \dots \rangle = \langle \{Q, A \dots \} \rangle = 0$$

となり理論は位相的になっている。ここで、 $\{Q, \dots\} = 0$ を使った。

1.1 2次元 (2,2) SUSY

ここでは 2 次元 (2,2) SUSY [14] の場合にトポロジカルツイストを用いて [1, 2] 位相的理論を構成する方法を説明する。トポロジカル A-model の構成において target の Ricci 平坦性は必要ない為、この節で target は一般の Kähler 多様体としたが、後の章では殆どの場合で target が Calabi-Yau 多様体を扱い、即ち 2 次元の理論として超共形場理論 (SCFT) となる。世界面としては任意の次数の向き付けられた Riemann 面を考え、その世界面から target の Kähler 多様体への

¹Chern-Simons ゲージ理論については A-model や結び目との関連も含め後の章で詳述する。

写像があるとする。世界面のトポロジーは閉弦に対応した閉じた Riemann 面と、開弦に対応した境界を持つ Riemann 面が考えられるが、境界を持つ場合は 1.3 節で扱うこととし、この節と及び次節では閉じた Riemann 面のみを考えることとする。

1.1.1 (2,2) SUSY 代数

target が Kähler なので世界面上の理論は 2 次元の (2,2) SUSY を持つが、2 次元 (2,2) SUSY の代数は 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 理論 (例えば [15] 参照) から 2 次元縮約して得られる為、4 次元の場合と同様に超場形式やカイラルスーパーフィールドなどの概念を用いることが出来る。ここでは [16, 11] の記述に従い、4 つの super charge を Q_{\pm}, \bar{Q}_{\pm} とし、時空の並進の生成子を H, P 回転の生成子を M 、2 つの R-symmetry $U(1)_V, U(1)_A$ の生成子をそれぞれ F_V, F_A とする。但し $U(1)_V$ は 4 次元の理論の R-symmetry が 2 次元にそのまま残っているもので、 $U(1)_A$ は縮約した 2 次元方向の回転に対応している。これらの代数の満たす (反) 交換関係は、

$$Q_+^2 = Q_-^2 = \bar{Q}_+^2 = \bar{Q}_-^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$\{Q_{\pm}, \bar{Q}_{\pm}\} = H \pm P \quad (1.2)$$

$$\{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = 2Z, \{Q_+, Q_-\} = 2Z^* \quad (1.3)$$

$$\{Q_-, \bar{Q}_+\} = 2\tilde{Z}, \{Q_+, \bar{Q}_-\} = 2\tilde{Z}^* \quad (1.4)$$

$$[M, Q_{\pm}] = \pm iQ_{\pm}, [M, \bar{Q}_{\pm}] = \pm i\bar{Q}_{\pm} \quad (1.5)$$

$$[F_V, Q_{\pm}] = -Q_{\pm}, [F_V, \bar{Q}_{\pm}] = \bar{Q}_{\pm} \quad (1.6)$$

$$[F_A, Q_{\pm}] = \mp Q_{\pm}, [F_A, \bar{Q}_{\pm}] = \pm \bar{Q}_{\pm} \quad (1.7)$$

となる。生成子の Hermite 性は、

$$Q_{\pm}^{\dagger} = \bar{Q}_{\pm} \quad (1.8)$$

と表される。また、 Z, \tilde{Z} は SUSY の central charge であり、 $Z = \tilde{Z} = 0$ とした代数は 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 理論から得られる。 $U(1)_V$ は chiral anomaly に対応しており、chiral anomaly は target の Ricci テンソルに比例する為、 $U(1)_V$ が保存するという条件は、target の多様体が Calabi-Yau であるという条件と同値になる。 Z, \tilde{Z} は $U(1)_V, U(1)_A$ が保存する場合には 0 となるので、以下では簡単の為 Z, \tilde{Z} は常に 0 とする。

1.1.2 超場形式

上でも述べたように (2,2) SUSY 代数は 4 次元の理論とほぼ同じ構造を持つ為 (反) カイラル超場なども同様に定義出来る。但し 4 次元の場合と違うのは左右のカイラリティを独立に選べる為、+ 向き成分が反カイラルで - 向き成分がカイラルであるようなツイストカイラル超場と呼ばれる場が現れる点である。ツイストカイラル超場は、後でトポロジカルツイストを行った理論で A-model の observable を含む場として現れる。

superspace の座標を $x^0, x^1, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm$ ($H = -i\frac{\partial}{\partial x^0}, P = i\frac{\partial}{\partial x^1}$) とすると、supercharge は超場に微分として作用し、

$$Q_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + \frac{i\bar{\theta}^\pm}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \quad \bar{Q}_\pm = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} - \frac{i\theta^\pm}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \quad (1.9)$$

と表される。更にこの supercharge の作用と反交換する微分として、

$$D_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - \frac{i\bar{\theta}^\pm}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \quad \bar{D}_\pm = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} + \frac{i\theta^\pm}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \quad (1.10)$$

が定義し、また以下では、

$$x_\pm \equiv x^0 \pm x^1, \quad \partial_\pm \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right)$$

と表記する。超場 $\mathcal{F}(x, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm)$ に対しての R-symmetry の作用は、

$$e^{i\alpha F_V} \mathcal{F}(x, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = e^{iq_V \alpha} \mathcal{F}(x, e^{-i\alpha} \theta^\pm, e^{i\alpha} \bar{\theta}^\pm) \quad (1.11)$$

$$e^{i\alpha F_A} \mathcal{F}(x, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm) = e^{iq_A \alpha} \mathcal{F}(x, e^{\mp i\alpha} \theta^\pm, e^{\pm i\alpha} \bar{\theta}^\pm) \quad (1.12)$$

となる。但し q_V, q_A はそれぞれ \mathcal{F} の vector と axial の R-charge である。

次に 4 次元の場合と同様にカイラル超場を定義するが、ここでのカイラル超場とは + 向きと - 向きの両方についてカイラルな超場を意味しており、以下では cc 超場と表記する。またツイストカイラル超場は + 向きについてカイラル、- 向きについて反カイラルな場を表し、以下では ac 超場と表記する。

cc 超場 Φ は、

$$\bar{D}_\pm \Phi = 0 \quad (1.13)$$

を満たす場として定義される。 $y^\pm \equiv x^\pm - i\theta^\pm \bar{\theta}^\pm$ と定義すれば、 $\bar{D}_\pm y^\pm = \bar{D}_\pm y^\mp = 0$ となるので、 Φ は $\Phi(y^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm)$ と表される。成分で展開すると、

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi(y^\pm) + \theta^+ \psi_+(y^\pm) + \theta^- \psi_-(y^\pm) + \theta^+ \theta^- F(y^\pm) \\ &= \phi(x^\pm) + \theta^+ \psi_+(x^\pm) + \theta^- \psi_-(x^\pm) + \theta^+ \theta^- F(x^\pm) + \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる。ここで F は複素の補助場であり、 $+\dots$ は ϕ, ψ_\pm の微分を含む項のみからなる。 Φ の Hermite 共役 $\bar{\Phi}$ は aa 超場であり、 $D_\pm \bar{\Phi} = 0$ を満たす。

ac 超場 U は、

$$\bar{D}_+ U = D_- U = 0 \quad (1.15)$$

を満たす場として定義され、 $\tilde{y}^\pm \equiv x^\pm \mp i\theta^\pm \bar{\theta}^\pm$ ($\bar{D}_+ \tilde{y}^\pm = D_- \tilde{y}^\pm = 0$) を用いて $U(\tilde{y}^\pm, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm)$ と表される。成分での展開は、

$$U = v(\tilde{y}^\pm) + \theta^+ \bar{\chi}_+(\tilde{y}^\pm) + \bar{\theta}^- \chi_-(\tilde{y}^\pm) + \theta^+ \bar{\theta}^- G(\tilde{y}^\pm) \quad (1.16)$$

$$= v(\tilde{x}^\pm) + \theta^+ \bar{\chi}_+(\tilde{x}^\pm) + \bar{\theta}^- \chi_-(\tilde{x}^\pm) + \theta^+ \bar{\theta}^- G(\tilde{x}^\pm) + \dots \quad (1.17)$$

となる。ここで G は複素の補助場で、 $+\dots$ は $y, \bar{\chi}_+, \chi_-$ の微分を含む項のみからなる。 U の Hermite 共役 \bar{U} は ca 超場であり、 $D_+\bar{U} = \bar{D}_-U = 0$ を満たす。

カイラル超場の各成分の SUSY 変換則については、 $\epsilon^\pm, \bar{\epsilon}^\pm$ を反交換するスピノルのパラメーター ($\epsilon^\mp = \pm\epsilon_\pm$ など) として、

$$\delta = \epsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\epsilon}_\alpha \bar{Q}^\alpha = \epsilon_+ Q_- - \epsilon_- Q_+ - \bar{\epsilon}_+ \bar{Q}_- + \bar{\epsilon}_- \bar{Q}_+ \quad (1.18)$$

と SUSY の生成子を定義すると、

$$\delta\phi = \epsilon_+\psi_- - \epsilon_-\psi_+, \quad \delta\bar{\phi} = -\bar{\epsilon}_+\bar{\psi}_- + \bar{\epsilon}_-\bar{\psi}_+ \quad (1.19)$$

$$\delta\psi_+ = 2i\bar{\epsilon}_-\partial_+\phi + \epsilon_+F, \quad \delta\bar{\psi}_+ = -2i\epsilon_-\partial_+\bar{\phi} + \bar{\epsilon}_+\bar{F} \quad (1.20)$$

$$\delta\psi_- = -2i\bar{\epsilon}_+\partial_-\phi + \epsilon_-F, \quad \delta\bar{\psi}_- = 2i\epsilon_+\partial_-\bar{\psi} + \bar{\epsilon}_-\bar{F} \quad (1.21)$$

$$\delta F = -2i\bar{\epsilon}_+\partial_-\psi_+ - 2i\bar{\epsilon}_-\partial_+\psi_-, \quad \delta\bar{F} = -2i\epsilon_+\partial_-\bar{\psi}_+ - 2i\epsilon_-\partial_+\bar{\psi}_- \quad (1.22)$$

となる。これは Φ を

$$\begin{aligned} \Phi = & \phi - i\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\phi - i\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\phi - \theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\bar{\theta}^+\partial_+\partial_-\phi \\ & + \theta^+\psi_+ - i\theta^+\theta^-\bar{\theta}^-\partial_-\psi_+ + \theta^-\psi_- - i\theta^-\theta^+\bar{\theta}^+\partial_+\psi + \theta^+\theta^-F \end{aligned} \quad (1.23)$$

と展開し、SUSY charge の表現 (1.9) を用いて具体的に (1.18) を作用させることにより求められる。

1.1.3 Lagrangian

2次元 (2,2) SUSY の場合も 4次元 $\mathcal{N} = 1$ SUSY の場合の D-term と F-term に加えて Lagrangian にツイスト F-term と呼ばれる項が含まれることとなる。

D-term は、4次元の場合と同様にして、任意の超場 \mathcal{F}_i を用いて、

$$\int d^2x d^4\theta K(\mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{F}}_i) = \int d^2x d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+ K(\mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{F}}_i) \quad (1.24)$$

と書かれる。ここで $K(\mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{F}}_i)$ は \mathcal{F}_i の任意の実関数である。この項は $d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+$ という vector, axial の両方の R 変換で不変な形の積分で書かれている為、古典的には R-symmetry を保っている。

F-term に関しても 4次元の場合と同様で、 cc 超場 Φ_i を用いて、

$$\int d^2x d^2\theta W(\Phi_i) + c.c. = \int d^2x d\theta^- d\theta^+ W(\Phi_i)|_{\bar{\theta}^\pm=0} + \int d^2x d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \bar{W}(\bar{\Phi}_i)|_{\theta^\pm=0} \quad (1.25)$$

と表される。ここで $W(\Phi_i)$ は Φ_i の正則関数で、スーパーポテンシャルと呼ばれる。この項は $W(\Phi_i)$ が vector R-charge 2、axial R-charge 0 を持つように Φ_i の charge が与えられている場合

にのみそれぞれの R-symmetry を保つ。スーパーポテンシャルは Landau-Ginzburg 理論の target としての意味で複素構造に対応しており [14]、後にトポロジカルツイストを考えると、この項は A-model 側で BRST exact である。

ツイスト F-term は、 ac 超場 U_i を用いて、

$$\int d^2x d^2\tilde{\theta} \tilde{W}(U_i) + c.c. = \int d^2x d\bar{\theta}^- d\theta^+ \tilde{W}(U_i)|_{\bar{\theta}^+ = \theta^- = 0} + \int d^2x d\bar{\theta}^+ d\theta^- \tilde{W}(\bar{U}_i)|_{\theta^+ = \bar{\theta}^- = 0} \quad (1.26)$$

と表される。ここで $W(U_i)$ は U_i の正則関数でツイストスーパーポテンシャルと呼ばれる。この項が vector, axial の R-symmetry を保つ条件は、それぞれ、 $W(U_i)$ が vector R-charge 0、axial R-charge 2 を持つ場合である。ツイストスーパーポテンシャルは Fayet-Iliopoulos を表すのに用いられ、Landau-Ginzburg 理論の target の意味で複素 Kähler moduli に対応している。トポロジカルツイストを行った B-model ではこの項は BRST exact になる。

1.1.4 Kähler 多様体上のシグマモデル

これまでに構成してきた Lagrangian において Kähler 多様体 X 上のシグマモデルを考えるには、D-term の cc 超場 $\Phi_i (i = 1, \dots, n)$ を用いて X の複素座標を表せばよい。即ち $K(\phi^i, \bar{\phi}^i)$ を X 上の Kähler ポテンシャル、 $g_{i\bar{j}} = \partial^2 K / \partial \phi^i \partial \bar{\phi}^{\bar{j}}$ を X の計量とすると、Lagrangian 密度は $L_{kin} = \int d^4\theta K(\Phi^i, \bar{\Phi}^i)$ と与えればよい。成分で展開すると、

$$L_{kin} = -g_{i\bar{j}} \partial^\mu \phi^i \partial_\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} + ig_{i\bar{j}} \bar{\psi}_-^{\bar{j}} (D_0 + D_1) \psi_-^i + ig_{i\bar{j}} \bar{\psi}_+^{\bar{j}} (D_0 - D_1) \psi_+^i \\ + R_{i\bar{j}k\bar{l}} \psi_+^i \psi_-^k \bar{\psi}_-^{\bar{j}} \bar{\psi}_+^{\bar{l}} + g_{i\bar{j}} (F^i - \Gamma_{jk}^i \psi_+^j \psi_-^k) (\bar{F}^{\bar{j}} - \Gamma_{\bar{k}\bar{l}}^{\bar{j}} \bar{\psi}_-^{\bar{k}} \bar{\psi}_+^{\bar{l}})$$

但し、Levi-Civita 接続 $\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{j}} \partial_j g_{k\bar{j}}$ 、共変微分 $D_\mu \psi_\pm^i = \partial_\mu \psi_\pm^i + \partial_\mu \phi^j \Gamma_{jk}^i \psi_\pm^k$ を用いた。また $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ は計量の Riemann 曲率である。この Lagrangian から補助場 F_i の運動方程式を求めると、

$$F_i = \Gamma_{jk}^i \psi_+^j \psi_-^k \quad (1.27)$$

$$\bar{F}^{\bar{i}} = \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} \bar{\psi}_-^{\bar{j}} \bar{\psi}_+^{\bar{k}} \quad (1.28)$$

となる。

1.2 トポロジカルツイスト

ここから実際にトポロジカルツイストを行いつトポロジカルな理論を構成していくが、その為に必要な Euclid 化を定める所から始める。即ち Wick rotation を行い、 $x^0 = -ix^2$ とし、複素座標 z を $z = x^1 + ix^2$ と定める。 $(x_+ = \bar{z}, x_- = -z, \partial_+ = \partial_{\bar{z}}, \partial_- = -\partial_z)$ 。またそれに伴い、時空の回転の演算子 M も $M_E = iM$ へと変更され、この M_E の super charge への作用は (1.5) より、

$$[M_E, Q_\pm] = \mp Q_\pm, \quad [M_E, \bar{Q}_\pm] = \mp \bar{Q}_\pm \quad (1.29)$$

となる。トポロジカルツイストという操作はこのような M_E に加えて、更に理論に $U(1)_R$ 対称性 ($U(1)_V, U(1)_A$ のどちらでもよい) があるときに、 M_E によって生成される空間の対称性 $U(1)_E$ を $U(1)_E \times U(1)_R$ の対角部分で置き換えることに相当する。つまり $M'_E \equiv M_E + R$ で定義される演算子 M'_E を新しく空間の回転の演算子とみなせばよい。ここで R は $U(1)_R$ の生成子で、

$$\begin{aligned} R &= F_V \quad \cdots \quad \text{A-model} \\ R &= F_A \quad \cdots \quad \text{B-model} \end{aligned}$$

という2種類のツイストに対応した2種類の理論が存在する。このようにして新しく得られた回転の演算子 M'_E に対して spin 0 となる SUSY の生成子を BRST 演算子とし、その BRST cohomology によって理論を定義していく。

1.2.1 理論の構成

まずは A-model の場合を考える。

上述のように、A-model の場合は $M'_E = M_E + F_V$ というツイストを行うので、A-model の構成にはスーパーポテンシャルが $U(1)_V$ 不変であり、理論に $U(1)_V$ という対称性が残っていることが必要である。ただしこの場合にシグマ模型としての target の多様体は必ずしも Calabi-Yau 多様体でなくてもよい。(これに対して B-model では target の Calabi-Yau 性が要求される。) トポロジカル理論の構成にとって重要な点は、 Q_-, \bar{Q}_+ という2つの SUSY の生成子に対して (1.6), (1.29) より、

$$[M'_E, Q_-] = 0, \quad [M'_E, \bar{Q}_+] = 0 \quad (1.30)$$

となることである。即ち新しく定義された M'_E に対して Q_-, \bar{Q}_+ という演算子が spin 0 となっている。ここで $Q_{ac} \equiv Q_- + \bar{Q}_+$ と定義すると (1.1), (1.4) より、

$$Q_{ac}^2 = Q_-^2 + \bar{Q}_+^2 + \{Q_-, \bar{Q}_+\} = 2\tilde{Z} = 0 \quad (1.31)$$

となる。但しここでは $\tilde{Z} = 0$ を仮定した²。この Q_{ac} を BRST 演算子 Q_B と定義すれば、 $Q_B^2 = 0$ より BRST cohomology が定義される。即ち理論に現れる状態 A を BRST closed な状態 ($Q_B A = 0$) に制限して、 Q_B の cohomology を理論の observable とすればよい。ツイストされた理論においては $M'_E = M_E + F_V$ と空間回転の演算子の変更を受けるのでそれに伴いエネルギー運動量テンソルも変更を受ける。ツイストされた理論のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}^{\text{twisted}}$ はもとの理論のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に対して、

$$T_{\mu\nu}^{\text{twisted}} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(\epsilon_\mu^\lambda \partial_\lambda J_\nu^V + \epsilon_\nu^\lambda \partial_\lambda J_\mu^V) \quad (1.32)$$

² $\tilde{Z} \neq 0$ であっても、 $\tilde{Z} = \sum_a^n \lambda_a S_a$ (S_a は Abelian global 対称性 T の生成子) と書けるならば、 $Q_{ac}^2 = 2 \sum_a^n \lambda_a S_a$ なので、 T の作用で不変な状態に制限した理論の中で Q_{ac} の cohomology を定義することが出来る。(T-equivariant cohomology)

と表される。ここで J^V は $U(1)_V$ のカレントである。このときある $G_{\mu\nu}$ が存在し [1]、 $T_{\mu\nu}^{\text{twisted}}$ は $T_{\mu\nu}^{\text{twisted}} = Q_B G_{\mu\nu}$ と書かれる。(後で A-model の作用の表式 (1.49) から、 $S = (\text{BRST-exact 項}) + (\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ に依存しない項) であることがわかり、古典的なエネルギー運動量テンソルについては、

$$T^{\text{class}} \equiv \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = (\text{BRST-exact 項}) \quad (1.33)$$

が示される。) つまりこの理論はトポロジカルになっているということがわかる。このようなトポロジカル理論の構成は、CFT(即ち target が Calabi-Yau) の場合の記述では $T \rightarrow T + \frac{1}{2}\partial J$ という変更によって理論の central charge c が $c \neq 0 \rightarrow c = 0$ と変更されることに対応しており、[17]、このようなエネルギー運動量テンソルの変更により多くの CFT はトポロジカルになる。

ここでは A-model を $M'_E = M_E + F_V$ というツイストによって定義したが、 $M'_E = M_E - F_V$ とした場合には $Q_B \equiv Q_{cc} = Q_+ + \bar{Q}_-$ という BRST 演算子を用いれば $M'_E = M_E + F_V$ の場合と同様にトポロジカルな理論が構成される。これらの2つの理論は $U(1)_V$ の charge の再定義で全く等価であるので $M'_E = M_E - F_V$ の場合も A-model とみなすことが出来る。

次に B-model の場合の理論の構成を行うが、A-model のときの $U(1)_V$ を B-model の場合は $U(1)_A$ とすれば、議論は全く同じである。つまり B-model の場合は $M'_E = M_E + F_A$ というツイストを行うこととなる。この M'_E に対して、

$$[M'_E, \bar{Q}_{\pm}] = 0 \quad (1.34)$$

となり、 \bar{Q}_+, \bar{Q}_- が spin 0 となるので、これらを用いて $Q_{cc} \equiv \bar{Q}_+ + \bar{Q}_-$ と定義すれば、

$$Q_{cc}^2 = \bar{Q}_+^2 + \bar{Q}_-^2 + \{\bar{Q}_+, \bar{Q}_-\} = 2Z = 0 \quad (1.35)$$

となり ($Z = 0$ は仮定した)、 $Q_B = Q_{cc}$ という BRST 演算子の定義により Q_B に対する BRST cohomology として理論が構成される。エネルギー運動量テンソルの変更も (1.32) の J^V を $J^A(U(1)_A)$ カレント) と書き換えれば A-model の場合と全く同様で、変更を受けたエネルギー運動量テンソルは Q_{cc} -exact となるので理論はトポロジカルになっていることがわかる。 $M'_E = M_E - F_A$ というツイストに対しても $U(1)_A$ の charge の再定義を行えば全く等価な理論となり B-model とみなすことが出来る。

この論文の中では主に A-model の場合を扱うので、以下では A-model の特性について重点的に調べることとする。

1.2.2 BRST 変換性

まず A-model の BRST 変換性について調べる。BRST 演算子が $Q_B = Q_{ac} = Q_- + \bar{Q}_+$ と与えられているので、(1.18) に $\epsilon_- = \bar{\epsilon}_+ = 0, \epsilon_+ = \bar{\epsilon}_- = \alpha$ と代入して、(1.19),(1.20) を用いればよい。

$$\delta\phi^i = \alpha\psi_-^i, \delta\bar{\phi}^{\bar{i}} = \alpha\bar{\psi}_+^{\bar{i}} \quad (1.36)$$

$$\delta\psi_+^i = 2i\alpha\partial_+\phi^i + \alpha F^i = 2i\alpha\partial_z\phi^i + \alpha\Gamma^i_{jk}\psi_+^j\psi_-^k, \delta\bar{\psi}_+^{\bar{i}} = 0 \quad (1.37)$$

$$\delta\psi_-^i = 0, \delta\bar{\psi}_-^{\bar{i}} = 2i\alpha\partial_-\bar{\phi}^{\bar{i}} + \alpha\bar{F}^{\bar{i}} = -2i\alpha\partial_z\bar{\phi}^{\bar{i}} + \alpha\bar{\Gamma}^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}\bar{\psi}_-^{\bar{j}}\bar{\psi}_+^{\bar{k}} \quad (1.38)$$

但し補助場 F, \bar{F} の運動方程式 (1.27),(1.28) を用いた。このような変換に対して $\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{i}}, \psi_\pm^i, \bar{\psi}_\pm^{\bar{i}}$ が BRST 不変な条件を調べると、まず (1.36) より、

$$\psi_-^i = \bar{\psi}_+^{\bar{i}} = 0 \quad (1.39)$$

が得られ、更にこの式を用いて (1.37),(1.38) が 0 になる条件を求めると、

$$\partial_z\phi^i = \partial_z\bar{\phi}^{\bar{i}} = 0 \quad (1.40)$$

となる。即ち、A-model の worldsheet の場が BRST 不変になる条件は、worldsheet から target への写像が正則であることとなる。下で示すように経路積分に寄与する写像は BRST 不変なものに限られるので、A-model の経路積分は正則写像のみから寄与を受けるということが帰結される。

次に経路積分に対して BRST 不変な写像のみが寄与するということを示すが、これはある種の固定点定理とみなすことが出来る [2]。まず任意の場の理論に対応して関数空間 \mathcal{E} を考え、経路積分はこの \mathcal{E} の上の積分として定義されるとし、次にこの理論の対称性 G があり、 \mathcal{E} に対して自由に (固定点を持たずに) 作用しているとする。このとき $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/G$ という fibration が考えられ、 \mathcal{E} の上の積分は fiber(G) 上の積分と \mathcal{E}/G 上の積分とに分解される。 G は理論の対称性であったので、observable \mathcal{O} を G 不変なものに限れば、fiber 方向の積分は G の体積を与えるのみの寄与となり、

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int_{\mathcal{E}} e^{-L}\mathcal{O} = \text{vol}(G) \cdot \int_{\mathcal{E}/G} e^{-L}\mathcal{O} \quad (1.41)$$

となる。ここで理論の対称性 G として BRST 演算子 Q_B を用いることを考えると、 Q_B は Grassmann の対称性なので、上の式における $\text{vol}(G)$ は 0 になる。つまり、

$$\int d\theta \cdot 1 = 0 \quad (1.42)$$

となる。即ち Q_B が理論の関数空間 \mathcal{E} に対して自由に作用しているならば、全ての Q_B 不変な observable の期待値は 0 となってしまう、自明な理論を与えてしまう。一般的には Q_B は \mathcal{E} に対して自由には作用せず固定点を持つが、関数空間の中の固定点以外の領域に対してはやはり上の議論が適用され、経路積分に対して寄与しない。よって、対称性 Q_B がある場合には経路積分は Q_B の作用の固定点、即ち BRST 不変な関数のみが寄与することがわかる。これを A-model の場合に適用すると、上で見たように worldsheet から target への正則な写像のみが経路積分に効くということが示される。

1.2.3 moduli への依存性

まずは理論の F-term に対する依存性を調べることにより (Landau-Ginzburg 理論の意味で) A-model の相関関数が target の complex moduli によらないことを示す。その為には、 $\int d\theta^- = (Q_- + i\bar{\theta}^- \partial_z)$ などを用いて F-term の項を書き直せばよい。即ち、

$$\begin{aligned} \int d\theta^- d\theta^+ W(\Phi_i) &= - \int d\theta^+ (Q_- + i\bar{\theta}^- \partial_z) W(\Phi_i) \\ &= - \int d\theta^+ Q_- W(\Phi_i) + \text{total derivative} \end{aligned} \quad (1.43)$$

となり、また $\bar{Q}_+ = D_+ - 2i\theta^+ \partial_z, D_+ W(\Phi_i) = 0$ より、

$$- \int d\theta^+ \bar{Q}_+ W(\Phi_i) = - \int d\theta^+ (D_+ - 2i\theta^+ \partial_z) W(\Phi_i) = \text{total derivative} \quad (1.44)$$

となるので、これらの2つの式を組み合わせると、

$$\int d\theta^- d\theta^+ W(\Phi_i) = - \int d\theta^+ Q_{ac} W(\Phi_i) + \text{total derivative} \quad (1.45)$$

が示される。ここで F-term は (1.45) の $\int d^2z$ 積分で表される項を含むが、スーパーポテンシャルは target の空間全体で1価に定義されているので total derivative の項は0となり、BRST-exact な項のみが残ることがわかる。同様のことが $\int d\bar{\theta}^+ d\bar{\theta}^- \bar{W}(\bar{\Phi}_i)$ に対しても言えるので、結果として F-term は全て BRST-exact になる。このことは A-model が Landau-Ginzburg 理論の意味で complex moduli に依存しないことを示している。

一方、一般に A-model は Kähler moduli に依存性を持つが、この依存性は比較的簡単な形で現れる。これを見る為には A-model を Kähler 多様体を target とするシグマモデルとして D-term を書き換えると、

$$\begin{aligned} \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+ K &= \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- (-\bar{Q}_+ + i\theta^+ \partial_z) K \\ &= - \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- \bar{Q}_+ K + i \int d\theta^- d\bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \theta^+} (\theta^+ \partial_z K) \end{aligned} \quad (1.46)$$

となり、また

$$\begin{aligned} - \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- Q_- K &= \int d\theta^+ d\bar{\theta}^- d\theta^- \left(\frac{\partial}{\partial \theta^-} - i\bar{\theta}^- \partial_z \right) K \\ &= i \int d\theta^+ d\theta^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} (\bar{\theta}^- \partial_z K) \end{aligned} \quad (1.47)$$

より、これらの2つの式を用いると、

$$\int d^4\theta K = - \int d\theta^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- (Q_- + \bar{Q}_+) K + i \int d\theta^- d\bar{\theta}^- \frac{\partial}{\partial \theta^+} (\theta^+ \partial_z K) - i \int d\theta^+ d\theta^- \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} (\bar{\theta}^- \partial_z K) \quad (1.48)$$

となる。ここで D-term の場合も F-term の場合と同様に BRST-exact な項と total derivative の和の形に表されているが、F-term の場合のスーパーポテンシャルとは違い、 K は全空間で 1 価には定義されていないことからこの total derivative の項は一般には $\int d^2z$ の積分で non-zero となる。しかしここで現れる項は Kähler form の引き戻しの積分に対応するためこの Kähler moduli への依存性は単に target における worldsheet の面積が作用に現れることになり、具体的には [2]、

$$\begin{aligned} L &= (\text{BRST-exact 項}) + \int_{\Sigma} d^2z (\partial_z \phi^i \partial_{\bar{z}} \bar{\phi}^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} - \partial_{\bar{z}} \phi^i \partial_z \bar{\phi}^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}) \\ &= (\text{BRST-exact 項}) + \int_{\Sigma} \Phi^* (-ig_{i\bar{j}} d\phi^i d\bar{\phi}^{\bar{j}}) \end{aligned} \quad (1.49)$$

と書かれる。ここで、 Φ は worldsheet Σ から target X への写像 ($\Phi : \Sigma \rightarrow X$) であり、 Φ^* はその引き戻しである。(1.49) の第 1 項は BRST-exact であり理論には寄与しないので、理論の作用は (1.49) の第 2 項の情報で全て決定されることとなるが、Lagrangian 中の complex moduli に相当する部分は全て第 1 項に含まれているため、シグマモデルの意味においても A-model の物理量は complex moduli に依存しないことがわかる。第 2 項は世界面の target X における面積を表して、この項の値は X の (complex)Kähler moduli と X で世界面が作る 2 次の homology から決まる。即ち target の homology を整数値³ の vector $Q = (Q_1, \dots, Q_{b_2(X)})$ を用いて表し ($b_2(X)$ は X の 2 次元 Betti 数)、対応する Kähler moduli を $t = (t_1, \dots, t_{b_2(X)})$ とすると

$$\int_{\Sigma} \Phi^* (-ig_{i\bar{j}} d\phi^i d\bar{\phi}^{\bar{j}}) = Q \cdot t \quad (1.50)$$

となり、A-model の物理量の計算はある固定した homology Q について世界面から Q への正則写像の moduli の上で積分を行い、最後に全ての Q の寄与を足し上げる事で得られる。

1.2.4 Gromov-Witten 不変量

A-model で計算される物理量として、例えば世界面が種数 g の Riemann 面 Σ_g の場合に target X 上の自由エネルギーを F_g とすると、

$$F_g(t) = \sum_{Q \in H_2(X)} N_{g,Q} e^{-Q \cdot t} \quad (1.51)$$

という形に展開され、この展開の係数 $N_{g,Q}$ を Gromov-Witten 不変量という。全ての種数の F_g の生成母関数は

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g(t) g_s^{2g-2} \quad (1.52)$$

と定義される⁴。 g_s は通常の物理的弦理論での string coupling に対応する展開パラメータである。 $Q \in H_2(X)$ の足し上げの中で $Q = (0, \dots, 0)$ に対応する写像は target で面積 0 であり、世界面全

³世界面から X への写像は正則なものに限られるので、実際には homology の非負整数の部分のみが寄与する。

⁴このような全ての種数の自由エネルギーの全体をまとめて考えることはここで定義された Gromov-Witten 不変量と後の章で定義する Gopakumar-Vafa 不変量との対応を考える上で自然である。

体が target 中の 1 点へとつづれる写像を意味して、constant map と呼ばれる (図 1.1)。constant map に対して target 中で非自明な 2-cycle に世界面が巻きつく場合は worldsheet instanton と呼ばれる (図 1.2)。この worldsheet instanton において target での 2 次元面の種数は必ずしも世界面の種数 g に一致せず、世界面の一部が target の 1 点につづれ target での種数は g より小さくなる場合がある。このようなもとの種数より小さい種数の Riemann 面への写像が生じることを bubbling という (図 1.3)。

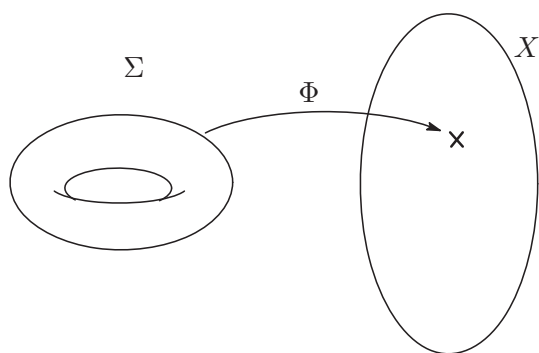


図 1.1: constant map

world sheet Σ が target X の 1 点に写像されている。

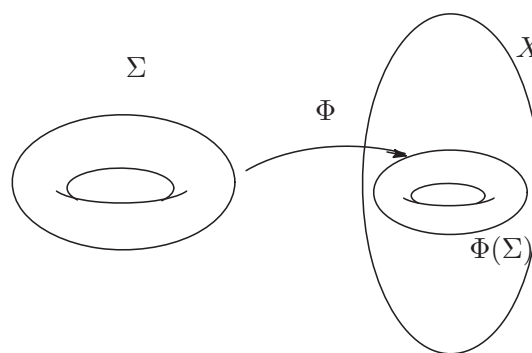


図 1.2: worldsheet instanton

world sheet Σ が target の非自明な 2-cycle に巻きついている。

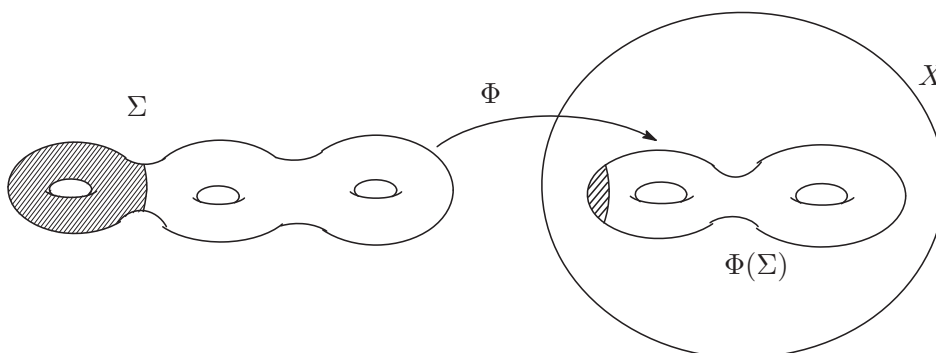


図 1.3: bubbling

図では種数 3 の Riemann 面が「つぶれて」、target で種数 2 の Riemann 面になっている。

この Gromov-Witten 不変量を計算する方法の 1 つとして holomorphic anomaly という方法が知られている。holomorphic anomaly とは topological な理論の moduli への依存性が通常は正則に現れるはずだが実際にはその正則性は moduli の境界で破れていて、その点では moduli に対する反正則微分が 0 にならないことから分配関数が計算され [18, 3]、原理的には (holomorphic

ambiguity と呼ばれる項を除き) 全ての種数について分配関数を求めることが出来る。holomorphic anomaly から分配関数を求める考え方を概念的に説明すると、まず moduli の境界では世界面は何らかの意味でつぶれていると考えられ、例えば種数 1 の Riemann 面の場合に一か所で cycle がつぶれると種数 0 の Riemann 面の様に見える (図 1.4) というように、holomorphic anomaly はもとの種数より低い種数の Riemann 面の分配関数から寄与を受けると考えられるので種数 0 の Riemann 面の場合の分配関数 [19] から帰納的に高い種数の分配関数が得られるというものである。

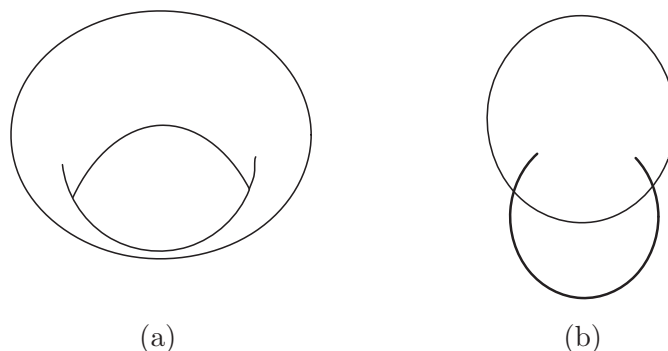


図 1.4: Riemann 面の moduli の境界

種数 1 の Riemann 面 (torus) がつぶれて (a)、種数 0 の Riemann 面 (sphere) のように見える (b)。

この計算には Feynman rule に類似した計算法が用いられることが知られているが [3]、高い種数になると Riemann 面のつぶれ方の組み合わせが急激に大きくなり (例えば [20] の Appendix 参照) 実用的でないことがわかる。一般に高い種数の Riemann 面の分配関数を求めることは非常に困難であるとされてきたが、後の章で扱う geometric transition を用いた計算法によれば全ての種数の寄与をまとめて評価出来ることがわかる。

これまでの議論で得られた A-model の特徴は、

1. 経路積分には正則な写像のみが寄与する。
2. 理論は target の complex moduli には依存しない。
3. Kähler moduli への依存性は target における世界面の面積として作用に現れる。

とまとめられる。

以下では target を複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体に限り、その上での A-model と Chern-Simons 理論の関係などについて考察する。

1.3 開弦と Chern-Simons 理論

前節までは世界面のトポロジーとして一般の閉じた 2 次元面を考えてきたが、ここでは世界面が境界をもつ開いた 2 次元面を考え、その境界における境界条件について調べる。通常の物理的な超弦理論では D-brane という物体が存在し、その上で開弦が Dirichlet 境界条件を満たすが、位相的弦理論においても同様に A-brane と呼ばれる物体が存在しその上で位相的開弦が Dirichlet 境界条件を満たすと考えられる。更にその A-brane(実 3 次元となる)の上での理論として自然に Chern-Simons 理論が現れることを見る [8]。

1.3.1 位相的開弦の境界条件

まず Witten の議論 [8] に基づき BRST 不変な境界条件として Kähler 多様体の Lagrangian 部分多様体上に位相的開弦の境界が固定されているとする。このことは言い換えれば A-model のプレーンである A-brane がそのような Lagrangian 部分多様体上に巻きついていると言える。Kähler 多様体 X の Lagrangian 部分多様体 L とは、Kähler 多様体の Kähler 形式 ω を symplectic 多様体の symplectic 2 形式として見たときに $i : X \hookrightarrow L$ とすると、

$$i^*(\omega) = 0 \quad (1.53)$$

となることである。通常の物理的弦理論において Calabi-Yau 多様体 X に D-brane が巻きついて SUSY を保つ条件は、[21, 22] など議論されているように、その D-brane が Calabi-Yau 多様体 X の special Lagrangian 部分多様体 L' に巻きつくことであり、その場合は X の正則 3 形式 Ω について、

$$i^*(\Omega) = \Omega|_{L'} \simeq \text{Vol}(L') \quad (1.54)$$

という L' の体積に対する制約が更に課される。物理的な D-brane の条件に比べると A-brane の巻きつき条件は緩められていて、これは位相的理論の側では brane が tension を持たない為、エネルギーが A-brane の体積には依存しないことを表していると考えられる。またこのことは、例えば後の議論で A-brane が T^*S^3 の Lagrangian 部分多様体 S^3 に巻きついたときに、 S^3 の体積を自由に換えられることを用いるが、 S^3 の体積 (一般の 3 次元部分多様体でも同様だが) は Calabi-Yau 多様体の moduli の中では complex moduli に含まれている為、その変化は BRST-exact な変化として観測に影響しないとも考えられる。開弦の境界が複数あり、Lagrangian 部分多様体が複数ある場合でも同様で、世界面のトポロジーが $\Sigma_{g,h}$ (種数 g で穴の数 h) で、境界を $\partial\Sigma_i$, ($i = 1, \dots, h$) としたとき $\Phi : \Sigma_{g,h} \rightarrow X$ ならば、

$$\Phi(\partial\Sigma_i) \subset L_i \quad (L_i : \text{Lagrangian 部分多様体}) \quad (1.55)$$

となる。すでに議論したように A-model には worldsheet instanton と呼ばれる写像があり worldsheet は target の非自明な 2-cycle に巻きつくことが知られているが、開弦の場合も同様で、Calabi-Yau 多様体の Lagrangian 部分多様体で開弦が境界を持つような条件のもとで Calabi-Yau 多様体

の非自明な relative homology の 2-cycle に巻きつくことが出来る。最初に target の多様体として特に T^*M という M の余接バンドルの全空間を考える。実際 A-brane の近傍では任意の Calabi-Yau 多様体は T^*M と近似され、また任意の Calabi-Yau 多様体の場合の T^*M からの補正も具体的にわかる。ただし以下で議論するように、target の多様体が T^*M という形で表されているときには、worldsheet は面積 0 であることが示され、その場合には worldsheet は非自明な 2-cycle に巻きつくことは出来ない。

1.3.2 instanton at infinity

まず target の Calabi-Yau 多様体が T^*M (実 6 次元) とし、その Lagrangian 部分多様体として底空間 M (実 3 次元) をとる。これは通常の解析力学において M という多様体の上を運動する粒子の点 $q \in M$ における運動量を $p \in T^*_q M$ とした場合の粒子の位相空間 T^*M の中で位置を表す M (M 上で $p=0$) を Lagrangian 部分多様体として選んだと考えられる。この場合の symplectic 2 形式 ω は、

$$\omega = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i \quad (1.56)$$

と書くことが出来、この ω は T^*M の全体で定義される。ここで $\rho = \sum_{i=1}^3 p_i \wedge dq_i$ とすると、

$$\omega = d\rho \quad (1.57)$$

と書ける。ここで worldsheet Σ の target 上での面積を表す Kähler 2 形式の積分 (ここでは symplectic 2 形式 ω の積分) を考えると、 Σ の境界 $\partial\Sigma$ は $\Phi(\partial\Sigma) \subset M$ を満たすので、

$$\int_{\Sigma} \Phi^*(\omega) = \int_{\Sigma} \Phi^*(d\rho) = \int_{\partial\Sigma} \Phi^*(\rho) = 0 \quad (1.58)$$

となる。ただし M 上で $p_i = 0$ より $\rho = 0$ となることを用いた。このことは T^*M という多様体の底空間 M に境界を持つ位相的開弦の target における面積は 0 になることを示している。面積 0 の写像として一見すると constant map しか存在しないように思えるが、正則な写像の moduli の境界まで考慮するとほとんど縮退した fat graph (図 1.5) のような worldsheet は経路積分に寄与すると考えられる。

このような worldsheet による摂動的な補正はゲージ理論の $1/N$ 展開 [23, 24] に類似しており、 M 上の理論はゲージ理論の摂動論のように思われるが、以下で実際にこの M 上の理論が Chern-Simons 理論で与えられるということを見ていく。一般の Calabi-Yau 多様体では $\omega = d\rho$ というような式は Calabi-Yau 多様体の全体では成り立たないので上記の議論は使えず worldsheet は非自明な 2-cycle に巻きつき worldsheet instanton となるが、Lagrangian 部分多様体の近傍では $\omega = d\rho$ という ρ が存在するので、worldsheet instanton に対してやはり fat graph 型の補正があり、ゲージ理論の $1/N$ 展開と考えられる (図 1.6)。

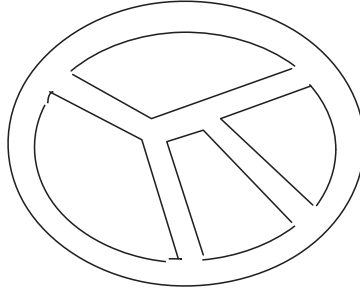


図 1.5: fat graph

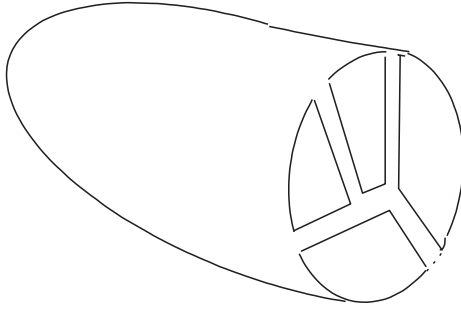


図 1.6: worldsheet instanton に対する fatgraph 型の補正

1.3.3 Wilson loop

物理的弦理論においては D-brane が N 枚あったときに D-brane 上に境界を持つ開弦に Chan-Paton factor の自由度が現れ、その開弦は (世界面が向き付けられている場合) $U(N)$ ゲージ理論を記述していると考えられた。このことは N 枚の A-brane があるときでも同様に成り立つと考えられるが、A-brane 上で Wilson loop が BRST 不変になるという条件を加えると A-brane 上のゲージ場 A_μ に制限が加えられる。即ち A-brane 上の開弦の境界 C_i ($\Phi : \partial\Sigma_i \rightarrow C_i$) に付随した Wilson loop を

$$W = \text{Tr} P \exp \left[\oint_{C_i} \Phi^*(A) \right] \quad (1.59)$$

とすると、 W が BRST 不変である為の条件は、ゲージ場の曲率を $F = dA + A \wedge A$ として (1.36) を用いれば、

$$\begin{aligned} \delta W &= \text{Tr} \oint_{C_i} \delta\phi^i \frac{d\phi^j}{d\tau} F_{ij}(\tau) d\tau \cdot P \exp \oint_{C_i; \tau} \Phi^*(A) \\ &= \text{Tr} \oint_{C_i} \alpha\psi_-^i \frac{d\phi^j}{d\tau} F_{ij}(\tau) d\tau \cdot P \exp \oint_{C_i; \tau} \Phi^*(A) = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

となる。ここで τ は C_i 上の位置を表す 1 次元の座標で、 $\exp \oint_{C_i; \tau} \Phi^*(A)$ は始点と終点が τ であるような Wilson loop である。ここで任意の BRST 変換について (1.60) が成り立つ為には A-brane

上で $F = 0$ が要請される。これは $F = 0$ が A-brane 上の作用の古典解に対応していることを意味すると考えられ、古典解として平坦接続を持つような作用として Chern-Simons 作用が A-brane 上の物理を記述していると考えるのが自然である。つまり 3 次元空間上で

$$L = \frac{k}{4\pi} \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \quad (1.61)$$

とすると運動方程式は $F = 0$ で与えられ、このような古典解を満たす Lagrangian 部分多様体に対してのみ開弦が境界でゲージ場と結合出来ると考えられる。以上のような議論から A-brane 上には Chern-Simons ゲージ理論が存在し、fat graph 型の $1/N$ 展開で摂動的に経路積分に寄与することがわかるが、更に cubic string field theory との類似からも A-brane 上の理論が Chern-Simons であることの妥当性が示される。

1.3.4 cubic string field theory との関連

(1.36,1.38) の BRST 変換性より、 ϕ^i と ψ_-^i の関数を $A = A(\phi^i)_{i_1 \dots i_n} \psi_-^{i_1} \dots \psi_-^{i_n}$ とすると、

$$\delta A = -dA(\phi^i)_{i_1 \dots i_{n+1}} \psi_-^{i_1} \dots \psi_-^{i_{n+1}} \quad (1.62)$$

となる。ただし dA は A を微分形式として見たときに A に外微分作用を施したものである。これは ψ_-^i を ϕ^i の外微分 $d\phi^i$ と思えば BRST 変換の作用 ($-\delta$) は外微分作用 d に相当することを意味する。($d^2 = 0$ は BRST 変換の冪零性から保障されている。) このような対応を用いれば cubic string field theory [25](レビューとしては [26]) と同様の議論により M 上の理論が Chern-Simons 理論で記述されることがわかる。cubic string field theory(以下では CSFT) の作用は、

$$S = \frac{1}{2} \int \left(A \star Q(A) + \frac{2}{3} A \star A \star A \right) \quad (1.63)$$

と与えられる。ここで Q は BRST 演算子であり、 A は string field を表す。また $A \star A \star A$ は図 1.7 のような string field の 3 点 vertex である。

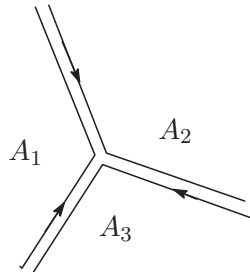


図 1.7: CSFT における string field の 3 点 vertex の張り合わせ

(1.63) の作用は、 $\delta A = Q\epsilon - \epsilon \star A + A \star \epsilon$ で不変であることがわかり、これはゲージ理論における接続のゲージ変換性に対応している。CSFT においては全ての string field は ghost 数 1 を持

つことが要請されるが、この条件を用いて string field \mathcal{A} を A-model の場を読み替えると、

$$\mathcal{A} \simeq A(\phi^i)_j \psi_-^j \simeq A(\phi^i)_j d\phi^i \quad (1.64)$$

となり、 \mathcal{A} は A-model の理論の中では M 上の 1 形式に対応している。更に上に述べたように BRST 演算子は M 上の外微分作用に置き換えられるので、Chan-Paton factor まで含めた CSFT を考えて対応する A-model の作用を書くと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int \text{Tr}(\mathcal{A} \star Q(\mathcal{A}) + \frac{2}{3} \mathcal{A} \star \mathcal{A} \star \mathcal{A}) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \end{aligned} \quad (1.65)$$

となり A-model の M 上の作用として Chern-Simons 作用が得られる。

以上のように A-model の Calabi-Yau 多様体中の Lagrangian 部分多様体に A-brane が巻きつき、その上に開弦が境界を持つこと、更に A-brane 上の作用が Chern-Simons 作用で与えられることが示された。次章では一般の 3 次元多様体の上で Chern-Simons 作用を詳しく解析し (後の章での応用も踏まえ) 特に結び目理論との関連等について見ていく。

第2章 Chern-Simons理論

この章では Chern-Simons 理論¹について詳しく見ていく。1章の冒頭でも述べた通りこの理論は3次元空間の計量に依存しないトポロジカルな理論となっており、更にこの理論の observable である Wilson loop の真空期待値と結び目理論の結び目多項式 (絡み目の場合も含む) とは深いつながりがある [9]。また後の章で見るようにこの結び目多項式は (brane も含めた) local toric Calabi-Yau 多様体上の A-model の振幅とつながりを持つことがわかる。結び目の数学的な話は [27]などを参照されたい。この章では framing の不定性については 2.2節で扱うこととし、それまでの節では framing は無視する。

2.1 相関関数の計算

まず Chern-Simons 理論の作用を、

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \\ &= \frac{k}{8\pi} \int_M \epsilon^{ijk} \text{Tr} \left(A_i (\partial_j A_k - \partial_k A_j) + \frac{2}{3} A_i [A_j, A_k] \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

と与える。ここで M は適当な実 3 次元多様体で、 A はゲージ群 G の接続を表す。今回の話ではゲージ群としては $U(N)$ 及び $SU(N)$ のみを考え、ここでの Tr は fundamental 表現に対する trace とする。この作用に対する M 上の分配関数は、

$$Z_k(M) = \int_M \mathcal{D}A e^{iS_{\text{CS}}} \quad (2.2)$$

と与えられるが、 A に対するゲージ変換を $h : M \rightarrow G$ を用いて、

$$A \rightarrow h^{-1} A h + h^{-1} d h \quad (2.3)$$

と表すと、一般に (h が恒等作用に連結でない場合) S_{CS} の変化は $\Delta S_{\text{CS}} \in 2\pi k \mathbb{Z}$ となるので、 $Z_k(M)$ が well defined となる為に $k \in \mathbb{Z}$ とする。経路積分の測度の Jacobian について精密な議論を行うと [9, 28]、 S_{CS} は Atiyah-Patodi-Singer の指数定理によって記述される形の量子補正を受けることがわかり、 S_{CS} における k は、

$$k \rightarrow k + y \quad (2.4)$$

と変更を受ける。ここで y は群 G の dual Coxeter 数で、 $G = SU(N)$ の時は $y = N$ となる。

¹Chern-Simons-Witten 理論とも呼ばれる。

2.1.1 Wilson loop

Chern-Simons 理論において、ゲージ不変でかつトポロジカルな (計量に依存しない) observable として Wilson loop が考えられる。\$A\$ をゲージ接続として、表現 \$R\$ で loop \$C\$ をまわる Wilson loop は²、

$$W_R(C) = \text{Tr}_R P \exp \int_C A \quad (2.5)$$

と定義される。一般に Wilson loop は 3次元空間 \$M\$ の中で任意の配位をとれるので、Wilson loop を用いて様々な結び目を表すことが出来る。また Wilson loop は複数個考えることも出来るのでそれらを用いて任意の絡み目を与えることも出来る (図 2.1)。

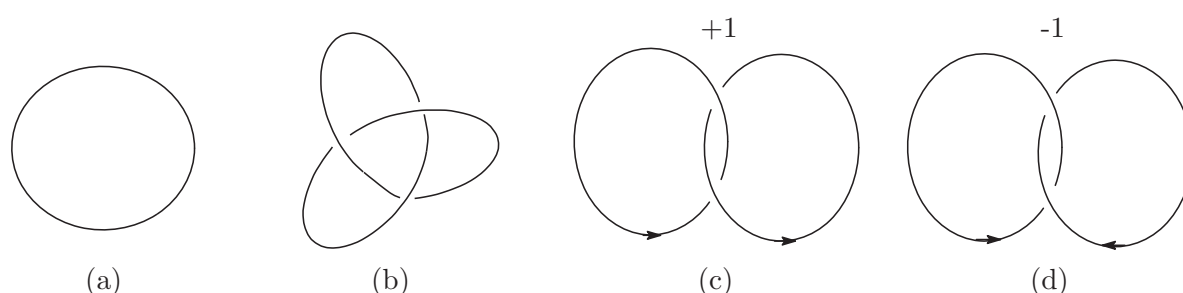


図 2.1: 様々な結び目と絡み目

(a):unknot (b):trefoil knot (c,d):Hopf link
ただし Hopf link の \$\pm 1\$ は linking number を表している。

\$r\$ 個の loop を \$C_i\$ (\$i = 1, \dots, r\$) として、それぞれの loop を表現を \$R_i\$ とすると Wilson loop の期待値は、

$$\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(C_i) \rangle = \int \mathcal{D}A e^{iS_{CS}} \prod_{i=1}^r W_{R_i}(C_i) \quad (2.6)$$

と計算される。これらの Wilson loop において \$G\$ 及びそれぞれの loop の表現 \$R_i\$ を適当に選べば既知の結び目多項式、絡み目多項式などが再現されることが示され、例えば絡み目において全ての表現を fundamental 表現に選んだものは HOMFLY 多項式 [29] が得られる。

2.1.2 Heegaard splitting

Chern-Simons 理論の分配関数や Wilson loop の相関関数を計算する為、3次元多様体を 2つの部分多様体に分割することを考える。即ち 3次元多様体 \$M\$ があつたときに \$M\$ の部分多様体とし

²表現としては自明な表現というものも考えられるが、実際には自明な表現に対する Wilson loop は最初から loop が無いという状態と全く同じである。

て M_1, M_2 をとり、更に M_1, M_2 のそれぞれの境界が共通の Σ として与えられ、 $M = M_1 \cup M_2$ を満たしているとする (図 2.2)。

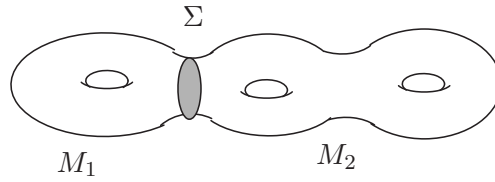


図 2.2: Heegaard splitting

多様体 M が Σ を境界に持つ 2 つの多様体 M_1, M_2 に分解される。

このような操作は Heegaard splitting と呼ばれ、Heegaard splitting に伴い M 上の経路積分も M_1 上の経路積分と M_2 上の経路積分とに分割される。 M_1, M_2 上の経路積分により分配関数の計算は境界である Σ 上 Hilbert 空間 $\mathcal{H}(\Sigma)$ の貼り合わせに帰着される。 $M_1(M_2)$ 上の経路積分で得られた状態を $|\Psi_{M_1}\rangle(|\Psi_{M_2}\rangle)$ とし、それらを貼り合わせる変換を U とすると分配関数は、

$$Z_k(M) = \langle \Psi_{M_2} | U | \Psi_{M_1} \rangle \quad (2.7)$$

と計算される。以下で上のような Heegaard splitting の例として $M = S^3$ の場合を考察し、その場合に M_1, M_2 及び U が具体的にどう選ばれるか見ることにする。この例は deformed conifold の toric 表示などでも用いられ、以下の様々な場面に現れる。

2.1.3 S^3 の分解

S^3 という多様体は (当然 \mathbb{R}^3 の中には実現出来ない) で想像し易い空間とは言い難いが、 S^3 がどのように 2 つの 3 次元部分多様体に分解されるか説明を試みたい。

結論から述べると S^3 は 2 つの solid torus (中身の詰まった T^2) に分解されることがわかり、このとき上の分解との対応では Σ は solid torus の表面の T^2 、貼り合わせの変換は T^2 に作用する S 変換 ($\tau \rightarrow -1/\tau$) である。このことは例えば Gopakumar の講義 [12] の Appendix で homology を用いて証明されているが、直観的には図 2.3 のように Hopf link のそれぞれの loop を膨らませて 2 つの solid torus を作って更にその表面を貼り合わせると $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ を隙間なく埋められると理解出来る。($\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ のなかで Hopf link の 1 つの loop を無限遠を通る loop として考えることも出来る。)

ここで 2 つの solid torus の表面の T^2 の homology の生成元のうち solid torus の中に含まれる方の cycle を α -cycle とし、 α -cycle と直交する方向の cycle を β -cycle とすると (図 2.4)、図 2.3 からわかるように貼り合わされる 2 つの solid torus の表面における cycle は一方の α -cycle が他方の β -cycle に対応し、逆に一方の β -cycle は他方の α -cycle に対応していることがわかる。

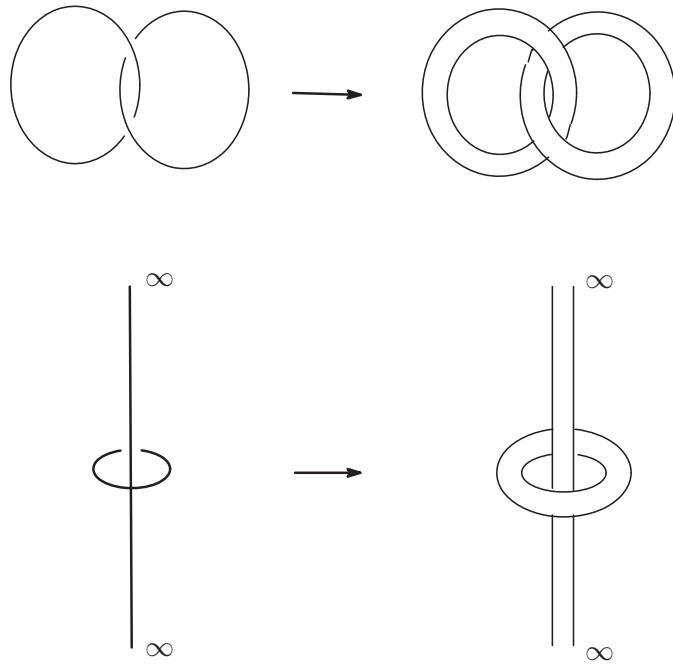


図 2.3: 2 つの solid torus の貼り合わせ

2 つの solid torus の表面を S 変換して貼り合わせるにより S^3 が得られる。

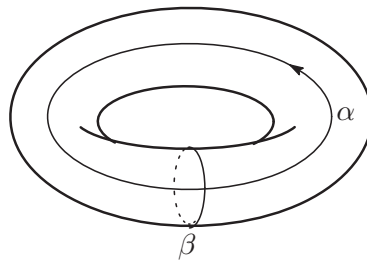


図 2.4: T^2 の 2 つの生成元

このことは torus の変換としてみると S 変換を表していて、このような分解による分配関数の計算を (2.7) のような形で表すと、

$$Z_k(S^3) = \langle \Psi_0 | S | \Psi_0 \rangle \quad (2.8)$$

となる。ここで $|\Psi_0\rangle \in \mathcal{H}(T^2)$ は Wilson loop が無い場合に solid torus の内部について (2.2) の経路積分を行って得られた T^2 上の状態であり、 S は $\mathcal{H}(T^2)$ に対する S 変換の作用である。

2 つの solid torus について、 S 変換を施して貼り合わせると S^3 が得られることを見たが、 S 変換を行わずにそのまま貼り合わせると $S^2 \times S^1$ が得られる。このことは solid torus が $\text{disk} \times S^1$ と表されること及び 2 つの disk の境界の S^1 を貼り合わせると S^2 になることから容易に理解出来るだろう。

2.1.4 $\mathcal{H}(\Sigma)$ の性質

再び一般の多様体 M の場合に戻り、Heegaard splitting によりどのように問題が簡単化されるかを見ることにする。最初に考えるのは多様体 M が M_1, M_2 に分解され、かつその境界 Σ が S^2 であるような場合である。このとき M の理論がトポロジカルである為 S^2 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}(S^2)$ は 1 次元であることがわかる。このとき M 上の分配関数は M_1 上の分配関数と M_2 上の分配関数及び S^3 上の分配関数から計算出来ることがわかる。このことは S^3 を境界 S^2 により 2 つの 3 次元球面 B^3 に分解出来ることから得られ、図 2.5 のように表せる。

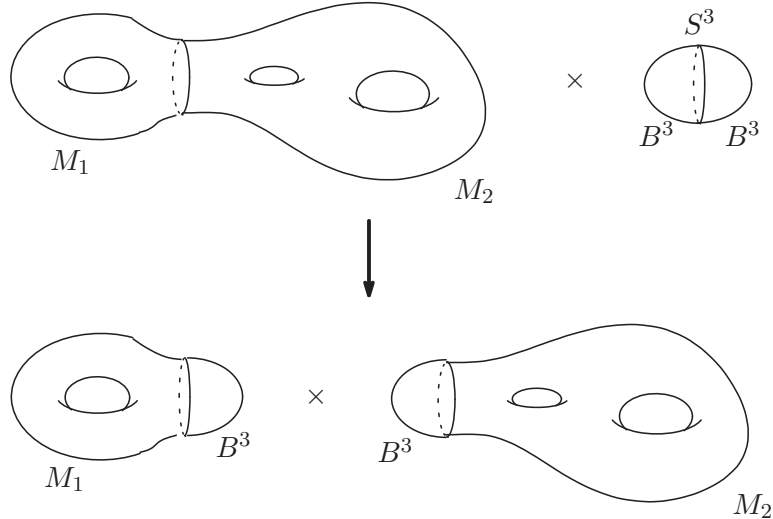


図 2.5: M_1 と M_2 の貼り合わせとその組み換え

Hilbert 空間の言葉で書けば、貼り合わせ変換 U を自明として、

$$\begin{aligned} Z_k(M) \cdot Z_k(S^3) &= \langle \Psi_{M_2} | \Psi_{M_1} \rangle \cdot \langle \Psi_{B^3} | \Psi_{B^3} \rangle \\ &= \langle \Psi_{M_2} | \Psi_{B^3} \rangle \cdot \langle \Psi_{B^3} | \Psi_{M_1} \rangle \\ &= Z_k(M_1) \cdot Z_k(M_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここで Hilbert 空間が 1 次元であることを用いて掛け算の順序を入れ替えた。これにより、

$$Z_k(M) = \frac{Z_k(M_1) \cdot Z_k(M_2)}{Z_k(S^3)} \quad (2.10)$$

が得られた。 M の中に Wilson loop が含まれている場合でも Wilson loop が S^2 と交わらないならば上と全く同様の議論により多様体を組み替えることが出来るが、Wilson loop が S^2 と交わる場合には、 S^2 上の Hilbert 空間がゲージ不変になるという要請が必要になる。 Wilson loop は S^2 上では n 個の点 P_i ($i = 1, \dots, n$) に表現 R_i が挿入された状態に対応し、実際に Hilbert 空間の元として現れるのは $\otimes_i R_i$ のうちの自明な表現に対応する部分のみである。但し Wilson loop には向きがあることに注意すると、ある向きで S^2 を横切った表現が R だった場合にその逆の向きで S^2 を横切る表現は S^2 上では R の共役表現 \bar{R} と表される。

2.1.5 HOMFLY 多項式

例として全ての表現が fundamental 表現 ($R = F$ と表記する) の場合に図 2.6 のように M_2 の中の 2 本の Wilson loop が S^2 と交わっている状況を考える。

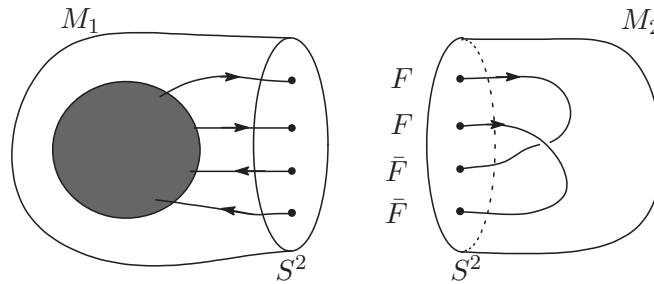


図 2.6: 部分多様体の中の 2 本の Wilson loop

このとき S^2 上では 2 つの F と 2 つの \bar{F} の表現が挿入されていることになるが、これらから自明な表現をつくる組み合わせは 2 通りあるので、図 2.6 の場合の S^2 上の Hilbert 空間の次元は 2 となる。図 2.6 の状態に対して Wilson loop を「ひねった」状態を図 2.7 に表す。

図 2.7 の (a), (b), (c) の 3 つの状態に対応した Hilbert 空間の元を $|\Psi_a\rangle, |\Psi_b\rangle, |\Psi_c\rangle \in \mathcal{H}(S^2)$ と書くと、これらの間に

$$\alpha|\Psi_a\rangle + \beta|\Psi_b\rangle + \gamma|\Psi_c\rangle = 0 \quad (2.11)$$

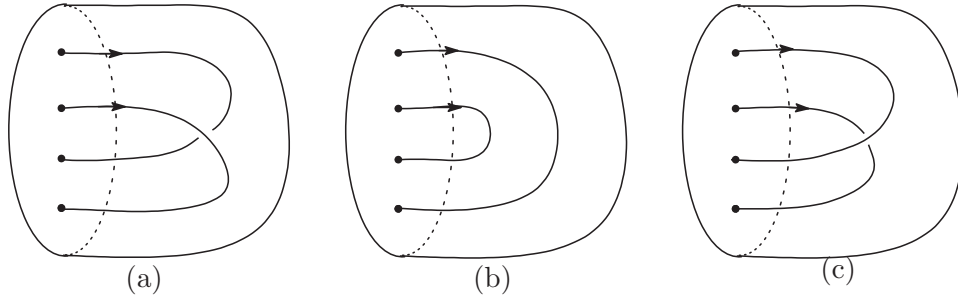


図 2.7: 3 通りの結び目の変形

という関係式が成り立つことがわかる。つまり Hilbert 空間が 2 次元である為にあらゆる 3 つの元に対して適当な $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ を選べば (2.11) が成り立つということである。この $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ の値の比は CFT の half-monodromy の議論から計算され [30]、得られた値は HOMFLY 多項式の skein relation と一致する。表現が全て fundamental 表現であるような絡み目については全て (2.11) を用いて絡み目を「ほどく」ことにより自明な表現に帰着させ Wilson loop の期待値を計算出来ることが知られている。

2.1.6 S^3 上の分配関数

この節ではまず 2.1 節で得られた S^3 上の分配関数がどのように normalize されるべきかを考える。この分配関数の normalization は後の章で Gopakumar-Vafa duality を考えるとき本質的に重要になる factor である。単純に考えると $Z_k(S^3) = 1$ と定義すればよいように思われるが、実際には自然な normalization は、

$$Z_k(S^2 \times S^1) = 1 \quad (2.12)$$

である。このことを見る為に一般に $X \times S^1$ という空間があったときに X 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}(X)$ の時間変化を考える。時間を $I = [0, 1]$ で表すと $\mathcal{H}(X)$ の元が $X \times \{0\}$ から $X \times \{1\}$ まで Hamiltonian の作用により時間発展するが、実際は理論がトポロジカルである為に Hamiltonian の作用は自明となる。 $X \times S^1$ を考える為には $X \times \{0\}$ と $X \times \{1\}$ を同一視して貼り合わせればよいが、このことは trace をとることに対応しており、

$$Z(X \times S^1) = \text{Tr}_{\mathcal{H}(X)}(1) = \dim \mathcal{H}(X) \quad (2.13)$$

となる。このことを $X = S^2$ の場合に用いれば (2.12) が得られる。

前節で示したとおり説明した通り $S^2 \times S^1$ は 2 つの solid torus に分解することが出来、 S^3 はその片方の torus に S 変換を作用して貼り合わせることで得られるので、 S^3 の分配関数は正しくは、

$$Z_k(S^3) = \frac{\langle \Psi_0 | S | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \langle \Psi_0 | S | \Psi_0 \rangle \quad (2.14)$$

と表される。つまり (2.8) は normalization まで含めて正しかったことがわかる。ここで $|\Psi_0\rangle \in \mathcal{H}(T^2)$ であり $Z_k(S^2 \times S^1) = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$ とした。(2.8) の値を具体的に求める為には $\mathcal{H}(T^2)$ の性質を詳しく調べる必要があるが、この T^2 上の Hilbert 空間は T^2 に対する modular 変換性 [31] との対応から T^2 上の Wess-Zumino-Witten(WZW) 模型³で与えられることがわかる [9, 32]。つまり $\mathcal{H}(T^2)$ の元と一対一に対応して、群 G 、レベル k の WZW 模型の可積分表現が存在する。このようにして S^3 上の分配関数は WZW 模型の可積分表現への modular 変換の作用の表現に帰着された。

補遺 Aの結果を用いると (A.52) より、

$$Z_k(S^3) = S_{00} = \frac{1}{(k+y)^{r/2}} \left(\frac{\text{vol}\Lambda_w}{\text{vol}\Lambda_r} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \left(\frac{\pi}{k+y} (\alpha, \rho) \right) \quad (2.15)$$

特に $G = SU(N)$ の場合は (A.53) を用いて [33]、

$$Z_k(S^3) = S_{00}^{SU(N)} = (k+N)^{-N/2} \left(\frac{k+N}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \left[2 \sin \left(\frac{j\pi}{k+N} \right) \right]^{N-j} \quad (2.16)$$

また $G = U(N)$ の場合は $G = SU(N)$ のときの (2.16) に $U(1)$ に対応した factor がかかり ($U(N) = U(1) \otimes SU(N)/\mathbb{Z}_n$)、

$$Z_k(S^3) = S_{00}^{U(N)} = (k+N)^{-N/2} \prod_{j=1}^{N-1} \left[2 \sin \left(\frac{j\pi}{k+N} \right) \right]^{N-j} \quad (2.17)$$

となる。

2.2 framing

今までの節では無視してきたが、実際には Wilson loop の相関関数は framing と呼ばれる量に依存する [9, 34]。framing とは結び目の self-linking に対する point-splitting による正則化の不定性のようなものであり、結び目の self-linking を自分自身から微小にずれた結び目の相関関数として定義するときどのような「ずらし方」をするかに依存して決まる量である。

2.2.1 $U(1)$ 部分

まずは簡単の為 $U(1)$ の場合を考える。これは $SU(N)$ の理論と $U(N) = U(1) \otimes SU(N)/\mathbb{Z}_n$ の理論の差を考える上でも重要であり、また $U(1)$ の理論では CS 作用の 3 次の項は 0 となるので、理論は非常に簡単化される。

³補遺 A 参照

まず2つの結び目 $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ の linking number $\text{lk}(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j)$ を、

$$\text{lk}(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{K}_i} dx^\mu \oint_{\mathcal{K}_j} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3} \quad (2.18)$$

と定義する。この $\text{lk}(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j)$ は $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ の変形に対して不変な位相不変量となっている。linking number を用いて framing を定義する為にはある結び目 \mathcal{K} に対して、 \mathcal{K} の「変形」 \mathcal{K}^f を定義する必要がある (図 2.8)。

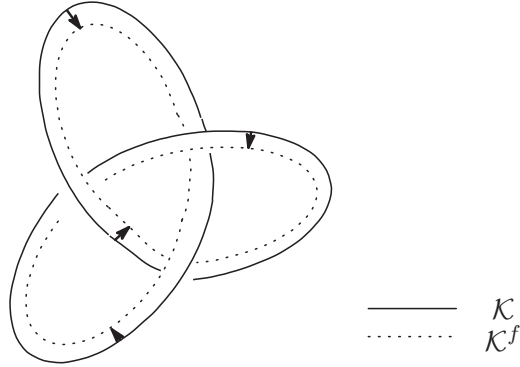


図 2.8: \mathcal{K} とその変形 \mathcal{K}^f

これは即ち \mathcal{K} 上に \mathcal{K} の方向と垂直な方向の vector 場を定義することであり、この vector 場の任意性 (図 2.9) が framing の不定性につながる。

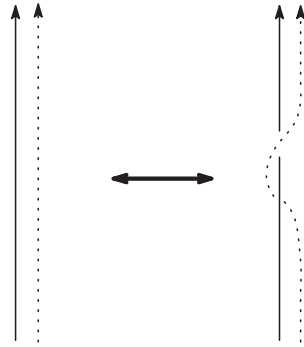


図 2.9: framing の不定性

vector 場の定義の任意性より左右で \mathcal{K}^f が異なり、framing が1ずれている。

このような \mathcal{K}^f が1つ与えられれば framing は、

$$\phi_f(\mathcal{K}) = \text{lk}(\mathcal{K}, \mathcal{K}^f) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{K}} dx^\mu \oint_{\mathcal{K}^f} dy^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3} \quad (2.19)$$

の値によって決定される。逆に言えば Wilson loop \mathcal{K}_i があつたときに理論の相関関数 (2.6) は $p_i = \phi_f(\mathcal{K}_i)$ の値に対応した不定性があるということである。この不定性は $U(1)$ の場合には (表現は charge n_i により決まる)、

$$\left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^r \exp(n_i \int_{\mathcal{K}_i} A) \right\rangle = \exp \left(\frac{\pi i}{k} \sum_{i=1}^r n_i^2 p_i + \frac{2\pi i}{k} \sum_{i<j}^r n_i n_j \text{lk}(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) \right) \quad (2.20)$$

となり、第 1 項に framing の依存性が現れていることがわかる。

$U(N)$ 理論においても $U(1)$ 部分は $SU(N)$ 部分から独立していて相互作用しないので、相関関数は $U(1)$ 部分と $SU(N)$ 部分に分離し、 $U(1)$ 部分では上で用いた議論がそのまま適用出来る。 $U(N)$ の表現は Young tableau で分類されるが、そこから求められる $SU(N)$ 及び $U(1)$ の表現は $SU(N)$ の表現として同じ Young tableau で表される表現を用い、 $U(1)$ については charge が

$$n = \frac{\ell(R)}{\sqrt{N}} \quad (2.21)$$

で与えられるとすればよい。ここで $\ell(R)$ は表現 R の Young tableau の box の数である。(2.21) で与えられた $U(1)$ charge を (2.20) に用いると $U(N)$ 理論の $U(1)$ 部分の期待値は ($k \rightarrow k + N$ を考慮して)、

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle^{U(N)} &= \exp \left(\frac{\pi i}{N(k+N)} \sum_{i=1}^r \ell(R_i)^2 p_i + \frac{2\pi i}{N(k+N)} \sum_{i<j}^r \ell(R_i) \ell(R_j) \text{lk}(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) \right) \\ &\quad \times \left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle^{SU(N)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。 S^3 の場合は canonical framing と呼ばれる標準的な framing が定義出来、これは self-linking number を 0 にする framing である。これは上の式において $p_i = 0$ とすることに対応しており、canonical framing では、

$$\left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle^{U(N), \text{cf}} = \exp \left(\frac{2\pi i}{N(k+N)} \sum_{i<j}^r \ell(R_i) \ell(R_j) \text{lk}(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) \right) \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i)^{SU(N), \text{cf}} \quad (2.23)$$

となる。

2.2.2 一般の G の場合

群が一般の G の場合 [9] については Wilson loop \mathcal{K}_i における G の表現を R_i としてその loop の framing の変化 p_i に対する相関関数の変化は、

$$\left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle \rightarrow \exp \left[2\pi i \sum_{i=1}^r p_i h_{R_i} \right] \left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle \quad (2.24)$$

となる。ここで h_R は表現 R に対応した WZW 模型の primary field の conformal weight であり、(A.32) より、

$$h_R = \frac{C_R}{2(k+y)} \quad (2.25)$$

である。但し $C_R = \sum_a t_R^a t_R^a$ は quadratic Casimir であり、 y は dual Coxeter 数 ($G = U(N), SU(N)$ ならば $y = N$) である。 $G = U(N)$ のとき表現は Young tableau l_i ($l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{d_R}$) で分類され、Young tableau を用いて quadratic Casimir を表すと、

$$C_R^{U(N)} = N\ell(R) + \kappa_R \quad (2.26)$$

となる。ここで、

$$\kappa_R = \ell(R) + \sum_j^{d_R} (l_j^2 - 2jl_j) \quad (2.27)$$

とした。 $G = SU(N)$ の場合には同じ κ_R を用いて、

$$C_R^{SU(N)} = N\ell + \kappa_R - \frac{l^2}{N} \quad (2.28)$$

となる。((2.26) と (2.28) の値の差は $U(1)$ charge の寄与 (2.21) の 2 乗と一致している。)

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+N}\right), \quad \lambda = q^N \quad (2.29)$$

とすると、 $U(N)$ の場合の framing の変化により相関関数は、

$$\left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle^{U(N)} \rightarrow q^{\frac{1}{2} \sum_i \kappa_{R_i} p_i} \lambda^{\frac{1}{2} \sum_i \ell(R_i) p_i} \left\langle \prod_{i=1}^r W_{R_i}(\mathcal{K}_i) \right\rangle^{U(N)} \quad (2.30)$$

となる。

2.3 Wilson loop の相関関数

2.3.1 knot operator

2.1.6 節では S^3 上の分配関数を求めたが、この節では更に observable として Wilson loop が入った場合を考える。Wilson loop の相関関数を計算する方法の 1 つに knot operator [28] を用いる方法がある。knot operator とは T^2 上の Hilbert space $\mathcal{H}(T^2)$ に作用して、 T^2 上に結び目がある状態を作り出す operator で、結び目 \mathcal{K} の表現 R (highest weight を $\hat{\mu}$ とする) ならば knot operator $W_{\hat{\mu}}^{\mathcal{K}}$ は、

$$W_{\hat{\mu}}^{\mathcal{K}} : \mathcal{H}(T^2) \rightarrow \mathcal{H}(T^2) \quad (2.31)$$

と作用し、結び目を作り出す。ただし、この operator は T^2 に作用するので全ての結び目を作り出すことは出来ず、torus knot と呼ばれる結び目 [27] のみを作り出すことが出来る。torus knot とは (n, m) という 2 つの整数で分類される結び目で、 n 本の line を torus 上の α -cycle の方向 (図 2.4 参照) に走らせて一周戻ってきたところで β 方向に m 本ずらして同一視するというように作られる。例えば $(1, 0)$ torus knot は unknot ⁴、 $(2, 2)$ torus knot は Hopf link ⁵、また $(2, 3)$ torus knot は trefoil knot を表している (図 2.1)。 n と m が互いに素でない場合には (knot という名に反して) 作られる loop は絡み目 (link) になる。 (n, m) torus knot を作る knot operator $W_{\hat{\mu}}^{(n, m)}$ の具体形は、

$$W_{\hat{\mu}}^{(n, m)}|\Phi_{\hat{\nu}}\rangle = e^{2\pi i n m h_{\hat{\mu}+\hat{\rho}}} \sum_{\xi \in M_{\mu}} \exp \left[-i\pi(\xi, \xi) \frac{nm}{k+N} - 2\pi i \frac{m}{k+N}(\nu + \rho, \xi) \right] |\Phi_{\hat{\nu}+n\xi}\rangle \quad (2.32)$$

となる。ここで $h_{\hat{\mu}+\hat{\rho}}$ は conformal weight で M_{μ} は highest weight μ の表現に対応した weight の集合である。このように作られた T^2 上の状態を用いれば S^3 内の torus knot に対応した Wilson loop の相関関数を計算することが出来、その為にはまず 2 つの solid torus を用意して片方の solid torus の表面の T^2 に knot operator を作用させ、最後にその torus に S 変換を施して 2 つの solid torus を貼り合わせればよい。この結果得られる Wilson loop の相関関数は $Z_k(S^3)$ (2.8) で normalize すると、

$$\langle W_{\hat{\mu}}^{(n, m)} \rangle = \frac{\langle \Phi_0 | S W_{\hat{\mu}}^{(n, m)} | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle} \quad (2.33)$$

となる。

2.3.2 unknot

特に $(n, m) = (1, 0)$ の場合この torus knot は unknot を表しているが、 $W_{\hat{\mu}}^{(1, 0)}$ の $|\Phi_0\rangle$ への作用は [28]、

$$W_{\hat{\mu}}^{(1, 0)}|\Phi_0\rangle = |\Phi_{\hat{\mu}}\rangle \quad (2.34)$$

で与えられ、これを用いて表現 $R_{\hat{\mu}}$ の unknot の相関関数を計算すると、

$$\langle (\text{unknot})_{R_{\hat{\mu}}} \rangle = \frac{\langle \Phi_0 | S W_{\hat{\mu}}^{(1, 0)} | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle} = \frac{\langle \Phi_0 | S | \Phi_{\hat{\mu}} \rangle}{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle} = \frac{S_{0\hat{\mu}}}{S_{00}} \quad (2.35)$$

となり、この式は Appendix の quantum dimension の式 (A.59) と一致していることがわかる。即ち、

$$\langle (\text{unknot})_{R_{\hat{\mu}}} \rangle = \dim_q \hat{\mu} \quad (2.36)$$

⁴ 実際には $(1, n)$ torus ($n \in \mathbb{Z}$) は全て unknot を表すが、それらは全て違う framing に属していることがわかる。

⁵ knot operator で作られた Hopf link は 2 つの loop が必ず同じ表現 R に属する為、別の表現 R_1, R_2 の場合の Hopf link は knot operator から直接計算することは出来ない。

よって $SU(N)$ の場合は (A.63) より表現 R の unknot の相関関数は、

$$\langle (\text{unknot})_R \rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq d_R} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]} \prod_{i=1}^{d_R} \frac{\prod_{v=-i+1}^{l_i} [v]_\lambda}{\prod_{v=1}^{l_i} [v - i + d_R]} \quad (2.37)$$

となる。ただし、

$$[x] = q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}, \quad [x]_\lambda \equiv \lambda^{\frac{1}{2}} q^{\frac{x}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{x}{2}} \quad (2.38)$$

とした。後の章の議論で用いる為、(2.37) における λ の leading power を考えると、この power は $\ell(R)/2$ になる。 λ の leading power の係数を W_R とすると、

$$\begin{aligned} W_R &= q^{\frac{1}{4}\kappa_R} \prod_{1 \leq i < j \leq d_R} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]} \prod_{i=1}^{d_R} \prod_{v=1}^{l_i} \frac{1}{[v - i + d_R]} \\ &= q^{\frac{1}{4}\kappa_R} \prod_{(i,j) \in Y_R} \frac{1}{q^{\frac{1}{2}h_R(i,j)} - q^{-\frac{1}{2}h_R(i,j)}} \\ &= S_R(x_i = q^{i-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

となり、ここで Y は表現 R の Young tableau で、 $h_R(i, j)$ はその hook length である。また表現 R の Schur 関数を S_R とした。

2.3.3 Hopf link

unknot の計算において分配関数の計算の場合と違いが現われた点は、片方の T^2 上で $\mathcal{H}(T^2)$ の状態が $|\Phi_0\rangle \rightarrow |\Phi_{\hat{\mu}}\rangle$ と変化した点である。即ちこれは変化した側の solid torus の内部に β -cycle の方向に沿った unknot が生成されたことを意味する。つまり $|\Phi_0\rangle$ が内部に何も入っていない solid torus の表面を表す $\mathcal{H}(T^2)$ の状態であったのに対して、 $|\Phi_{\hat{\mu}}\rangle$ は内部に Wilson loop を含んだ状態である。この事実を用いると Hopf link は 2 つの solid torus のそれぞれに Wilson loop を含めた状態として実現出来、Hopf link の期待値はそのように 2 つの状態の間の S 変換の行列成分として計算出来るが、ここで注意すべき点は Hopf link には図 2.1 で表わされるように 2 種類あり、それぞれ linking number $+1$ と -1 を持っていることである。この 2 つの違いは Wilson loop の向きの違いとなるので、表現の違いとして一方の状態が他方の状態の共役表現の状態として現れる。linking number が -1 の時は Hopf link のそれぞれの loop の表現を $R_{\hat{\mu}}, R_{\hat{\nu}}$ とすると Hopf link の相関関数は、

$$\langle (\text{Hopf link})_{R_{\hat{\mu}}, R_{\hat{\nu}}}^{-1} \rangle = \frac{\langle \Phi_{\hat{\mu}} | S | \Phi_{\hat{\nu}} \rangle}{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle} = \frac{S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{S_{00}} \quad (2.40)$$

と表せる。linking number が $+1$ の時は、

$$\langle (\text{Hopf link})_{R_{\hat{\mu}}, R_{\hat{\nu}}}^{+1} \rangle = \frac{\langle \Phi_{\hat{\mu}} | CS | \Phi_{\hat{\nu}} \rangle}{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle} = \frac{(CS)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{S_{00}} = \frac{S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{-1}}{S_{00}} \quad (2.41)$$

ただし C は charge conjugation 作用素であり、 $S^2 = C, C^2 = 1$ であることを用いた。Hopf link の場合は $U(N)$ の場合の相関関数と $SU(N)$ の場合の相関関数の間に 2 つの loop の linking number に応じて (2.23) による補正が入り、Hopf link の表現を R_1, R_2 、linking number を $+1$ とすると、

$$\langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_2}^{\pm 1} \rangle^{U(N)} = q^{\pm \ell(R_1)\ell(R_2)/N} \langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_2}^{\pm 1} \rangle^{SU(N)} \quad (2.42)$$

となる。 $N \rightarrow \infty$ で (2.41) は [35]、

$$\langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_2}^{\pm 1} \rangle^{U(N)} = s_{R_1}(q^\rho) s_{R_2}(q^{\mu_2+\rho}) \quad (2.43)$$

となる。ここで μ_i は表現 R_i の Young tableau を表し、 $q^\rho, q^{\mu_2+\rho}$ はそれぞれ、

$$s_R = (x_i = q^{-i+\frac{1}{2}}) \quad (2.44)$$

$$s_R = (x_i = q^{l_i-i+\frac{1}{2}}) \quad (2.45)$$

という代入を意味する。

2.3.4 応用

上で Hopf link の相関関数を求めたので、それを用いて図 2.10 のような 3 つの loop の絡み目 ($L(R_1; R_2, R_3)$ と表す) の相関関数を計算出来る。

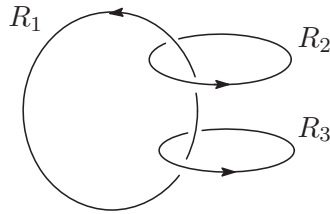


図 2.10: 絡み目 $L(R_1; R_2, R_3)$

その為には補助的に表現 R_1 の unknot を用意し、 $L(R_1; R_2, R_3)$ と組み替えることを考える (図 2.11) が、このとき Riemann 面上には表現 R, \bar{R} のみが挿入されているので Hilbert 空間の次元は 1 となり (2.9) と同様の議論により、

$$\langle L(R_1; R_2, R_3) \rangle \langle (\text{unknot})_{R_1} \rangle = \langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_2}^{\pm 1} \rangle \langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_3}^{\pm 1} \rangle \quad (2.46)$$

が示される。よって、

$$\langle L(R_1; R_2, R_3) \rangle = \frac{\langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_2}^{\pm 1} \rangle \langle (\text{Hopf link})_{R_1, R_3}^{\pm 1} \rangle}{\langle (\text{unknot})_{R_1} \rangle} \quad (2.47)$$

となり⁶、この式は後の章でトポロジカルストリングの 3 点 vertex を計算するときに見れる。

⁶ $\langle L(R_1; R_2, R_3) \rangle$ を fusion 係数として表せばこの式は Verlinde formula を意味している。

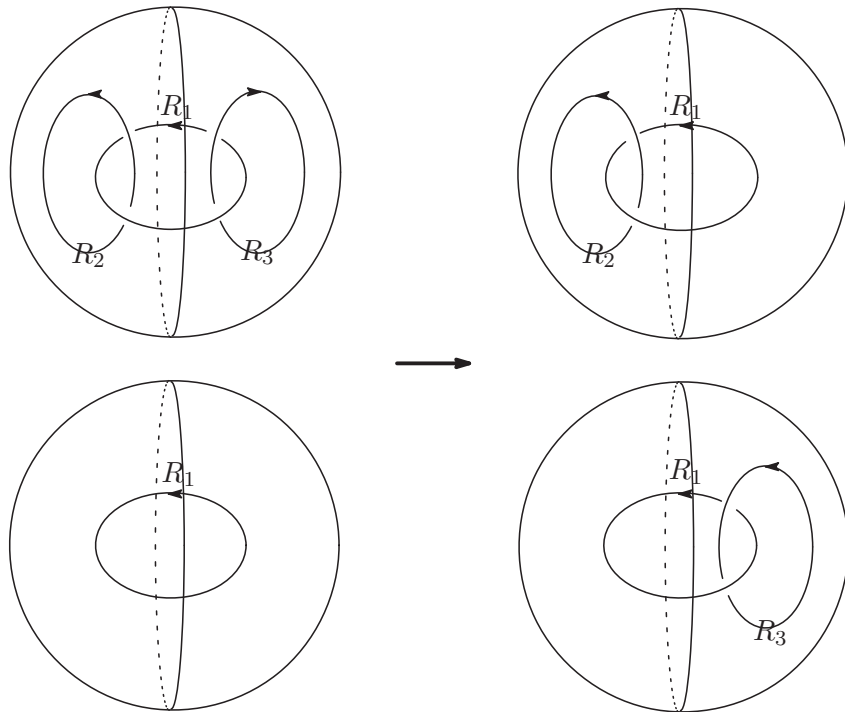


図 2.11: R_1 の unknot と $L(R_1; R_2, R_3)$ との組み替え

この組み替えを用いることにより、 $L(R_1; R_2, R_3)$ の期待値を unknot の期待値と Hopf link の期待値で表せる。

第3章 toric 幾何と conifold transition

この章では後の章で用いる toric 幾何について概説する。特に resolved conifold と deformed conifold の toric 幾何的記述は後の章で非常に重要になる。この章では物理的に必要な最小限程度の記述のみにとどめ、より厳密には [36, 37] などを参照されたい。

3.1 toric diagram

toric 多様体とは、簡単に言うと $U(1)^d$ の作用を受けるような多様体で、しかもその $U(1)^d$ 作用が縮退し得るようなものである。具体的には、例えば base の多様体として \mathbb{R}^d を考え、その上に T^d の fibration を考えると、fiber の T^d には $U(1)^d$ が作用するが、 T^d の cycle(の一部) がつぶれている場合には $U(1)^d$ の作用(の一部) がつぶれることがわかる。このような場合に \mathbb{R}^d 上の何処でどの cycle がつぶれるかを指定した diagram を toric diagram と呼び、逆に toric 多様体はこれだけの条件から復元される。以下では例を挙げて toric diagram がどのようなものかを見ていく。

3.1.1 \mathbb{C} の toric diagram

最も単純な例として、複素平面 \mathbb{C} の toric diagram を考える。 $z \in \mathbb{C}$ (無限遠点は除く) に対して $U(1)$ が作用し、

$$U(1) \ni e^{i\alpha} : z \rightarrow e^{i\alpha} z \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.1)$$

となる。もしくは、 z を極座標表示で (r, θ) と表し、base の多様体 \mathbb{R}^+ ($r \in \mathbb{R}^+$) 上の S^1 fibration ($\theta \in S^1$) と考えることも出来る。(3.1) の作用を見る上で、 $z = 0$ のときに $U(1) : 0 \rightarrow 0$ となり、この点で $U(1)$ 作用が縮退しているということが重要である。この場合 toric diagram は図 3.1 のように表すことが出来る。

図 3.1 は、base 多様体 \mathbb{R}^+ 上に S^1 fibration があるが、 \mathbb{R}^+ の一点 $0 \in \mathbb{R}^+$ で fiber の S^1 がつぶれているということを意味している。逆に図 3.1 の情報が与えられれば、 \mathbb{R}^+ 上に S^1 を fibrate して、 $0 \in \mathbb{R}^+$ で fiber をつぶして構成することにより \mathbb{C} の幾何的構造が再現される。ここで $0 \in \mathbb{R}^+$ で fiber はつぶれているが、これはこの点で多様体が singular になっているという意味ではないことに注意されたい。実際この点は $0 \in \mathbb{C}$ を表していて、fiber がつぶれる点は座標の取り方に依存している。

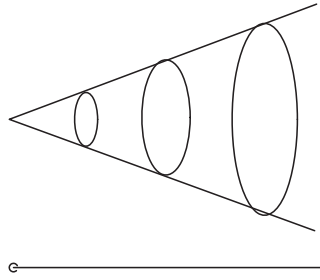


図 3.1: \mathbb{C} の toric diagram

半直線上の S^1 fiber が左端の点で縮退している。

3.1.2 \mathbb{P}^1 の toric diagram

次に $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ の toric diagram を考える。 \mathbb{P}^1 を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ として表せば $z \in \mathbb{P}^1$ への $U(1)$ の作用は (3.1) の場合と全く同じで、

$$U(1) \ni e^{i\alpha} : z \rightarrow e^{i\alpha} z \quad (z \in \mathbb{P}^1) \quad (3.2)$$

となる。ここで \mathbb{C} との相違点は、 \mathbb{C} では base の多様体は \mathbb{R}^+ という半直線であったが、 \mathbb{P}^1 では base の多様体は $[0, \infty]$ という線分であり、 $U(1)$ 作用は $0 \in [0, \infty]$ に加えて $\infty \in [0, \infty]$ でも縮退しているという点である。即ち \mathbb{P}^1 の toric diagram は図 3.2 のようになる。

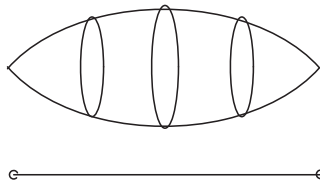


図 3.2: \mathbb{P}^1 の toric diagram

線分上の S^1 fiber が両端で縮退している。

この図は線分の両端で S^1 がつぶれていることを表しており、これは S^2 を経度と緯度で表したとき北極と南極で緯度が縮退していることと同様である。更に図 3.2 からわかることは、線分の両端の近傍では diagram は \mathbb{C} の場合の図 3.1 と全く同じになっており、 \mathbb{P}^1 の北半球と南半球はそれぞれ \mathbb{C} に同型であることを表している。

以上の 2 例が特に簡単であったのは、fiber が S^1 であり、 S^1 には 1 つの cycle しかないという点である。また base の多様体も 1 次元なので、diagram では base の余次元 1 の部分、即ち 0 次

元の点で S^1 がつぶれていた。一般の toric diagram では fiber の cycle の次元が高くなり、fiber がつぶれるといったときに「どの cycle がつぶれるか」ということを指定する必要がある。更に一般に base の余次元 1 の部分で 1 つの cycle がつぶれるが、複数の cycle がある場合は、余次元 n の部分で n 個の cycle がつぶれるというように一般化される。次の例として \mathbb{C}^3 を見るが、この場合は base は \mathbb{R}^3 であり fiber は $T^2 \times \mathbb{R}$ であることがわかる。後の章で 3 次元 toric Calabi-Yau 多様体を考えるときに、全ての多様体は局所的に \mathbb{C}^3 に同型であることから Calabi-Yau 多様体を \mathbb{C}^3 に分解することが出来、 \mathbb{C}^3 上のトポロジカルストリングの相互作用として 3 点 vertex が現れることを見る。

3.1.3 \mathbb{C}^3 の toric diagram

上述の通り \mathbb{C}^3 を toric 幾何として記述すると base の \mathbb{R}^3 に対して fiber は T^3 ではなく $T^2 \times \mathbb{R}$ となる。 $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ という \mathbb{C}^3 の座標に対して、base の \mathbb{R}^3 の座標 $(r_\alpha(z), r_\beta(z), r_\gamma(z)) \in \mathbb{R}^3$ を、

$$r_\alpha = |z_1|^2 - |z_3|^2 \quad (3.3)$$

$$r_\beta = |z_2|^2 - |z_3|^2 \quad (3.4)$$

$$r_\gamma = \text{Im}(z_1 z_2 z_3) \quad (3.5)$$

で定義する。fiber に対する $U(1)^2 \simeq T^2$ の作用は、base の座標を不変に保つような作用として、

$$U(1)^2 \ni (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (e^{i\alpha} z_1, e^{i\beta} z_2, e^{-i(\alpha+\beta)} z_3) \quad (3.6)$$

とする。(3.6) の変換の他に (3.3,3.4,3.5) を不変に保つような作用 $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ への作用としては、例えば z_3 を定数 ($\in \mathbb{R}$) 倍すると同時に z_1, z_2 を (3.3,3.4,3.5) を変えないようにそれぞれ適当に定数倍する作用があり、これが \mathbb{R} に対応する fiber であることがわかる。このようにして \mathbb{C}^3 を \mathbb{R}^3 上の $T^2 \times \mathbb{R}$ fiber として実現することが出来たが、 $U(1)^2$ 及び \mathbb{R} の作用は $r_{\alpha,\beta,\gamma}$ を「Hamiltonian」として symplectic 形式 $\omega = i \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$ に対する Poisson 括弧 $\{, \}_\omega$ で生成されると考えることが出来る。即ち、

$$\partial_\epsilon z_i = -\{\epsilon \cdot r, z_i\}_\omega \quad (3.7)$$

とすれば、 ω の具体形より $\{z_i, z_j\} = \{\bar{z}_i, \bar{z}_j\} = 0, \{z_i, \bar{z}_j\} = i\delta_{ij}$ となり、(3.6) が確かめられる。次に、このようにして得られた $U(1)^2$ 作用が base のどの点で縮退しうるかということを考える。(3.6) で定義された T^2 の cycle のうち $e^{i\alpha}$ の作用に対応する cycle を (0, 1)-cycle (\simeq (0, -1)-cycle)、 $e^{i\beta}$ の作用に対応する cycle を (-1, 0)-cycle (\simeq (1, 0)-cycle) と表記する。まず (0, 1)-cycle がつぶれる場合は $e^{i\alpha}$ の作用が縮退しているので $z_1 = z_3 = 0$ であり、このとき $r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta \geq 0$ であることがわかる。言い換えれば base の \mathbb{R}^3 の中の $r_\alpha = r_\gamma = 0, r_\beta \geq 0$ という部分で T^2 の内の

(0, 1)-cycle がつぶれているということである。これは \mathbb{R}^3 の中で $r_\gamma = 0^1$ の r_α - r_β 平面 ($\simeq R^2$) の上の toric diagram で表すことが出来 (図 3.3)、座標の原点から $r_\alpha = 0, r_\beta \geq 0$ の方向にのびた半直線の上で (0, 1)-cycle がつぶれている。

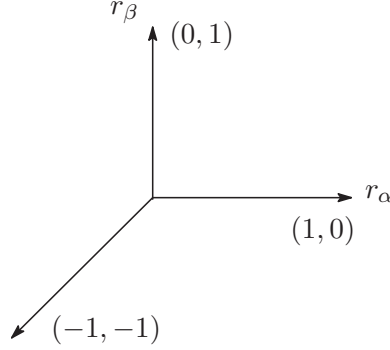


図 3.3: \mathbb{C}^3 の toric diagram

この図は r_α - r_β 平面に描かれていて、図中のラベル (p, q) に対応して T^2 の (p, q) cycle がつぶれる。

ここで r_α - r_β 平面 ($r_\gamma = 0$) で (0, 1) 方向に向いた直線の上で (0, 1) cycle がつぶれるという一致が得られたが、座標の取り方を選ぶことによりこのような一致が可能であることは一般に多様体の正則性から保障される²。即ち toric diagram での torus の縮退を表す直線は、base の多様体上で torus が縮退する位置を表すと同時に、どの cycle がつぶれるか³も表していることがわかり、逆に toric diagram から toric 多様体を復元する場合には (0, 1) 方向の直線上では (0, 1) cycle がつぶれるというように、直線の角度からつぶれる cycle を規定して構成する。また 2 つの直線が交わる場所では T^2 の 2 つの cycle が両方つぶれており、torus の自由度は完全に無くなっている。

(0, 1)-cycle の場合と同様に、(1, 0)-cycle の場合を考えると、(1, 0)-cycle がつぶれる点では $e^{-i\beta}$ の作用が縮退するので $z_2 = z_3 = 0$ であり、そのとき $r_\beta = r_\gamma = 0, r_\alpha \geq 0$ となる。最後に (1, 1)-cycle ($\simeq (-1, -1)$ -cycle) の場合を考えると、この cycle に対応した $U(1)$ の作用が、

$$U(1)_{(1,1)} \ni e^{i\theta} : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (e^{i\theta} z_1, e^{-i\theta} z_2, z_3) \quad (3.8)$$

となることから、(1, 1)-cycle がつぶれるのは $z_1 = z_2 = 0$ 上であることがわかり、このとき

¹他の cycle の場合も同様に調べると T^2 がつぶれる部分は全て $r_\gamma = 0$ 上にあることがわかる。

²一般の toric Calabi-Yau 多様体を考えるときに M-theory/ S^1 と IIB/ T^2 の dual を用いて Calabi-Yau 多様体を IIB の (p, q) 5-brane として表すことが出来る [38] が、このとき BPS 条件より (p, q) 5-brane の charge に対応する (p, q) と空間内での (p, q) 5-brane の方向に対応する (p, q) が一致する [39]。

³ただし (p, q) -cycle と $(-p, -q)$ -cycle は同一視する。

$r_\alpha - r_\beta = r_\gamma = 0, r_\alpha \neq 0$ である。このようにして全ての結果を合わせると、

つぶれる cycle	\mathbb{C}^3 における位置	base の位置
(0, 1) cycle	$z_1 = z_3 = 0 \Rightarrow$	$r_\alpha = 0, r_\beta \geq 0$
$(-1, 0) \simeq (1, 0)$ cycle	$z_2 = z_3 = 0 \Rightarrow$	$r_\beta = 0, r_\alpha \geq 0$
$(1, 1) \simeq (-1, -1)$ cycle	$z_1 = z_2 = 0 \Rightarrow$	$r_\alpha = r_\beta \leq 0$

(3.9)

となり、図 3.3 が得られる。

ここで注意すべきことは、実際には T^2 の cycle の基底の定義には $SL(2, \mathbb{Z})$ の不定性があることであり、cycle に対して $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換を施したものは一見、図 3.3 とは異なった形に見えるが、実際には同じ \mathbb{C}^3 を表しているということである。つまり適当な $(i, j), (k, l), (-i - k, -j - l)$ という 3 つの cycle⁴ に対応した直線が 1 点で交わる toric diagram があったときに $il - jk = 1$ ならば、

$$A = \begin{pmatrix} l & -j \\ -k & i \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (3.10)$$

によって、

$$A: \begin{array}{ll} (i, j) & \rightarrow (1, 0) \\ (k, l) & \rightarrow (0, 1) \\ (-i - k, -j - l) & \rightarrow (-1, -1) \end{array} \quad (3.11)$$

となり図 3.3 に一致する (図 3.4)。

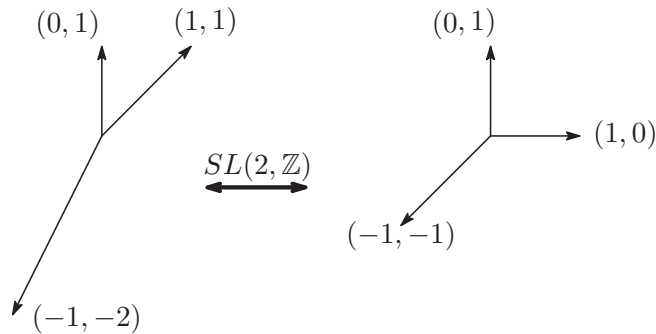


図 3.4: T^2 の cycle の基底の変換に対する \mathbb{C}^3 の toric diagram の変換

一般の Calabi-Yau 多様体を考えるときには toric diagram は \mathbb{C}^3 の場合に比べて複雑になるが、「3 点 vertex」の部分だけ見れば全て T^2 の cycle の再定義により \mathbb{C}^3 と同型になることがわかる。すなわち全ての多様体は局所的には \mathbb{C}^3 とみなせるということを意味している。 T^2 の cycle の全体としての再定義は多様体に全く影響を与えないが、複数の \mathbb{C}^3 がつながったような多様体において相対的な cycle の違いは全体の多様体のトポロジーに大きく影響し、実際に相対的な基底のとり方を変えた 2 つの toric diagram は違う多様体を表わしている (図 3.5)。

⁴3 つ目の cycle が $(-i - k, -j - l)$ となるのは (p, q) 5-brane における charge 保存に対応している。

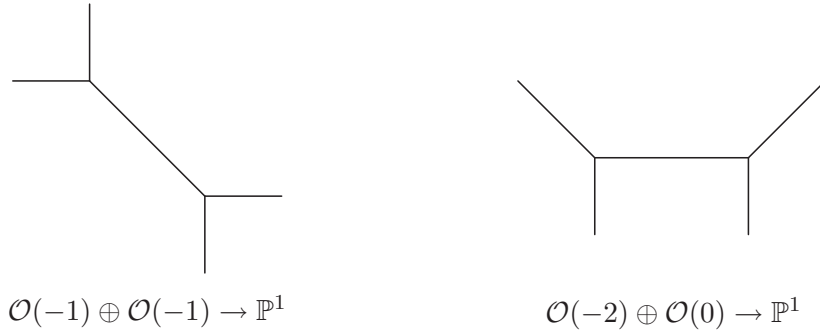


図 3.5: $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ と $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(0) \rightarrow \mathbb{P}^1$

どちらも 2 つの \mathbb{C}^3 をつないだ多様体だが、相対的な homology が異なっている。

3.1.4 Calabi-Yau 多様体の構成

toric 幾何において Calabi-Yau 多様体を構成するために ([40] 参照)、 $X = \mathbb{C}^n$ を Lagrangian 部分多様体 L 上の T^n fibration として扱い、更に X の symplectic quotient をとることで toric 多様体を定義する。

まず X の座標を $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ とし Kähler 形式を $\omega = i \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$ とすると、 ω は

$$\omega = \sum_i d|z_i|^2 \wedge d\theta^i \quad (3.12)$$

とも表される (θ^i は z_i 平面の角度を表わす変数) ので、Lagrangian 部分多様体 $L \simeq \mathbb{R}^n \in \mathbb{C}^n$ を $\theta^i = \text{const.}$ と選ぶことが出来る。すなわち $\theta^i = \text{const.}$ という平面上では $d\theta^i = 0$ より (3.12) で $\omega = 0$ となり、Lagrangian 部分多様体の条件を満たしている。このとき L の座標は $|z_i|^2$ で与えられ θ^i には依らないので、 θ^i まで含めた全空間 \mathbb{C}^n において θ^i は T^n fibration に相当し、結局 \mathbb{C}^n は L 上の T^n fibration として記述される。(ただし $|z_i|^2 = 0$ のとき z_i は θ^i に依存しないので、この T^n fiber は $|z_i|^2 = 0$ となるところで縮退する。) このように構成された X において $U(1)^n \simeq T^n$ は X に対して $z_i \rightarrow e^{i\theta^i} z_i$ と作用し、この作用で (3.12) の Kähler 形式は保存しているが、単純に X をこの $U(1)^n$ の部分群で割っただけのものは一般には smooth にも Kähler にもならない。しかし、実際に symplectic quotient という方法により Kähler 多様体を構成することが出来ることを以下に示す。

symplectic quotient を行うためにまず $G = U(1)^{n-k} \in U(1)^n$ として、 G の X への作用を、

$$G \ni (e^{i\epsilon_1}, \dots, e^{i\epsilon_{n-k}}) : z_i \rightarrow e^{i \sum_a Q_i^a \epsilon_a} z_i \quad (3.13)$$

とする。ここで Q_i^a ($i = 1, \dots, n$, $a = 1, \dots, n-k$) は z_i に対する a 番目の $U(1)$ の作用の charge である。このような G の作用を用いると、 X の G による symplectic quotient $Y = X//G$ は、そ

それぞれの $a = 1, \dots, n - k$ に対して、

$$\sum_i Q_i^a |z_i|^2 = r^a \quad (3.14)$$

という条件を満たす X の部分多様体⁵を、更に (3.13) による作用で割ることにより定義される。この定義は1章で扱った2次元の(2,2)SUSYのゲージ理論でゲージ群を $G = U(1)^{n-k}$ として、 n 種類の間 Φ^i の $U(1)$ charge を Q_i^a で与えることにより自然に実現されることが知られている。その意味では (3.14) は D-term potential D^a が最小になる $D^a = 0$ の条件を表わしていて、更に G の作用で割ることはゲージ非同値な真空を選び出すことに対応している [14]。このようにして得られた k 次元多様体 Y の性質として、一般的な r_a の値において G は (3.14) に自由に作用するので、 $Y = X//G$ は smooth な多様体になる。また Y の Kähler 形式 ω_Y は X の Kähler 形式 ω を (3.14) で定められる部分多様体上に制限し G の作用で割ったものとして定義され、 Y はこの ω_Y により Kähler 多様体となる。

Y の別の定義は G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ を用いて Y を $X/G^{\mathbb{C}}$ と見ることにより得られる [41]。つまり D-term 条件を課し更にゲージ群 G で割るという操作を $G^{\mathbb{C}}$ で割るという操作として表わすことを意味しており、具体的には、

$$z_i \sim \prod_a (\lambda_a)^{Q_i^a} \quad \lambda_a \in \mathbb{C}^* \quad (3.15)$$

という作用で X を割り、更に X の適当な部分多様体を除いて得られる多様体とすることで Y を定義出来る。

このように定義された Kähler 多様体が更に (non-compact な) Calabi-Yau 多様体になるためにはそれぞれの a に対して Q_i^a が、

$$\sum_{i=1}^n Q_i^a = 0 \quad (3.16)$$

という条件⁶を満たせばよい。その場合は holomorphic n 形式 $\Omega = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ は $G^{\mathbb{C}}$ 不変であり、 Y の holomorphic k 形式 Ω_Y はこの Ω 及び $G^{\mathbb{C}}$ の生成子による縮約作用 $i_{g^1}, \dots, i_{g^{n-k}}$ を用いると、

$$\Omega_Y = i_{g^1} \dots i_{g^{n-k}} \Omega \quad (3.17)$$

として得られるので、この Ω_Y により Y は Calabi-Yau 多様体となる。

⁵ここで右辺の r_a は Kähler moduli に対応するが、実際には Kähler moduli は複素化された $t_a \in \mathbb{C}$ というパラメータで表わされているので、そのような t_a を用いて書けば (3.14) の右辺は $\text{Re} t_a$ となる。

⁶(3.16) を満たすためには Q_i^a のいくつかは負の値をとり、そのような charge をもった場合は Calabi-Yau 多様体の non-compact な方向に対応する。

3.1.5 $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の toric diagram

具体的な Calabi-Yau 多様体の例として、 $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ という \mathbb{P}^2 上の $\mathcal{O}(-3)$ bundle を考える。 $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ は $(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$ に対して $U(1)$ ($\simeq U(1)^{4-3}$) の charge Q_i を $Q_i = (-3, 1, 1, 1)$ として symplectic quotient を行うことにより得られる複素 3 次元多様体である。但し $(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$ の中の (z_1, z_2, z_3) が \mathbb{P}^2 の斉次座標を表わし、 z_0 が $\mathcal{O}(-3)$ bundle の座標を表わしている。即ち $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ は $U(1)$ の作用を、

$$U(1) \ni e^{i\theta} : (z_0, z_1, z_2, z_3) \rightarrow (e^{-3i\theta} z_0, e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2, e^{i\theta} z_3) \quad (3.18)$$

と定義し、更に、

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 3|z_0|^2 = r \quad (3.19)$$

という D-term 条件を満たす \mathbb{C}^4 の部分多様体を、 $U(1)$ の作用 (3.18) で割ったものとして与えられる。ここで $U(1)$ の作用の charge Q_i は (3.16) で与えられた Calabi-Yau 条件 $\sum_i Q_i = 0$ を満たすので、 $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ は Calabi-Yau 多様体であることがわかり、また (3.19) の r は $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の Kähler moduli (の実部) に対応している。

ここで $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ に対する torus の作用を具体的に見る為に、この多様体を $z_i \neq 0$ で定義される 3 つの部分 U_i ($i = 1, 2, 3$) に分けて考える。 $(U_i$ は \mathbb{C}^3 に同型であり、例えば U_3 の場合では $z_3 \neq 0$ より (3.19) の条件を満たすために $|z_3|$ の自由度を用いることとし、 U_3 の座標を (z_0, z_1, z_2) と出来る。このとき残った z_3 の phase の自由度は (3.18) の作用で割ることで消える為、結局 z_3 の自由度は完全に失われ、 U_3 は $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ の自由度で記述されることがわかる。) \mathbb{C}^3 の場合と同じようにして base の座標 $(r_\alpha, r_\beta, r_\gamma) \in \mathbb{R}^3$ を、

$$r_\alpha = |z_1|^2 - |z_0|^2 \quad (3.20)$$

$$r_\beta = |z_2|^2 - |z_0|^2 \quad (3.21)$$

$$r_\gamma = \text{Im}(z_0 z_1 z_2 z_3) \quad (3.22)$$

とし、 α で生成される cycle を $(0, 1)$ cycle、 β で生成される cycle を $(-1, 0)$ cycle とすると、 U_3 においては \mathbb{C}^3 の場合と全く同様 ($z_3 \rightarrow z_0$ と読み替える) にして (3.9) と図 3.3 が得られる。しかし U_2, U_1 においては多少状況が異なり、例えば U_2 では座標として用いるのは (z_0, z_1, z_3) である為にそのままの形では (3.21) を用いることが出来ない。 U_2 においては r_α は (3.20) で与えられるが、 r_β は、

$$r_\beta = t + 2|z_0|^2 - |z_1|^2 - |z_3|^2 \quad (3.23)$$

と変更を受け、この r_β を用いた Hamiltonian の作用は、

$$U(1)^2 \ni (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) : (z_0, z_1, z_3) \rightarrow (e^{-i(\alpha-2\beta)} z_0, e^{i(\alpha-\beta)} z_1, e^{-i\beta} z_3) \quad (3.24)$$

となる。この作用から U_2 において $U(1)$ の作用が縮退する点を求めると、

つぶれる cycle	U_2 における位置	base の位置
$(0, 1) \simeq (0, -1)$ cycle	$z_0 = z_1 = 0 \Rightarrow r_\alpha = 0, r_\beta \leq t$	
$(-1, 1) \simeq (1, -1)$ cycle	$z_0 = z_3 = 0 \Rightarrow r_\alpha = t - r_\beta \geq 0$	
$(-1, 2)$ cycle	$z_1 = z_3 = 0 \Rightarrow r_\alpha = \frac{1}{2}(t - r_\beta) \leq 0$	

(3.25)

となる。 U_1 の場合も U_2 の場合とほぼ同様だが、この場合は z_1 を用いることが出来ないので r_α が変更を受け、

$$r_\alpha = t + 2|z_0|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 \quad (3.26)$$

となる。 r_β は (3.21) の式をそのまま用いることが出来、Hamiltonian の作用は、

$$U(1)^2 \ni (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) : (z_0, z_1, z_3) \rightarrow (e^{i(2\alpha-\beta)} z_0, e^{-i(\alpha-\beta)} z_1, e^{-i\alpha} z_3) \quad (3.27)$$

となる。この $U(1)$ の作用が縮退する点を U_1 上で求めると、

つぶれる cycle	U_1 における位置	base の位置
$(-1, 0)$ cycle	$z_0 = z_2 = 0 \Rightarrow r_\beta = 0, r_\alpha \leq t$	
$(-1, 1)$ cycle	$z_0 = z_3 = 0 \Rightarrow r_\beta = t - r_\alpha \geq 0$	
$(-2, 1) \simeq (-1, 2)$ cycle	$z_2 = z_3 = 0 \Rightarrow r_\beta = \frac{1}{2}(t - r_\alpha) \leq 0$	

(3.28)

これらの結果を全て合わせて toric diagram を描くと図 3.6 のようになる。

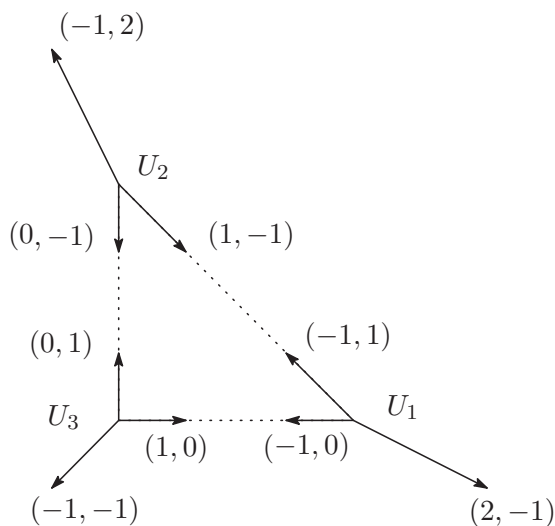


図 3.6: $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の toric diagram

3.1.6 toric diagram の別の描き方

上記のような toric diagram の構成は、より複雑な多様体に対してはあまり効果的でなく、 \mathbb{C}^n から symplectic quotient として toric 多様体を構成する場合の $U(1)^{n-k}$ の charge の情報から比較的簡単に toric diagram を描く方法がある [42]。

具体的には、まず $U(1)^{n-k}$ の charge $Q_i^a (i = 1, \dots, n, a = 1, \dots, n-k)$ に対して $\vec{v}_i \in \mathbb{Z}^3$ を、

$$\sum_i Q_i^a \vec{v}_i = 0 \quad (3.29)$$

を満たすように選ぶ。例えば $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の場合、 $n = 4, a = 1$ で $Q_i = (-3, 1, 1, 1)$ で与えられているので (3.29) を満たすためには、

$$\begin{aligned} 1 \times (-3) + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 &= 0 \\ 0 \times (-3) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 &= 0 \\ 0 \times (-3) + 0 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

となり、 \vec{v}_i が決定される。ここで \vec{v}_i の 1 行目が全て 1 となっているのは、Calabi-Yau 条件 (3.16) より (3.29) の条件を自明に満たすものとして全ての i に対して 1 とするという解があるからである。よってこれらの \vec{v}_i は全て同じ平面上にあることがわかる。ここで更に $\vec{w}_i \in \mathbb{Z}^2$ を \vec{v}_i から 1 行目を除いたものとして定義する。 $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の場合、

$$\vec{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

となる。この情報から toric diagram を描くためにはまず 2 次元平面上に (3.31) で表わされる点を描き、それらを適当に 3 角形の和に表わす (図 3.7)。このようにして得られた diagram $\hat{\Gamma}$ に対する dual diagram が、torus の縮退する点を表わす (ここまで描いてきた) toric diagram になる (図 3.7)。ここで dual diagram というのはもとの diagram に対して線分が垂直に交わるように描かれた diagram で、dual diagram の面はもとの diagram の頂点に対応し、dual diagram の頂点はもとの diagram の面に対応している⁷。

⁷このことは元の diagram と dual diagram で torus の縮退する部分と torus の広がっている部分に移り替わっていることを示していて、これを torus 方向の T-dual として解釈すると dual diagram は mirror 多様体に対応している diagram だと考えられる [38]。

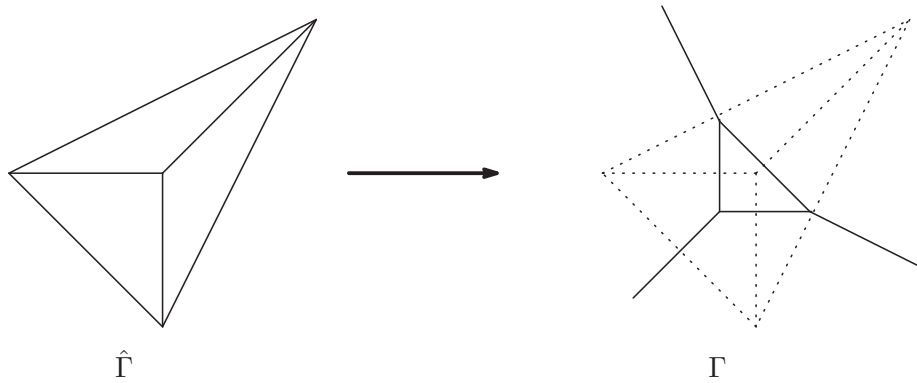


図 3.7: $\mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ の dual diagram による構成

3.2 conifold

次に conifold という Calabi-Yau 多様体について詳しく調べていく [43]。

conifold とは $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{C}^4$ という座標を用いて、

$$\sum_{k=1}^4 y_k^2 = 0 \tag{3.32}$$

という式で定義される複素 3 次元の多様体であり、この多様体は $S^2 \times S^3$ という base をもつ cone の形をしていて、cone の先端の $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ という点は特異性を持っている。この特異点の近傍を図 3.8 に示す。

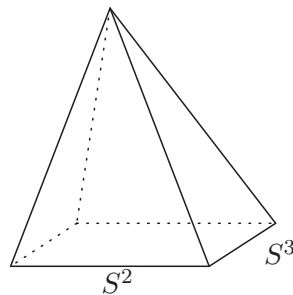


図 3.8: conifold

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ で表わされる conifold の先端は特異点となっている。

この特異性を解消する方法として 2 つの異なる方法があり、1 つは deformation によるもので、もう 1 つは (small) resolution によるものである。

3.2.1 deformed conifold

まず deformation について説明すると、特異性を持つ (3.32) の式の右辺を $0 \rightarrow a^2$ と「deform」することで、

$$\sum_{k=1}^4 y_k^2 = a^2 \quad (3.33)$$

と変形し特異性を解消することが出来る。ここで y_k の phase を適当に定義出来るので必要ならば一般性を失うことなく $a \in \mathbb{R}$ などとすることも出来る。このようにして特異性を解消された conifold を「deformed conifold」と呼び、その定義は (3.33) で与えられる。deformed conifold は図 3.8 の頂点における特異性を S^3 を膨らませることにより解消したもの (図 3.9) で、 T^*S^3 として表すことも出来る。

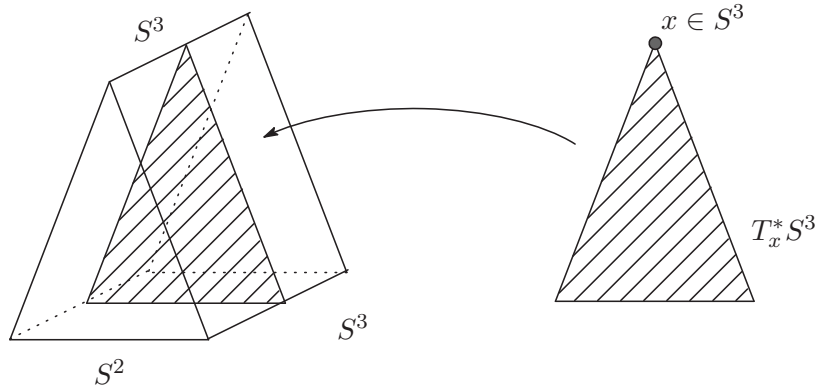


図 3.9: conifold の deformation

conifold の先端を S^3 に deform することにより特異点が解消されている。右の図で S^3 の 1 点 x の下の 3 角形は $\mathbb{R} \times S^2 \simeq \mathbb{R}^3 \simeq T_x^*S^3$ であり、deformed conifold 全体は T^*S^3 と同型である。

このことは図 3.9 より、deform された S^3 の 1 点 $x \in S^3$ から下方向に伸びた 3 角形が S^2 を base に持ち、図の上下方向の \mathbb{R} と合わせて全体で $S^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3 \simeq T_x^*S^3$ ($x \in S^3$) と同型になっていることからわかる。すなわち S^3 の各点 x に対して $T_x^*S^3$ が fiber しているとみなせるので、全体として T^*S^3 となっていることがわかる。また deformed conifold が T^*S^3 は具体的に (3.33) から示すことが出来、その為には $y_k = x^k + ip_k$ と変数変換すれば (3.33) は、

$$\sum_{k=1}^4 \left[(x^k)^2 - (y_k)^2 \right] = a^2 \quad (3.34)$$

$$\sum_{k=1}^4 x^k y_k = 0 \quad (3.35)$$

となる。ここで (3.51) より、base の多様体 ($p_k = 0$) は $\sum_{k=1}^4 (x^k)^2 = a^2$ で与えられ、これは半径 a の S^3 を表している。実際 $a \rightarrow 0$ とすればこの S^3 の半径が 0 となり 1 点につぶれるため再

び conifold の特異点が現れる。また (3.35) は p_k が $x \in S^3$ の余接空間の座標であることを意味している。

3.2.2 resolved conifold

次に conifold の特異点の resolution について説明する。resolution とは conifold の特異点を有限の大きさの S^2 に置き換えて blow-up することで、そのために座標 (u, \tilde{u}) と (v, \tilde{v}) を、

$$\begin{aligned} u &= y_1 + iy_2, \quad \tilde{u} = y_3 - iy_4 \\ v &= y_3 + iy_4, \quad \tilde{v} = y_1 - iy_4 \end{aligned} \tag{3.36}$$

と定義する。この (u, \tilde{u}) と (v, \tilde{v}) を用いて conifold の式 (3.32) を表すと、

$$u\tilde{v} + v\tilde{u} = 0 \tag{3.37}$$

と書けるが、これはある $z \in \mathbb{P}^1$ が存在し、

$$u = z\tilde{u}, \quad v = -z\tilde{v} \tag{3.38}$$

と書けることを示しており、 $\tilde{u} = 0$ は $z = \infty$ に対応しているので z は $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ に値をとることがわかる。conifold においては z に自由度はなくこの S^2 は面積が 0 であることを意味しているが、この S^2 を有限の面積の S^2 と置き換えることで conifold の特異性は解消される (図 3.10)。

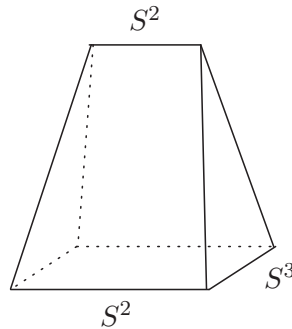


図 3.10: conifold の resolution

conifold の先端を S^2 に置き換えることで特異性が解消している。

このような操作により得られた多様体を resolved conifold と呼ぶ。ここで (3.38) は z で記述される \mathbb{P}^1 上の $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ bundle を表していて、resolved conifold は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ と同型であることがわかる。

3.3 toric diagram と conifold transition

前節で得られた2種類の conifold の特異点解消は特異な conifold を通じて transition すると考えられる (図 3.11)。

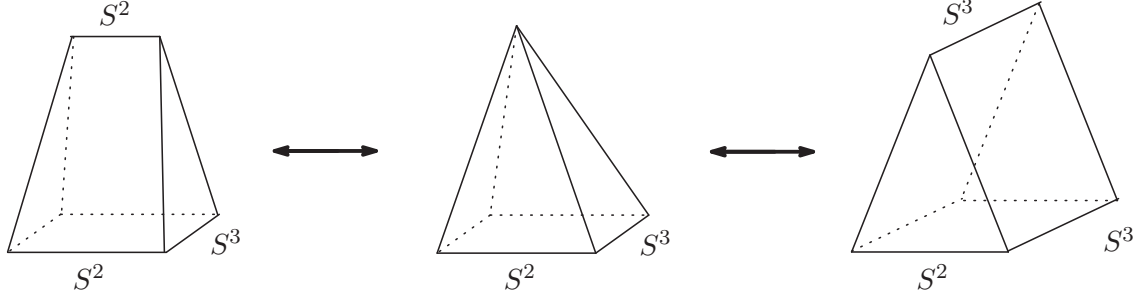


図 3.11: conifold transition

resolved conifold と deformed conifold は特異な conifold を通じて移りあう。

ここでは更に resolved conifold 及び deformed conifold を toric diagram で表し、toric diagram の意味でこの transition がどのように表されるかを見ていく。

3.3.1 resolved conifold の toric diagram

resolved conifold は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ と表すことが出来、これは 3.1 節で示した symplectic quotient による toric diagram の記述において、 $(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$ のそれぞれの z_i の $U(1)$ charge Q_i を、 $(1, 1, -1, -1)$ とすることに対応する。(これは (3.16) を満たしている。) この charge を用いれば resolved conifold を表す式は (3.14) より、

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 = t \quad (3.39)$$

で与えられる。ここで $(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$ の $U(1)$ 不変な組み合わせを $u = z_0 z_2$, $\tilde{u} = z_0 z_3$, $v = z_1 z_2$, $\tilde{v} = -z_1 z_3$ ととれば、この $u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$ は $u\tilde{v} + v\tilde{u} = 0$ を満たしこれは (3.37) を表していることがわかる。ここで resolved conifold の toric diagram を描くために (3.29) を満たす \vec{v}_i を求めると、

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

となり、これから \vec{w}_i は、

$$\vec{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

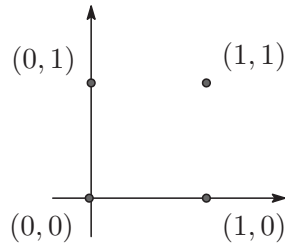


図 3.12: resolved conifold の dual diagram

となるのでこれを diagram として描くと図 3.12 のようになる。

ここで図 3.12 の 4 点を 2 つの 3 角形に分割する方法は 2 通りあり、それに対応して resolved conifold の toric diagram も 2 種類存在する (図 3.13)。

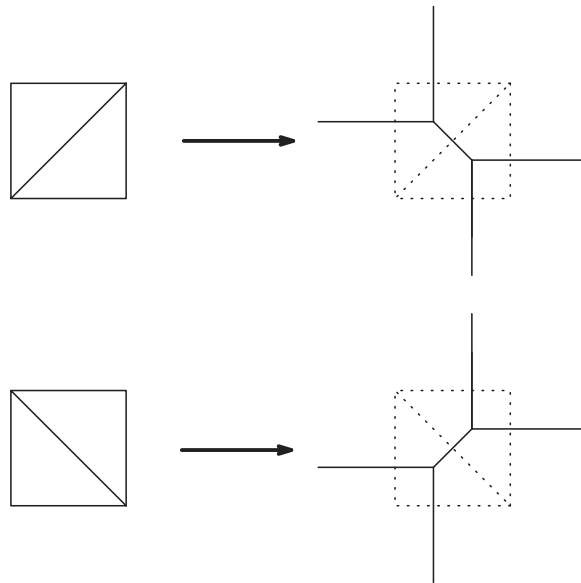


図 3.13: resolved conifold と flop transition

この 2 種類の resolved conifold が移りあうことは flop と呼ばれ、これは resolved conifold の Kähler パラメータの $t \rightarrow -t$ という変換に対応している。

この 2 種類の diagram が移り合うことは flop と呼ばれ、これは (3.39) において $t \rightarrow -t$ とすることにしている。ここで t は resolved conifold の Kähler パラメータで、resolution に用いられる S^2 の面積に対応しているので $-t$ という値は意味を為さないように思えるが、実際には t というパラメータは複素化された Kähler パラメータの実部に対応しているので Kähler パラメータがパラメータ空間の虚数に対応する方向⁸に値を持っていればこの 2 つの resolved conifold は smooth に移り合う [14, 44]。

⁸これは S^2 を貫く B 場を意味している。

t が S^2 の面積に対応していることは toric diagram から読み取ることが出来、そのためにはまず t が resolved conifold の toric diagram において 2 つの \mathbb{C}^3 をつなぐ線分の長さの自由度に対応していて、更にその線分とその上での S^1 fibration をあわせると S^2 になっていることを見ればよい (図 3.14)。

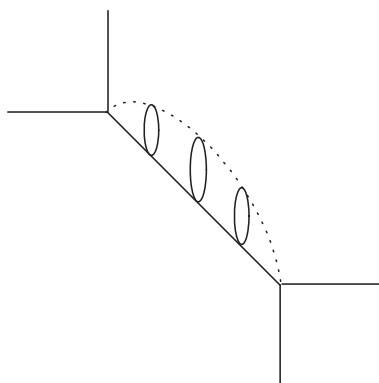


図 3.14: resolved conifold の Kähler moduli と S^2 の面積の対応

これは 3.1 節での \mathbb{P}^1 の toric diagram の例と全く同じであり、実際に図 3.14の上では T^2 の fibration は縮退しているので線分上に S^1 の fibration があることとなり、また線分の端にあたる 3 点 vertex 上では更に残っていた S^1 の fibration もつぶれているので、結果として線分とその上の fibration をあわせて $S^2 \simeq \mathbb{P}^1$ となっている。この事実は後の章でも重要であり、このように toric diagram における線分は全て S^2 を表わしている。また、この resolved conifold の例のように torus の縮退の構造 (即ち toric diagram の直線の角度) を保ったまま toric diagram を変形する自由度 (図 3.15) は Kähler moduli に対応していて、これは resolved conifold の場合では resolution に用いられる S^2 の面積を表わしている。

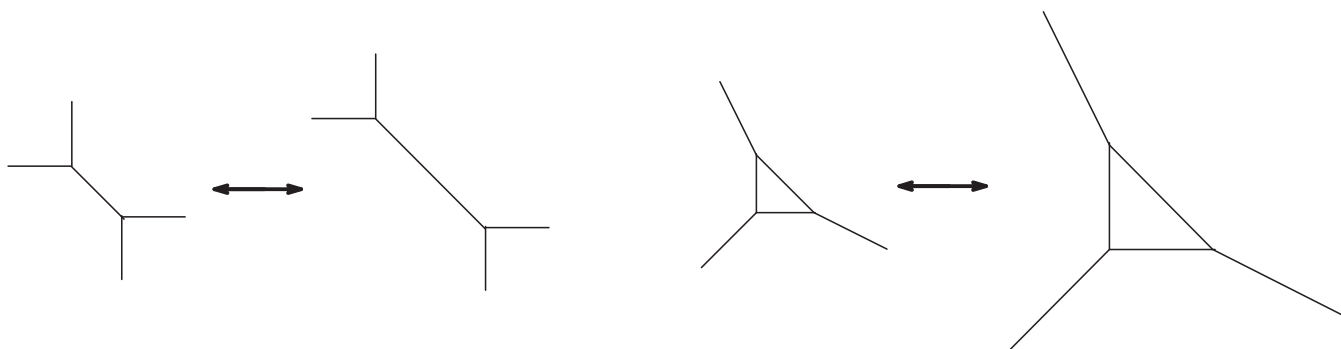


図 3.15: toric diagram における Kähler moduli

toric diagram の角度を保ったまま size を変更する自由度は多様体の Kähler moduli に対応している。この 2 例ではいずれも Kähler moduli は 1 次元である。

以上のように dual diagram を用いて toric diagram を構成することが出来たが、次に deformed conifold との関係を見るときのために、冗長だが torus の縮退からも直接 resolved conifold の toric diagram を導いておく。まず、base の座標を、

$$r_\alpha = |z_0|^2 - |z_3|^2 \quad (3.42)$$

$$r_\beta = |z_1|^2 - |z_3|^2 \quad (3.43)$$

$$r_\gamma = \text{Im}(z_0 z_1 z_2 z_3) \quad (3.44)$$

として、 $U_0 (z_0 \neq 0)$ の座標では (3.39) を用いて $r_\alpha = |z_0|^2 - |z_1|^2 + t$ と書き換えることで、

$$U(1)^2 \ni (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (e^{-i(\alpha-\beta)} z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{-i\beta} z_3) \quad (3.45)$$

となり、 $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$ で作られる cycle をそれぞれ $(0, -1)$ cycle , $(1, 0)$ cycle とすると、

つづれる cycle	U_0 における位置	base の位置
$(0, -1)$ cycle	$z_1 = z_2 = 0$	$\Rightarrow r_\alpha = t, r_\beta \leq 0$
$(1, 0)$ cycle	$z_1 = z_3 = 0$	$\Rightarrow r_\beta = 0, r_\alpha \geq t$
$(1, -1) \simeq (-1, 1)$ cycle	$z_2 = z_3 = 0$	$\Rightarrow r_\beta = t - r_\alpha \geq 0$

(3.46)

同様に $U_1 (z_1 \neq 0)$ の座標では $r_\beta = |z_2|^2 - |z_0|^2 + t$ と書き換えて、

$$U(1)^2 \ni (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) : (z_0, z_2, z_3) \rightarrow (e^{i(\alpha-\beta)} z_0, e^{i\beta} z_2, e^{-i\alpha} z_3) \quad (3.47)$$

つづれる cycle	U_1 における位置	base の位置
$(0, -1) \simeq (0, 1)$ cycle	$z_0 = z_3 = 0$	$\Rightarrow r_\alpha = 0, r_\beta \geq t$
$(1, 0) \simeq (-1, 0)$ cycle	$z_0 = z_2 = 0$	$\Rightarrow r_\beta = t, r_\alpha \leq 0$
$(1, -1)$ cycle	$z_2 = z_3 = 0$	$\Rightarrow r_\alpha = t - r_\beta \geq 0$

(3.48)

となり、図 3.13 と同じ toric diagram が得られる。

(3.39) において $t = 0$ としたものは (虚数方向の Kähler パラメータも 0 とする) 特異点をもつ conifold に対応していて、それは toric diagram で表すと resolved conifold の S^2 を表す線分がつづれて 4 点 vertex 型の diagram となる。ここで図 3.11 のように resolved conifold は特異な conifold を経由して deformed conifold へと transition するのでその様子を toric diagram を用いて記述する為、deformed conifold を記述する toric diagram について調べる。

3.3.2 deformed conifold の toric diagram

まず deformed conifold の式 (3.33) を $(u, \tilde{u}, v, \tilde{v})$ を用いて表し、

$$u\tilde{v} + v\tilde{u} = a^2 \quad (3.49)$$

とする。ここで $u = z_0 z_2$, $\tilde{u} = z_0 z_3$, $v = z_1 z_2$, $\tilde{v} = -z_1 z_3$ と (3.45) より、

$$U(1)^2 \ni (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) : (u, \tilde{u}, v, \tilde{v}) \rightarrow (e^{i\alpha}u, e^{-i\beta}\tilde{u}, e^{i\beta}v, e^{-i\alpha}\tilde{v}) \quad (3.50)$$

となる。ここで新しく w という変数を用いて (3.49) を、

$$w \equiv u\tilde{v}, \quad v\tilde{u} = a^2 - w \quad (3.51)$$

と書き換える。この w で表せば (3.44) は、

$$r_\gamma = \text{Im}z_0 z_1 z_2 z_3 = -\text{Im}u\tilde{v} = -\text{Im}w \quad (3.52)$$

となるのがわかる。(3.51) で表された deformed conifold において $(0, -1)$ cycle が縮退するところは $u = \tilde{v} = w = 0$ で与えられる。このとき (v, \tilde{u}) は $v\tilde{u} = a^2$ を満たすことがわかりこの (v, \tilde{u}) の自由度は、

$$(v, \tilde{u}) \rightarrow (cv, c^{-1}\tilde{u}) \quad c \in \mathbb{C}^\times \quad (3.53)$$

となるので $(0, -1)$ cycle が縮退している部分の fiber も含めた空間は cylinder ($\simeq \mathbb{C}^\times$) になっていることがわかる。これは base の \mathbb{R}^3 の中で $r_\alpha = 0$, $r_\gamma = \text{Im}w = 0$ として与えられる直線とその上での $(1, 0)$ cycle の fiber をあわせた全体が cylinder になっていることを表している。同様に $(1, 0)$ cycle が縮退する部分は $v = \tilde{u} = 0$ でありこのとき $u\tilde{v} = w = a^2$ となっているので、結局 base の \mathbb{R}^3 において $r_\beta = 0$, $r_\gamma = -\text{Im}w$ となる点で cycle がつぶれている。これらをまとめると、

つぶれる cycle	\mathbb{C}^4 での座標	base の位置
$(0, -1)$ cycle	$u = \tilde{v} \Rightarrow r_\alpha = r_\gamma = 0$	
$(1, 0)$ cycle	$v = \tilde{u} = 0 \Rightarrow r_\beta = 0, r_\gamma = -\text{Im}w$	

(3.54)

この結果から deformed conifold の toric diagram は図 3.16 のようになる。

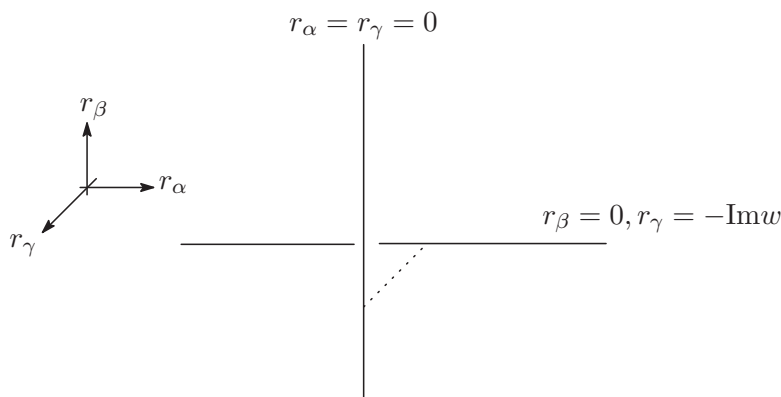


図 3.16: deformed conifold の toric diagram

ただし図中の点線は $r_\alpha = r_\beta = r_\gamma = 0$ という点と $r_\alpha = r_\beta = 0, r_\gamma = -\text{Im}w$ という点を結んだ線分を表していて、この点線部分はその上での T^2 の fiber と合わせて T^*S^3 の base の S^3 を表している。このことは、まず図 3.16 中の 2 本の直線は $r_\alpha - r_\beta$ 平面に射影すれば直交しているため、その上でつぶれている 2 つの cycle は互いに S 変換で移り合う cycle であることがわかり、更に 2.1 節の議論で 2 つの solid torus に S 変換を施して表面を貼り合わせたものが S^3 であったことを思い出すと、図 3.16 の 2 本の直線をつなぐ線分とその上の fiber を合わせて S^3 となることがわかる。実際に base の多様体上で cycle が縮退している部分を表す直線の上から離る方向への線分 I が $r \in [0, 1]$ というパラメータで表されているとし、 $r = 0$ が直線上の点に相当しているとする (図 3.17)。

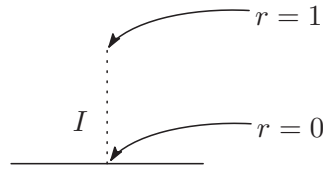


図 3.17: toric diagram 中の solid torus

ここで I 上の fibration まで含めた空間を考えると、つぶれていない側の cycle は常に S^1 として表され、つぶれる側の cycle と線分のパラメータを合わせた空間は 3.1 節の \mathbb{C} の toric diagram において $r \in \mathbb{R}^+ \rightarrow r \in [0, 1]$ と変更したもので disk を表している。よって I 上の fibration 全体は $S^1 \times \text{disk} \simeq (\text{solid torus})$ となっている。toric diagram 中の 2 本の直線を結んだ線分とその上の fiber については常にこのような議論が成り立ち 2 つの solid torus の貼り合わせとみなすことが出来る。この 2 本の直線が平行な場合は線分上の fiber の全空間は $S^2 \times S^1$ となり、平行でない場合は S^3 となる。

以上のような議論から図 3.16 において 2 本の直線を結ぶ点線は S^3 を表していて、そのような S^3 は deformed conifold の Lagrangian 部分多様体に相当するが、図 3.16 に示されている線分の場合は更に base の空間において 2 本の直線を結ぶ最短の線分になることから、この点線で表された S^3 の体積は最小となる。すなわちこの点線の表す S^3 は Lagrangian 部分多様体であるのに加え、special Lagrangian 部分多様体となる [45] ことがわかるので、この S^3 を T^*S^3 の base の S^3 と同定出来る。また図 3.16 で $w \rightarrow 0$ とすると、deformed conifold の toric diagram は 4 点 vertex の形になり、これは resolved conifold の場合に見たように特異点を持つ conifold を表している。これは $w \rightarrow 0$ としたときに deformed conifold の S^3 が体積 0 となり特異点が現れるという描像に対応しており、これらの結果から toric diagram で表された conifold transition は図 3.18 のようになる。

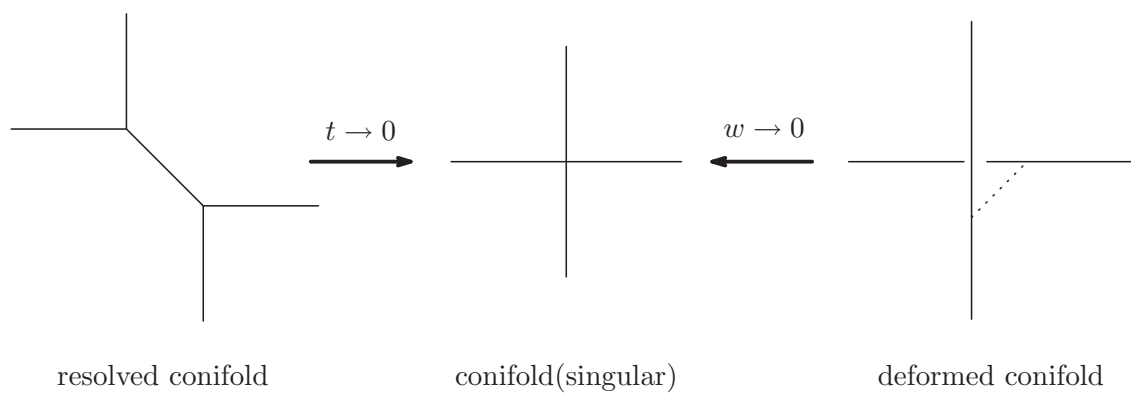


図 3.18: toric diagram で表された conifold transition

第4章 Gopakumar-Vafa duality

前章で conifold transition について見てきたが、この conifold transition に関して Gopakumar-Vafa [7] によって主張されたことは、deformed conifold 上の位相的開弦の理論と resolved conifold 上の位相的閉弦の理論が対応しているということである。この対応は Gopakumar-Vafa duality と呼ばれ、もう少し正確には、deformed conifold 側で Lagrangian 部分多様体である S^3 に N 枚の A-brane が巻いているとき、 S^3 上で開弦が境界を持つが、その理論は1章の議論より S^3 上の Chern-Simons 理論になることがわかる。これに対して resolved conifold 側では A-brane は無くなっている代わりに resolved conifold の S^2 の Kähler パラメータ t が、 $t = 2\pi i N/k + N$ で与えられるというものである。この関係は AdS/CFT 対応 [46, 47, 48] と類似しており、brane ある時空 (deformed conifold) と、brane は無いが brane の効果に応じて変形した時空 (resolved conifold) との対応を表していると考えられる。

この Gopakumar-Vafa の主張 [7] は自由エネルギー F の両側での比較に基づいており、更に world sheet での phase を考えることにより [49] で証明されたが、この章では自由エネルギーの比較により Gopakumar-Vafa の主張を示す。deformed conifold 側では2章で与えた自由エネルギーを用いればよく、resolved conifold 側での自由エネルギーの計算は、位相的弦理論を物理的 (type IIA) 弦理論に対応づけ [3, 4]、更に M 理論を用いることで計算される [5, 6]。まず resolved conifold 側での計算から見ることにする。

4.1 resolved conifold 上の自由エネルギー

1章で見たように Calabi-Yau 多様体上 X の自由エネルギーは (1.51) のように $H_2(X)$ についての足し上げとして表される。ここで X として resolved conifold を選ぶと、この $H_2(X)$ は \mathbb{Z} と同型であり (即ち Kähler パラメータが1次元の t で表される)、種数 g の世界面の自由エネルギーは $l \in \mathbb{Z}$ についての足し上げとして書くことが出来る。具体的には、

$$F_g(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} N_{g,l} e^{-lt} \quad (4.1)$$

となり、 $N_{g,l}$ は Gromov-Witten 不変量である。(17ページの脚注でも述べたように実際には $n \in \mathbb{Z}_+$ のみ寄与する。) resolved conifold が図 3.15 に対応する Kähler パラメータを持つことは3章で見たが、実際に resolved conifold がこの1つの Kähler パラメータのみを持つことは toric diagram から読み取ることが出来る。まず [50] の localization の議論により toric diagram で表された Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の振幅は、diagram の直線の上を通る弦のみの振幅で表すこ

とが出来る。即ち、toric 多様体上の弦は diagram の上にもみ存在していると考えられる。ここで resolved conifold の toric diagram を見ると図 3.14 のように中央に有限の大きさの S^2 がある以外には non-compact な方向への直線があるのみである。このような non-compact な直線は例えば無限遠で cycle がつづれているとすると、無限の面積をもつ S^2 を意味している。このような無限の面積の S^2 に弦が巻きついているとすると (1.49) で与えられる A-model の作用は無限大となり、結局このような写像は経路積分に寄与しないことがわかる。よって resolved conifold に巻きつく弦としては中央の S^2 に巻きつく弦のみが考えられ、この S^2 の複素 Kähler パラメータ t のみを用いて自由エネルギーを表せることがわかる。(toric 多様体上の位相的弦理論の振幅は toric diagram の上を通る弦の寄与のみから得られるという事実は一般の Calabi-Yau 多様体の場合にも同様に成り立ち、後の章でこのことを用いて toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の振幅を計算する。)

ここまでの議論で resolved conifold の Kähler パラメータは唯一つの t によって与えられることがわかったので、そのような多様体の種数 g の世界面の自由エネルギーは (4.1) と表さる。更に全ての種数の $F_g(t)$ の生成母関数 $F(g_s, t)$ も (1.52) と同様に、

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g(t) g_s^{2g-2} \quad (4.2)$$

と定義することが出来る。ここで Gopakumar-Vafa の結果 [5, 6] を用いればこの (4.2) 式は、

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n_l^g \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{2g-2} e^{-ltd} \quad (4.3)$$

という形で表され、Gopakumar-Vafa 不変量と呼ばれる展開係数 n_l^g は整数に値をとる¹。

Kähler パラメータが複数あるような一般の多様体 X の場合にも Gopakumar-Vafa 不変量は定義され、(4.4) 式の l に関する和の部分を 2-cycle に関する和に置き換えれば自由エネルギーの生成母関数 (1.52) は、

$$F(g_s, t) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{Q \in H_2(X)} n_Q^g \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{2g-2} e^{-Q \cdot td} \quad (4.4)$$

と表されるので、これを一般の多様体 X に対する Gopakumar-Vafa 不変量の定義とみなすことが出来、この Gopakumar-Vafa 不変量 n_Q^g は整数に値をとる。(4.4) からわかることは、Gromov-Witten 不変量 $N_{g,Q}$ は g_s^{2g-2} という値の係数であったために種数 g の世界面からの寄与だけで完全に表されていたのに対し、Gopakumar-Vafa 不変量は $\left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{2g-2}$ という値の係数として与えられているため、 n_Q^g は全ての種数の世界面からの寄与に関する情報を持っているということである。高い種数からにおける Gromov-Witten 不変量の値は原理的には計算出来るが、実際に計算するのはかなり煩雑で、あまり有効ではなかった。一方でこの Gopakumar-Vafa 不変量は全

¹これに対して Gromov-Witten 不変量は一般に有理数で与えられる。

体としては Gromov-Witten 不変量と同じだけの情報を有している [51] が、Gromov-Witten と比べると高い種数の寄与まで効果的に表すことが出来るという利点を持っている。特に resolved conifold の場合は Gopakumar-Vafa 不変量は著しく簡単になることが後で示され、具体的には

$$n_l^g = \begin{cases} 1 & \text{for } (l, g) = (1, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{resolved conifold}) \quad (4.5)$$

となる。これを (4.4) に代入すると resolved conifold の自由エネルギーは、

$$F(g_s, t) = \sum_{d=1} \frac{1}{d} \left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{-2} e^{-dt} \quad (4.6)$$

となり、必要ならばこれを g_s について展開することで resolved conifold の全ての種数の Gromov-Witten 不変量を求めることが出来る。

4.1.1 Gopakumar-Vafa の式の g_s による展開

上で述べたように、(4.4) で Gopakumar-Vafa 不変量を用いて $(2 \sin \frac{dg_s}{2})^{2g-2}$ という形で展開されていた自由エネルギーの式を g_s の冪に表せば g_s^{2g-2} の係数の部分より種数 g の Gromov-Witten 不変量を求めることが出来る。そのためには $(2 \sin \frac{dg_s}{2})^{2g-2}$ を具体的に展開すればよく、[52, 53] などの計算を用いれば、例えば、

$$\begin{aligned} \frac{g_s/2}{\sin(g_s/2)} &= \frac{ig_s}{e^{ig_s} - 1} e^{ig_s/2} = \frac{ig_s}{e^{ig_s/2} - 1} - \frac{ig_s}{e^{ig_s} - 1} = 2\beta(ig_s/2) - \beta(ig_s) \\ &= 2 - \frac{1}{2}ig_s - \sum_{g \geq 1} \frac{1}{2^{2g-1}} \frac{|B_{2g}|}{(2g)!} g_s^{2g} - \left(1 - \frac{1}{2}ig_s - \sum_{g \geq 1} \frac{|B_{2g}|}{(2g)!} g_s^{2g} \right) \\ &= 1 + \sum_{g \geq 1} \frac{2^{2g-1} - 1}{2^{2g-1}} \frac{|B_{2g}|}{(2g)!} g_s^{2g} \end{aligned} \quad (4.7)$$

などのように g_s の冪の展開があらわれる。ただし $\beta(x)$ は Bernoulli 数 B_g の生成母関数で、

$$\beta(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{g=0}^{\infty} B_g \frac{x^g}{g!} \quad (4.8)$$

である²。(4.7) 式は、

$$\left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{-2} = \frac{1}{d^2} \cdot \frac{1}{g_s^2} + \frac{B_2}{2} + \mathcal{O}(g_s^2) \quad (4.10)$$

² ここでの Bernoulli 数の定義は [52] と同じであり、[20, 49] などでも同様の定義が用いられているが、Bernoulli 数には別の定義もあり、

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{g=1}^{\infty} (-1)^{g-1} \frac{B'_g}{(2g)!} x^{2g} \quad (4.9)$$

で定義される数 B'_g を Bernoulli 数とすることもある。例えば [5, 7] などではこちらの定義が使われている。両者の関係は $B'_g = (-1)^{g+1} B_{2g}$ ($g \geq 1$)、で与えられる。

と書き直せるので、これを用いれば (4.4) 式の具体的な展開において g の和の $g = 0$ の部分は³、

$$\sum_{Q \in H_2(X)} n_Q^0 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \left(2 \sin \frac{dg_s}{2} \right)^{-2} e^{-Q \cdot td} = \sum_{Q \in H_2(X)} n_Q^0 \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-Q \cdot td}}{d^3} \cdot \frac{1}{g_s^2} + \frac{B_2}{2} \frac{e^{-Q \cdot td}}{d} \right) + \mathcal{O}(g_s^2) \quad (4.11)$$

となり、また $g = 1$ の部分は、

$$\sum_{Q \in H_2(X)} n_Q^1 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{e^{-Q \cdot td}}{d} + \mathcal{O}(g_s^2) \quad (4.12)$$

となる。よって Gromov-Witten 不変量の $g = 0, 1$ 部分への寄与は (4.11, 4.12) より (4.4) の g_s^{-2}, g_s^0 の係数を読み取ればわかり、

$$(4.4) \text{ の } g_s^{-2} \text{ の係数} = \sum_{Q \in H_2(X)} n_Q^0 \text{Li}_3(e^{-Q \cdot t}) \quad (4.13)$$

$$(4.4) \text{ の } g_s^0 \text{ の係数} = \sum_{Q \in H_2(X)} \left(\frac{1}{12} n_Q^0 + n_Q^1 \right) \text{Li}_1(e^{-Q \cdot t}) \quad (4.14)$$

となる。ここで $B_2 = \frac{1}{6}$ を使い、また index j の polylogarithm 関数 Li_j を、

$$\text{Li}_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^j} \quad (4.15)$$

と定義した。特に $\text{Li}_1(x) = -\log(1-x)$ であり、 $j \leq 0$ のときは、

$$\text{Li}_j(x) = \left(x \frac{d}{dx} \right)^{|j|} \frac{1}{1-x} = |j|! \frac{x^{|j|}}{(1-x)^{|j|+1}} + \dots \quad (4.16)$$

である。これらの結果と、更に種数 $g \geq 2$ の場合も含めて、既に知られている Gromov-Witten 不変量の形 [19, 54] を (constant map の寄与を除いて) 再現することが確かめられている。具体的な形は例えば [20] を参照して、まず種数 0 のとき、

$$F_0 = \frac{1}{3!} \int_X \omega^3 + \int_X c_2(X) \wedge \omega + \chi(X) \frac{\zeta(3)}{2} + \sum_{Q \in H_2(X)} n_Q^0 \text{Li}_3(e^{-Q \cdot t}) \quad (4.17)$$

となる。ここで $\chi(X)$ は X の Euler 数を表し、 $c_2(X)$ は X の second Chern class である。この式の第 3 項は $Q \neq 0$ からの寄与で、(4.13) の結果と一致している。次に種数 1 のときは、

$$F_1 = \frac{1}{24} \int_X c_2(X) \wedge \omega + \sum_{Q \in H_2(X)} \left(\frac{1}{12} n_Q^0 + n_Q^1 \right) \text{Li}_1(e^{-Q \cdot t}) \quad (4.18)$$

³この部分は g_s の冪としては g_s^{-2} 以外の冪も含んでいるので、Gromov-Witten 不変量の場合の $g = 0$ とは違う意味である。

となり、第2項が(4.14)と一致している。更に種数 $g \geq 2$ のときの自由エネルギーは、

$$F_g = \frac{(-1)^g \chi(X) |B_{2g} B_{2g-2}|}{4g(2g-2)(2g-2)!} + \sum_{Q \in H_2(X)} \left(\frac{|B_{2g}| n_Q^0}{2g(2g-2)!} + \frac{2(-1)^g n_d^2}{(2g-2)!} \pm \dots - \frac{g-2}{12} n_Q^{g-1} + n_Q^g \right) \text{Li}_{3-2g}(e^{-Q \cdot t}) \quad (4.19)$$

となり、後で deformed conifold 側の計算と比べるためにこの式に resolved conifold における Gopakumar-Vafa 不変量の値(4.5)と $\chi(X) = 2$ を(4.19)に代入すると、

$$F_g = \frac{(-1)^g |B_{2g} B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} + \frac{|B_{2g}|}{2g(2g-2)!} \text{Li}_{3-2g}(e^{-t}) \quad (\text{resolved conifold}) \quad (4.20)$$

として resolved conifold 上の $g \geq 2$ の自由エネルギーが得られる。

4.2 deformed conifold 上の自由エネルギー

Gopakumar-Vafa duality を確かめるために次に deformed conifold 上の自由エネルギーを計算する。1章で述べたとおり、deformed conifold(T^*S^3)の S^3 の部分に A-brane が N 枚巻きついた場合の開弦の理論は S^3 上の $U(N)$ Chern-Simons 理論で与えられる。 S^3 上の Chern-Simons 理論の自由エネルギーは2章で計算したが、その自由エネルギーの't Hooft 展開としての構造を見るためにまず't Hooft 展開の確認を行い、Chern-Simons 理論の場合に自由エネルギーがどのように展開されるかを見ることとする。

4.2.1 't Hooft 展開

1章でも見たように S^3 上の位相的開弦は図 1.5 のように fat graph で表される摂動的補正を受けるが、これは2章で述べた Chern-Simons 理論の $U(N)$ の場合の摂動的寄与とみなすことが出来、実際にこのような fat graph の存在から S^3 上の理論を Chern-Simons 理論と同定することが出来た。一般に $SU(N)$ や $U(N)$ のゲージ理論があった場合には double line の記述により常に $1/N$ 展開 [23, 24] を行うことが出来、Chern-Simons 理論の場合では作用が(2.1)のように与えられ、(2.4)のような量子補正を受けることを考慮すると展開のパラメータ x は、

$$x = \frac{2\pi i}{k + N} \quad (4.21)$$

となる。 $(S = g_{\text{YM}}^{-2} \int \mathcal{L}(A))$ などと書かれたときの $U(N)$ ゲージ理論の展開パラメータとの対応は $x \sim g_{\text{YM}}^2$ fat graph の頂点の数を V 、線分の数を E 、穴(loop)の数を h とすると(図 4.1)、頂点に対しては x^{-1} の寄与、線分に対しては x^1 の寄与、穴の数に対しては $U(N)$ ゲージ理論ならば N の寄与があるので、ある fat graph に対して x と N の冪を数えると、

$$x^{E-V} N^h = x^{2g-2+h} N^h = x^{2g-2} t^h \quad (4.22)$$

となることがわかる。ここで、

$$t \equiv xN = \frac{2\pi i N}{k + N} \quad (4.23)$$

として Euler の関係式 $2g - 2 = E - V - h$ を用いた。 t は 't Hooft パラメータであるが、これは後に resolved conifold の Kähler パラメータと同定される。

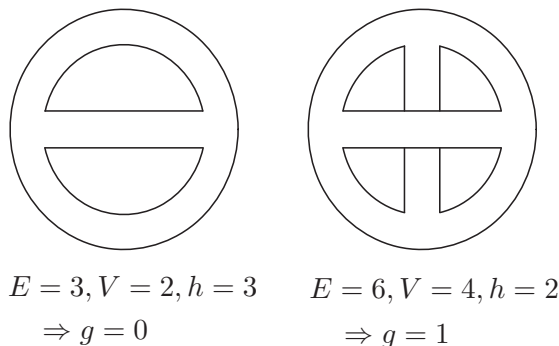


図 4.1: fat graph の例

Chern-Simons 理論の全ての摂動計算においてそれぞれの fat graph から (4.22) に応じた寄与が現れるので、Chern-Simons 理論の物理量は x と t で展開される。ここで 't Hooft パラメータ t の値を固定したまま $x = 0$ のまわりで x の展開を行うことを考えると、この x は $1/N$ に比例しているので、large N としたときの $1/N$ 展開はこの x での展開と同じ展開を表していることがわかる。上のような議論から Chern-Simons 理論の自由エネルギーを摂動的に表す場合も x と t の冪展開で表されることがわかり、自由エネルギー F を摂動的な部分 F^{P} と非摂動的な部分 F^{np} とに分けると摂動的な部分は、

$$F^{\text{P}}(x, t) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h}^{\text{P}} x^{2g-2} t^h \quad (4.24)$$

と展開される。ここで Chern-Simons 理論の自由エネルギー (4.24) の各項は種数 g 、穴の数 h の Riemann 面からの寄与を表すが、それぞれの Riemann 面は deformed conifold 上の開弦を表すと解釈出来るので、このような開弦の足し合わせは resolved conifold 上の閉弦の寄与と直接には比較出来ない。そこで $F_g^{\text{P}}(t)$ という関数を、

$$F_g^{\text{P}}(t) = \sum_{h=1}^{\infty} F_{g,h}^{\text{P}} t^h \quad (4.25)$$

と新たに定義すると、(4.24) は

$$F^{\text{P}}(x, t) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g^{\text{P}}(t) x^{2g-2} \quad (4.26)$$

となり、これは閉弦の寄与の足し合わせとみなすことが出来、この式を resolved conifold の場合の閉弦の足し合わせと比較することが出来る。即ち (4.25) で定義された $F_g^p(t)$ は閉弦の場合の種数 g の自由エネルギーに対応している。

4.2.2 非摂動効果

上で述べたように自由エネルギーには摂動的に x, t の冪展開で表される部分以外に非摂動効果として現れる部分がある。そのような項の寄与については [9, 55, 56, 57] などで調べられていて、ここでは [49] に従って具体的な非摂動項の寄与を求める。

まず $U(N)$ Chern-Simons 理論の古典解の周りで摂動を考える必要があるが、(1.61) 式のところで述べたように運動方程式は $F = 0$ となるので $U(N)$ ゲージ理論の flat な接続の全体を積分することになる。しかしこのような接続には constant な $U(N)$ 変換で表される global ゲージ変換の自由度が残っているので、経路積分には $\text{vol}_{\text{CS}}(U(N))^{-1}$ という項が現れると考えられる。ここで vol_{CS} とは Chern-Simons の作用の 2 次の運動項の部分で定義された normalization を使うという意味で、Chern-Simons 作用には $k/4\pi$ という係数があること及び $k \rightarrow k + N$ という量子補正を考慮すれば分配関数の非摂動効果 $Z^{\text{np}} = \exp(F^{\text{np}})$ は、

$$\exp(F^{\text{np}}) = \frac{(2\pi i)^{\frac{1}{2} \dim(U(N))}}{\left(\frac{k+N}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2} \dim(U(N))} \text{vol}(U(N))} \quad (4.27)$$

となる。ここで分子の項は $\int dx e^{-\frac{1}{2i}x^2} = \sqrt{2\pi i}$ の寄与である。よって自由エネルギーの非摂動部分は、

$$F^{\text{np}} = -\log(\text{vol}(U(N))) - \frac{1}{2} \dim(U(N)) \log\left(\frac{k+N}{(2\pi)^{2i}}\right) \quad (4.28)$$

となる。 $U(N)$ の体積は $U(1)$ の体積と $SU(N)$ の体積を用いて表され、また $SU(N)$ の体積は [58] で与えられていて、

$$\text{vol}(U(N)) = \frac{2\pi}{\sqrt{N}} \text{vol}(SU(N)) \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{\sqrt{N}} \text{vol}(g/g_{\mathbb{Z}}) \cdot \text{vol}(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2N-1}) \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(N^2+N)}}{(N-1)!(N-2)! \dots 2!1!} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(N^2+N)}}{\prod_{j=1}^{N-1} j^{(N-j)}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる。但し g は $U(N)$ の Lie 代数で、 $g_{\mathbb{Z}}$ は Chevalley lattice である。また S^{2i-1} ($i = 2, 3, \dots, N$) は $(2i-1)$ 次元の単位球面で、このような奇数次元の球面が現れるのは $SU(N)$ が $S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2N-1}$ に homotopy 同値なことによるものと理解出来る。(4.30) は Barnes 関数を用いて表され、Barnes 関数 $G_2(z)$ を、

$$G_2(z+1) = \Gamma(z)G_2(z), \quad G_2(1) = 1 \quad (4.31)$$

と定義すれば (4.30) は、

$$\text{vol}(U(N)) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(N^2+N)}}{G_2(N+1)} \quad (4.32)$$

と表される。以上の結果と $\dim(U(N)) = N^2$ より自由エネルギーの非摂動項 (4.28) は分配関数の位相部分を無視して、

$$F^{\text{np}} = \frac{1}{2}N(N-1)\log(2\pi) - \frac{1}{2}N^2\log(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\log j \quad (4.33)$$

となる。

4.2.3 S^3 上の自由エネルギー

S^3 上における $U(N)$ Chern-Simons 理論の分配関数は既に 2章で計算されており、(2.17) という形で与えられた。ここから自由エネルギーを計算すると、

$$\begin{aligned} F = \log Z &= -\frac{N}{2}\log(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\log\left(2\sin\left(\frac{j\pi}{k+N}\right)\right) \\ &= -\frac{N}{2}\log(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\log\left[\frac{2\pi j}{k+N} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{j^2}{n^2(k+N)^2}\right)\right] \\ &= -\frac{N^2}{2}\log(k+N) + \frac{1}{2}N(N-1)\log 2\pi + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\log j + \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left[1 - \frac{j^2}{n^2(k+N)^2}\right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

であった。但し $\sin(\pi z)$ を、

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (4.35)$$

を用いて書き換えた。この (4.34) の第 3 項までの部分は自由エネルギーの非摂動項 (4.33) と一致して、摂動項 $F^{\text{p}} = F - F^{\text{np}}$ は、

$$F^{\text{p}} = \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \sum_{n=1}^{\infty} \log\left[1 - \frac{j^2}{n^2(k+N)^2}\right] \quad (4.36)$$

と与えられることがわかる。

4.2.4 摂動項の展開

摂動項 (4.36) の \log の項を Taylor 展開し、zeta 関数 $\zeta(l) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-l}$ を用いて書くと ([5] の Appendix 参照)

$$\begin{aligned}
F^{\text{P}} &= \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left(\frac{j}{n(k+N)} \right)^{2l} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\zeta(2l)}{l} \left(\frac{1}{k+N} \right)^{2l} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) j^{2l} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\zeta(2l)}{l} \left(\frac{1}{k+N} \right)^{2l} \left\{ \frac{N^{2l+2}}{(2l+1)(2l+2)} - 2l \sum_{m=1}^l \binom{2l-1}{2m-3} \frac{B_{2m}}{2m(2m-2)} N^{2l+2-2m} \right\} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\zeta(2l)}{l} (-1)^l \frac{1}{(2\pi)^{2l}} \left\{ \frac{x^{-2} t^{2l+2}}{(2l+1)(2l+2)} - 2l \sum_{m=1}^l \binom{2l-1}{2m-3} \frac{B_{2m}}{2m(2m-2)} x^{2m-2} t^{2l+2-2m} \right\}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

ここで、(4.21) の x の定義と、 $t = xN$ を用いた。この展開式と自由エネルギーの展開 (4.24) を比べると、 h は偶数でのみ値を持つことがわかり、具体的な $F_{g,h}^{\text{P}}$ の形は、

$$F_{0,h}^{\text{P}} = \frac{(-1)^{\frac{h}{2}-1}}{(2\pi)^{h-2}} \frac{2\zeta(h-2)}{(h-2)(h-1)h} \quad (h \geq 4) \tag{4.38}$$

$$F_{1,h}^{\text{P}} = \frac{(-1)^{\frac{h}{2}} \zeta(h)}{(2\pi)^h 6h} \quad (h \geq 2) \tag{4.39}$$

$$F_{g,h}^{\text{P}} = \frac{(-1)^{g+\frac{h}{2}-1}}{(2\pi)^{2g+h-2}} \cdot 2\zeta(2g+h-2) \binom{2g+h-3}{2g-3} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \quad (g \geq 2, h \geq 2) \tag{4.40}$$

となる。これらの式から (4.25) を用いて $F_g^{\text{P}}(t)$ を計算することが出来、例えば $g=0$ の場合は、

$$F_0^{\text{P}}(t) = \sum_{\substack{h=4 \\ h \in 2\mathbb{Z}}}^{\infty} F_{0,h}^{\text{P}} t^h = \sum_{\substack{h=4 \\ h \in 2\mathbb{Z}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}-1}}{(2\pi)^{h-2}} \frac{2\zeta(h-2)}{(h-2)(h-1)h} t^h \tag{4.41}$$

であるが、この式を t で 2 回微分し、 $p = \frac{h-2}{2}$ と変数変換し、 $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2p}$ 及び (4.35) を使うと、

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 F_0^{\text{P}}(t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\pi)^{2p}} \zeta(2p) \frac{t^{2p}}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{-t^2}{(2\pi)^2 n^2} \right]^p = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t^2}{(2\pi)^2 n^2} \right) \\
&= \frac{t}{2} - \log t + \log(1 - e^{-t}) = \frac{t}{2} - \log t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{n}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

となるので、これを 2 回積分することにより $F_0^{\text{P}}(t)$ が得られる。(4.42) の最後の式の第 3 項を 2 回積分したものは $-\text{Li}_3(e^{-t})$ となり、これは (4.17) で conifold とした場合の Li_3 の寄与と対応し

ていることが確かめられる。(符号が逆になっているのは後で説明するように g_s の展開と x の展開の差による $(-1)^g$ の寄与である。) 同様に $g = 1$ の場合は $F_g^p(t)$ に $\text{Li}_1(e^{-t})$ という項が現れ、これは conifold の場合の (4.18) の Li_1 と対応する。実際に非摂動項の寄与と合わせれば、 $g = 0, 1$ において resolved conifold と deformed conifold の自由エネルギーの一致が示されるが、ここでは詳細には触れず具体的な対応の確認は $g \geq 2$ の場合に行う。 $g \geq 2$ の場合の計算は $g = 0, 1$ の場合に比べてやや複雑だが、[5] §4 で計算が行われていて、

$$\begin{aligned}
F_g^p(t) &= \sum_{h=2}^{\infty} F_{g,h}^p t^h = \sum_{k=1}^{\infty} F_{g,2k}^p t^{2k} \\
&= \frac{2(-1)^{g+1} B_{2g}}{2g(2g-2)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(2g+2k-2)}{(2\pi)^{2g+2k-2}} \binom{2g+2k-3}{2k} t^{2k} \\
&= -\frac{|B_{2g} B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} + (-1)^{g+1} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{(-it + 2\pi n)^{2g-2}} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

4.2.5 非摂動項の展開

次に (4.33) で与えられた自由エネルギーの非摂動部分の展開を計算する [33, 49]。そのために F^{np} を Barnes 関数で表して、

$$F^{\text{np}} = \frac{1}{2} N(N-1) \log(2\pi) - \frac{1}{2} N^2 \log(k+N) + \log G_2(N+1) \quad (4.44)$$

ここで、Barnes 関数 $G_2(z)$ は (4.31) で定義されているので、 $\log \Gamma(z)$ を、

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + 2 \int_0^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (4.45)$$

と表せば $\log G_2(N+1)$ は、

$$\begin{aligned}
\log G_2(N+1) &= \sum_{i=1}^N \log \Gamma(i) = \frac{N^2}{2} \log N - \frac{1}{12} \log N - \frac{3}{4} N^2 + \frac{1}{2} N \log 2\pi + \zeta'(-1) \\
&\quad + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)N^{2g-2}} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

となり、(4.44) は、

$$\begin{aligned}
F^{\text{np}} &= \frac{1}{2} N^2 \left[\log \left(\frac{2\pi N}{k+N} \right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{1}{12} \log N + \zeta'(-1) + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)N^{2g-2}} \\
&= \frac{1}{2} x^{-2} t^2 \left[\log(-it) - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{12} (\log x - \log t) + \zeta'(-1) + \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} x^{2g-2} t^{2-2g} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

と展開される。ここで摂動項の (4.26) と同様に非摂動項についても、

$$F^{\text{np}}(x, t) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g^{\text{np}}(t) x^{2g-2} \quad (4.48)$$

により $F_g^{\text{np}}(t)$ を定義するとすれば、(4.47) より $g \geq 2$ で、

$$F_g^{\text{np}}(t) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} t^{2-2g} \quad (4.49)$$

となる。

4.2.6 resolved conifold との比較

(4.43),(4.49) を合わせると $g \geq 2$ の場合の S^3 上の自由エネルギーは (F^{np} は F^{P} の n の和における $n = 0$ の部分に相当する)、

$$F_g = F^{\text{P}} + F^{\text{np}} = -\frac{|B_{2g}B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} + (-1)^{g+1} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(-it + 2\pi n)^{2g-2}} \quad (4.50)$$

であるが、ここで

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n+z} = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi iz}} \quad (4.51)$$

という関係式と、その z による微分で得られる関係式から (4.50) は、

$$F_g = -\frac{|B_{2g}B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)!} + (-1)^{g+1} \frac{|B_{2g}|}{2g(2g-2)!} \text{Li}_{3-2g}(e^{-t}) \quad (4.52)$$

となり、これが deformed conifold 側の自由エネルギーを表している。この (4.52) 式を (4.20) の resolved conifold の自由エネルギーと比較すると $(-1)^{g+1}$ の係数の違いを除いて一致していることがわかる。resolved conifold においては自由エネルギーの展開に用いられた変数は g_s であり、deformed conifold においては x であった。即ちここで、

$$ig_s (\text{resolved conifold}) \equiv x (\text{deformed conifold}) \quad (4.53)$$

とすれば、(それぞれの F_g に対する寄与は $(-1)^{g+1}$ であるので) この 2 つの理論は係数まで含めて完全に等しい自由エネルギーを持っていることがわかる。とくに resolved conifold の Kähler パラメータ t と、deformed conifold の (S^3 上の Chern-Simons 理論としての) 't Hooft パラメータ t は完全に同じ値として対応している。同様にして $g = 0, 1$ の場合も両者の対応を示すことが出来 [7]、これらの結果から Gopakumar-Vafa duality として主張された resolved conifold と deformed conifold の対応が確かめられた。後に Gopakumar-Vafa duality は [49] により worldsheet 上の phase(Coulomb branch 及び Higgs branch) と穴の開いた Riemann 面のそれぞれにおいて、disk 型の Coulomb branch の寄与 (disk 以外の Coulomb branch は寄与しない) と Riemann 面の hole を対応させることで Gopakumar-Vafa の関係が成り立っているということが確かめられ、更に物理的な弦理論に埋め込んだ形 [59] でもこの関係が証明された [60] が、ここでは詳しく議論しない。Gopakumar-Vafa duality は図 4.2 のようにまとめられる。

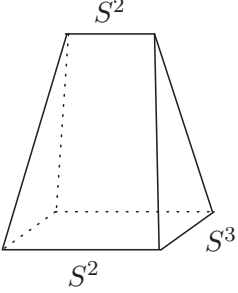
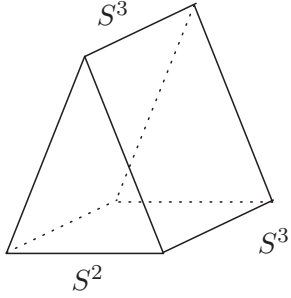
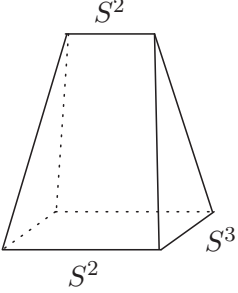
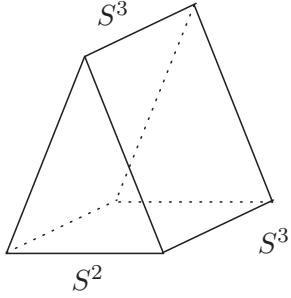
resolved conifold $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$	deformed conifold T^*S^3
 	 
<p>Kähler パラメータ</p> $t = \frac{2\pi i N}{k+N}$ <p>展開パラメータ</p> $g_s = \frac{2\pi}{k+N}$	<p>brane の枚数</p> N <p>展開パラメータ</p> $x = i g_s = \frac{2\pi i}{k+N}$

図 4.2: Gopakumar-Vafa duality

4.3 結び目と conifold transition

前節で見たように conifold transition に伴う Gopakumar-Vafa duality は自由エネルギーの比較により確かめられたが、この主張の更なる拡張として考えられるのは deformed conifold 側 (Chern-Simons 理論) で S^3 上の observable として Wilson loop が入った場合で、このとき resolved conifold 側でどのような設定が対応しているかが疑問となる。Wilson loop の中で 1 番単純な unknot の場合に resolved conifold 側での対応を示したのが Ooguri-Vafa の論文 [61] であり、そこで示されたのは、deformed conifold 側での knot には Gopakumar-Vafa の場合の N 枚の brane 以外に non-compact な brane があると考えればよいということで、それに対応して resolved conifold 側でも brane が現れ resolved conifold 側に新たに現れる open string の寄与が S^3 上の unknot の期待値と一致するということである。この節で Ooguri-Vafa の論文を詳しく解説する。

4.3.1 結び目と brane

この節では N 枚の brane が巻いた deformed conifold の S^3 上に、observable として一番簡単な結び目である unknot を入れる場合を考える。2章で見たようにこのような結び目は Chern-Simons 理論における Wilson loop を表すが、1.3節の (1.58) で表されるように T^*S^3 には有限の面積を持つ instanton は存在しない。即ち T^*S^3 の中で instanton として寄与するのは図 1.5 で表されるような "instanton at infinity" のみであり、特に境界が S^3 の上で結び目を作るような instanton は存在し得ない。Ooguri-Vafa は S^3 に巻いた N 枚の brane の他に probe brane として S^3 と結び目上で交わるような non compact な M 枚の brane を T^*S^3 に導入し、 S^3 上の brane と probe brane の間にまたがる開弦の境界として結び目を実現した。このためには、結び目 \mathcal{K} が S^3 の座標 q_i で $q(s) \in S^3$ ($0 \leq s < 2\pi$) で表されているとし、導入する probe brane は S^3 上でこの結び目と交わるという条件を満たすものとしたいが、更に A-model の brane の条件として 1.3節で述べたように Lagrangian 部分多様体として表される 3-cycle に巻きつくものである必要がある。こういった 2 つの条件を満たす 3-cycle \mathcal{C} は具体的に構成出来て、

$$\mathcal{C} = \left\{ (q(s), p) \mid \sum_{i=1}^3 p_i \frac{dq^i}{ds} = 0, 0 \leq s < 2\pi \right\} \quad (4.54)$$

と選ぶことが出来る。即ち結び目の各点 $q(s)$ で dq/ds に直交する方向として $T_q^*S^3$ 中の 2 次元平面を選びそれを結び目に沿って一周回ることによって 3-cycle を定義している。このような定義を用いれば S^3 上の brane と probe brane は $S^3 = \{(q, p) \in T^*(S^3) \mid p = 0 (p \in T_q^*S^3)\}$ の中の結び目上においてのみ交わることがわかる。 \mathcal{C} は図 4.3 で表されるような $\mathbb{R}^2 \times S^1$ に同型な部分多様体であるが、(4.54) の構成から \mathcal{C} 上で $\omega = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i$ が 0 になり、即ち \mathcal{C} は Lagrangian 部分多様体となっている。

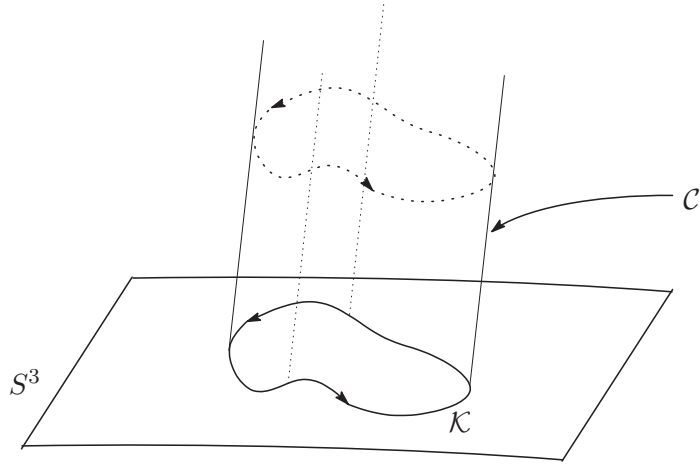


図 4.3: probe brane

S^3 と C の交わりが結び目 \mathcal{K} となっている。

4.3.2 Ooguri-Vafa operator

probe brane の導入により S^3 上の理論がどのような変更を受けるか調べる為、 S^3 に N 枚の brane が巻いていて、 C に M 枚の brane が巻いているような状況を考える。このとき deformed conifold における開弦は 3 種類あり、両端が、 S^3 についたもの、 C についたもの、それぞれ S^3 と C についたものである。ここで最初の 2 つの開弦はそれぞれ S^3 と C 上の Chern-Simons 理論に対応する開弦であるが、2 種類の brane にまたがった開弦は brane の交わった部分 (=結び目 \mathcal{K}) の上に存在し、その開弦を記述する \mathcal{K} 上の方は $U(N) \times U(M)$ の (N, \bar{M}) 表現の複素スカラー ϕ で与えられる。 ϕ の作用は、

$$S_{\mathcal{K}} = \oint_{\mathcal{K}} \text{Tr}_{(N, \bar{M})} \bar{\phi} (d + A - \tilde{A}) \phi \quad (4.55)$$

と与えられる。ここで A, \tilde{A} はそれぞれ $U(N), U(M)$ の Chern-Simons 理論のゲージ場であり、ここでは \tilde{A} を source とみなす。 $U(N), U(M)$ の内の $U(1)$ factor については framing の依存性に吸収させることとして、

$$U \equiv P \exp \left[\oint_{\mathcal{K}} A \right] \in SU(N) \quad U \text{ の固有値 : } e^{i\theta_n} \quad (n = 1, \dots, N) \quad (4.56)$$

$$V \equiv P \exp \left[\oint_{\mathcal{K}} \tilde{A} \right] \in SU(M) \quad V \text{ の固有値 : } e^{i\tilde{\theta}_m} \quad (m = 1, \dots, M) \quad (4.57)$$

として Wilson loop を定義する。\$U, V\$ を対角化して考えると、この複素スカラー \$\phi\$ を積分することにより得られる \$S^3\$ 上の理論への補正項 \$Z_{\mathcal{K}}\$ は定数倍を無視して書くと、

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{K}} &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_{\mathcal{K}}} = \det(d + A - \tilde{A})^{-1} \\ &= \exp \left[-\log \prod_{n=1}^N \prod_{m=1}^M \prod_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi i k + i\theta_n - i\tilde{\theta}_m) \right] \\ &= \exp \left[-\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{k=-\infty}^{\infty} \log(2\pi i k + i\theta_n - i\tilde{\theta}_m) \right] \end{aligned}$$

となるが、ここで更に、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \log(k + \theta) = \log[\sin(\pi\theta)] + \text{const.} \quad (4.58)$$

を用いて式変形すると、

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{K}} &= \exp \left[-\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \log \sin \left(\frac{\theta_n - \tilde{\theta}_m}{2} \right) \right] \\ &= \exp \left[-\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \log \left[e^{-\frac{i}{2}(\theta_n - \tilde{\theta}_m)} - e^{\frac{i}{2}(\theta_n - \tilde{\theta}_m)} \right] \right] \\ &= \exp \left[-\text{Tr}_{(N,M)} \log(U^{-\frac{1}{2}} \otimes V^{\frac{1}{2}} - U^{\frac{1}{2}} \otimes V^{-\frac{1}{2}}) \right] \\ &= \exp \left[-\text{Tr}_{(N,M)} \log(1 - U \otimes V^{-1}) \right] \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

という式が得られ、最後の式で \$\text{Tr}\$ はそれぞれ \$SU(N), SU(M)\$ の fundamental とした⁴。また途中の式変形で \$\det U = \det V = 1\$ を使った。(4.59) は複素スカラー \$\phi\$ による \$S^3\$ 上の Chern-Simons 理論への補正とみなされ、\$S^3\$ 上の作用は元の作用 \$S_{\text{CS}}\$ から、

$$S_{\text{CS}} \rightarrow S_{\text{CS}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \quad (4.60)$$

と変更を受ける。この補正項 \$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n}\$ は Ooguri-Vafa operator と呼ばれ、結局 probe brane を入れたことによる \$S^3\$ 上の理論の変化は作用に Ooguri-Vafa operator を加えることで記述される。

⁴以下では特に表現の指定のない Trace は fundamental とする。

4.3.3 deformed conifold 側の自由エネルギー

以上の議論は結び目の種類によらず成り立つが、結び目がある場合の S^3 上の自由エネルギーを具体的に評価する為、unknot の場合に (4.59) を計算していく。2.3節で見たように Chern-Simons 理論における unknot の期待値は (2.35) のように quantum dimension で与えられ、具体的には (A.63) のように書ける。この場合は (4.59) 中の Trace が全て fundamental なので、(A.63) は有用ではなく、ここでは quantum dimension を有限次元の $SU(N)$ の指標として表すことにより計算する [49]。即ちある $U_0 \in SU(N)$ で、 S^3 中の表現 R_i の unknot に対してその期待値 $\langle \text{Tr}_{R_i} U \rangle$ が、

$$\langle \text{Tr}_{R_i} U \rangle = \text{Tr}_{R_i} U_0 \quad (4.61)$$

と与えられるようなものがあるということである。 U_0 は fundamental 表現の時には具体的に、

$$U_0 = \text{diag}(e^{\frac{\pi i(N-1)}{k+N}}, e^{\frac{\pi i(N-3)}{k+N}}, \dots, e^{\frac{\pi i(1-N)}{k+N}}) = \text{diag}(e^{\frac{N-1}{2}x}, e^{\frac{N-3}{2}x}, \dots, e^{\frac{1-N}{2}x}) \quad (4.62)$$

という $N \times N$ の対角行列となる。ただし x は (4.21) で定義されている。Wilson loop の相関関数は U を c 数の U_0 に置き換えることで計算され、

$$\langle \text{Tr} U^{n_1} \text{Tr} U^{n_2} \dots \text{Tr} U^{n_h} \rangle = \text{Tr} U_0^{n_1} \text{Tr} U_0^{n_2} \dots \text{Tr} U_0^{n_h} \quad (4.63)$$

などとなる。(4.62) を用いれば、

$$\text{Tr} U_0^n = e^{\frac{N-1}{2}nx} + e^{\frac{N-3}{2}nx} + \dots + e^{\frac{1-N}{2}nx} = \frac{e^{\frac{Nnx}{2}} - e^{-\frac{Nnx}{2}}}{e^{\frac{nx}{2}} - e^{-\frac{nx}{2}}} = -i \frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{2 \sin \frac{n}{2}g_s} \quad (4.64)$$

である。ここで $t = Nx$ であり、また後で resolved conifold との対応を見る為 (4.53) を用いて deformed conifold の展開係数 x を resolved conifold の展開係数 g_s に書き直した。(4.63) を用いれば (4.64) を代入することにより Ooguri-Vafa operator の寄与 (4.59) の S^3 における期待値を計算することが出来、

$$\langle Z_{\mathcal{K}} \rangle = \left\langle \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right] \right\rangle = \exp \left[-i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{2n \sin \frac{n}{2}g_s} \text{Tr} V^{-n} \right] \quad (4.65)$$

この式の log を取ることにより unknot がある場合の deformed conifold 側の自由エネルギーが得られる。次にすべきことはこの値と適当な設定の resolved conifold 側の自由エネルギーとの比較であるが、その為に (4.65) を適当な形に書き換えておく。トポロジカルな理論において Kähler パラメータ t は複素数に値を持ち、相関関数は t について解析的であるので (4.65) を解析接続することが出来、解析接続により $\langle Z_{\mathcal{K}} \rangle$ は、

$$\langle Z_{\mathcal{K}} \rangle = \exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Tr} V^n + \text{Tr} V^{-n}}{2n \sin \frac{n}{2}g_s} e^{-\frac{n}{2}t} \right] \quad (4.66)$$

と書ける。

4.3.4 resolved conifold 側

上で deformed conifold の S^3 に unknot がある場合の自由エネルギーを計算した。このような場合に resolved conifold 側でどのような状況が対応するかは非自明であるが、重要な点は deformed conifold 側で結び目を導入したときに結び目上で S^3 と交わるような probe brane を導入したという点である。Gopakumar-Vafa の場合には S^3 に巻きついた brane は resolved conifold 側では消滅して Kähler パラメータに対応していたが、ここで導入した probe brane は non compact であり、conifold transition の特異点とは直接関係が無いので resolved conifold 側でも何らかの形でこの probe brane が残っていると考えるのが自然である。実際に以下で示すように transition の後に残っている brane の効果で resolved conifold 側に開弦の寄与が現れ、その自由エネルギーが (4.66) で計算された deformed conifold 側の自由エネルギーと一致することが示される。問題となるのは deformed conifold 側の brane が resolved conifold 側のどの Lagrangian 部分多様体に現れるかということである。deformed conifold と resolved conifold は異なる多様体であるから、それぞれの Lagrangian 部分多様体との間に直接的な対応は無いが、ここでは具体的に deformed conifold 上の brane の座標を定め、適当な仮定の下で resolved conifold の Lagrangian 部分多様体を選ぶ。deformed conifold 側の結び目に対応して resolved conifold 側でどのような Lagrangian 部分多様体に対応するかについては、代数的結び目の場合に [62] で、更に一般の結び目について [63] で調べられている。

4.3.5 brane の対応

一般に S^3 に結び目があった場合 deformed conifold 側での probe brane は (4.54) のようにして構成することが出来たが、ここでは resolved conifold との対応を見易くする為、具体的な座標を用いて probe brane の巻きつく Lagrangian 部分多様体を構成していく。まず T^*S^3 を (3.33) の形で表し、 y_k に対して反正則な involution i という作用を、

$$i : (y_1, y_2, y_3, y_4) \rightarrow (\bar{y}_1, \bar{y}_2, -\bar{y}_3, -\bar{y}_4) \quad (4.67)$$

として定義すると、 $y_k = x^k + ip_k$ より symplectic 形式 ω はこのように定められた反正則な i に対して $i : \omega \rightarrow -\omega$ と作用する。よって i の作用の固定点では $\omega = 0$ となり、 i の固定点として表される部分多様体は Lagrangian 部分多様体になっていることがわかる。よって deformed conifold 側ではこの i の固定点 \mathcal{C} に probe brane が巻きついているとする。 i の固定点は、

$$y_{1,2} = \bar{y}_{1,2}, \quad y_{3,4} = -\bar{y}_{3,4} \quad (4.68)$$

で与えられ、 x^k, y_k で表すと、

$$p_{1,2} = 0, \quad x^{3,4} = 0 \quad (4.69)$$

である。この条件を満たす deformed conifold の座標は (3.51) より、

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2 + (p_3)^2 + (p_4)^2 \quad (4.70)$$

となり、これが probe brane の巻きつく Lagrangian 部分多様体 \mathcal{C} の定義式となる。この probe brane と $S^3 (= \{p_k = 0\})$ の交わりは、

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2, \quad x^3 = x^4 = 0 \quad (4.71)$$

で表される S^3 の赤道部分である。よってこの probe brane で表される結び目は赤道に沿った unknot であることがわかる。

次に resolved conifold 側でこの probe brane に対応する Lagrangian 部分多様体 \mathcal{C}' を探す。ここでは resolved conifold 側においても上で定めた i という作用の固定点の Lagrangian 部分多様体上に brane が巻いているとして brane の位置を定義する。(3.36) の式で定義された座標に対して (4.68) の作用は、

$$i : (u, v) \rightarrow (\bar{y}_1 + i\bar{y}_2, -\bar{y}_3 - i\bar{y}_4) = (\bar{v}, -\bar{u}) \quad (4.72)$$

となるので、固定点である Lagrangian 部分多様体 \mathcal{C}' は、

$$u = \bar{v}, \quad v = -\bar{u} \quad (4.73)$$

で与えられる。このとき resolved conifold を表す (3.37) より、

$$u\bar{u} - v\bar{v} = 0 \quad (4.74)$$

となるが、これは $|u| = |v|$ を意味していて、このとき (3.38) で表される $z \in \mathbb{P}^1$ は、

$$z = \frac{u}{\bar{u}} = -\frac{u}{\bar{v}} \quad (4.75)$$

より $|z| = 1$ となる。これは resolved conifold の resolution に用いられた $S^2 \simeq \mathbb{P}^1$ の赤道の部分を表していて、resolved conifold 側で (4.74) として定義された brane は S^2 の赤道部分と交わっていることがわかる (図 4.4)。

4.3.6 resolved conifold 側での自由エネルギー

resolved conifold 側の (4.74) で定義された Lagrangian 部分多様体上に brane が巻きついていたとして、そのときの自由エネルギーを求めたい。4.1節で述べたように一般に toric 多様体があったときにその上の位相的弦の振幅は toric diagram で表されるような torus の縮退した点に局所化される。特に resolved conifold の場合は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ に弦が巻きつくが、ここで brane が無いときの場合と異なるのは、 S^2 は赤道で brane と交わっている為、何も無い場合の閉弦の寄与に加えて開弦の寄与が現れるという点である。即ち brane が無い場合は弦は S^2 の全体に巻きつくという場合しかあり得なかったが、brane の存在によって弦が図 4.4 の北半球もしくは南半球にのみ巻きつくことが可能になるということである。開弦の場合でも理論の作用は変わらないので、閉弦の場合と同様に (1.49) で表されるような開弦の面積の指数に比例した項が振幅に

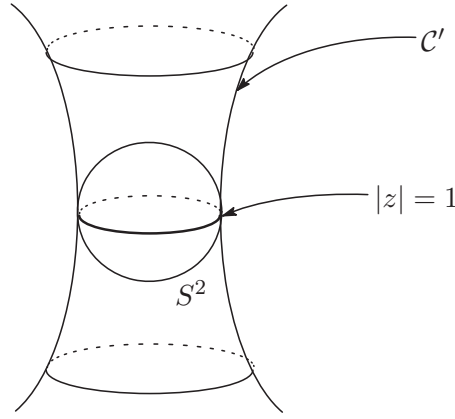


図 4.4: resolved conifold 側での brane

resolved conifold の S^2 と brane C が S^2 の赤道上で交わっている。

現れる。よって特に自由エネルギーを考えると閉弦の場合の Gromov-Witten 不変量 (1.51) の拡張として、”open” Gromov-Witten 不変量というものが定義される。open Gromov-Witten 不変量とは Gromov-Witten 不変量の引数の homology $H_2(X)$ を brane が巻きついている Lagrangian 部分多様体 \mathcal{L} に対する relative homology $H_2(X, \mathcal{L})$ に置き換え、更に Lagrangian 部分多様体のどの 1-cycle に世界面の境界のどの部分が何回巻いたか、という情報を表す w という引数によって定義される量で、

$$F_{w,g}(t) = \sum_{Q \in H_2(X, \mathcal{L})} N_{w,g,Q} e^{-Q \cdot t} \quad (4.76)$$

という式における $N_{w,g,Q}$ として定義される。 $b_1(\mathcal{L}) = 1$ の時には w の具体的な表記は $w = (w_1, \dots, w_h)$ となり、ここで h は世界面の穴の数を表し、 w_i は世界面上の i 番目の穴が target の Lagrangian 部分多様体の 1-cycle に何回巻きつくかを表す。resolved conifold に上で構成した brane が入ったような場合の open Gromov-Witten 不変量は [64, 65, 66] などで計算されていて、この open Gromov-Witten 不変量には更に整数で与えられる依存性が残っていることが知られている。この整数の依存性はちょうど deformed conifold 側での Chern-Simons 理論の framing の変化の整数依存性と対応しており、実際には開弦における整数への依存性が最初に発見されたのは [67] の mirror の B-model 側での計算においてである。

Gromov-Witten 不変量と同様に Gopakumar-Vafa 不変量についても開弦がある場合には ”open” Gopakumar-Vafa 不変量が、

$$\sum_{g=0}^{\infty} F_{w,g}(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^h w_i} \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{Q \in H_2(X, \mathcal{L})} \sum_{d|w} (-1)^{h+g} n_{w/d,g,Q} d^{h-1} \left(2 \sin \frac{dg_s}{2}\right)^{2g-2} \prod_{i=1}^h \left(2 \sin \frac{w_i g_s}{2}\right) e^{-dQ \cdot t} \quad (4.77)$$

という展開における $n_{w/d,g,Q}$ として定義され、この $n_{w/d,g,Q}$ は整数に値をとる。ここで d は全ての w_i について $d|w_i$ であるような d について和をとられ、 $w/d = (w_1/d, \dots, w_h/d)$ である。この open Gopakumar-Vafa 不変量は [5, 6] の閉弦の場合の Gopakumar-Vafa 不変量と同様な計算によって得られるが、詳細は [61, 62] などを参照されたい。

resolved conifold の場合は、図 4.4 で表されるように、 C' 上の brane を境界とするような relative homology として S^2 の北半球に開弦が巻きつく寄与と、 S^2 の南半球に開弦が巻きつく寄与がある。これらのうちで Gopakumar-Vafa 不変量に寄与するものは北半球に $\text{disk}(g=0, h=1)$ の Riemann 面) が一回巻きつくものと、南半球に disk が一回巻きつくものだけであることが知られていて、

$$\begin{cases} n_{1,0, \text{北}} &= 1 \\ n_{-1,0, \text{南}} &= 1 \\ n_{w,g,Q} &= 0 \text{ (otherwise)} \end{cases}$$

となる。これらの値より resolved conifold の自由エネルギーが決まり、半球の Kähler パラメータが $t/2$ で与えられることなどを考慮すると、

$$F(t, V) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Tr}V^n + \text{Tr}V^{-n}}{2n \sin \frac{n}{2} g_s} e^{-\frac{n}{2}t} \quad (4.78)$$

となり [61]、確かに (4.66) の結果と一致する。

ここで Ooguri-Vafa の結果から、deformed conifold 側の unknot に対応して resolved conifold 側では新たな brane を含めた状態に対応していることがわかったが、後の議論で重要になるのは deformed conifold の brane と resolved conifold の brane が対応したということである。そもそも deformed conifold 側では結び目に対して便宜的に probe brane を導入したが、その brane に対応する resolved conifold 側の brane は自由エネルギーの計算において非常に重要な役割を果たした。言い換えれば Ooguri-Vafa の結果は、Gopakumar-Vafa の結果の拡張として両側の conifold に (non-compact) な brane を導入した場合の両者の対応を示したということである。この対応を逆にたどることを考えてみる。まず resolved conifold 側に non-compact な brane があつたとして、それを deformed conifold 側で見ると Ooguri-Vafa の場合の probe brane のように S^3 と交わる brane があるはずで、その場合に deformed conifold 側で見えるものは brane と S^3 の交わる部分としての結び目、もしくは絡み目である。このような対応を一般の toric 多様体に拡張すると、brane のある場合の振幅を Chern-Simons 理論の計算により与えることが可能である。そのような手法を用いて次章で一般の toric Calabi-Yau 多様体上の string の 3 点 vertex を計算する。

第5章 topological vertex

この章では前章までの結果を用いて [10] で得られた toric Calabi-Yau 多様体上の string の 3 点 vertex の値を導く。3章で述べた通り、全ての toric diagram は局所的には \mathbb{C}^3 と同型であるので、一般の toric diagram における string の振幅を ($N \rightarrow \infty$ 枚の brane の導入により) 局所的な相互作用に書き直せば、全ての振幅はこの 3 点 vertex を用いて計算出来る。

5.1 toric Calabi-Yau 多様体上の A-model

4.1節でも述べたように toric 多様体上のトポロジカルストリングは全て diagram の直線の上のみに存在していると考えられる。この事実を用いれば、toric diagram と交わる Lagrangian 部分多様体を用いてトポロジカルストリングの振幅をそれぞれの \mathbb{C}^3 の patch に分けて計算することが出来る。これは物理的には、各線分で表された閉弦 (S^2) の間に brane/anti-brane の対 [68] を置くことにより、閉弦をその brane に境界を持つ開弦 (disk) と考えて計算することを意味している。即ち toric diagram に対して、線分を全て切り離すという操作により toric diagram は全て局所的な 3 点 vertex に分かれるが、ストリングの立場から述べれば、toric diagram 上の閉弦が \mathbb{C}^3 上で brane に境界を持つ開弦に分解される (図 5.1)。

このようにして toric 多様体上のストリングの振幅は \mathbb{C}^3 上の開弦の振幅へと分解されるが、 \mathbb{C}^3 上の振幅を計算したあとで再び toric diagram を適当に「貼り合わせる」ことによりもとの toric 多様体の振幅を計算することが出来る。このことはもとの toric 多様体の線分上を propagate する閉弦に対して、brane/anti-brane で表される中間状態の完全系の和を挿入することで振幅を書き換えたとも考えられる。brane/anti-brane の詳細には後で触れることとし、先にこのような開弦の「中間状態」がどのように分類されるかを見る。

5.1.1 巻きつき数と表現

閉弦の振幅は brane/anti-brane の導入により、その上で境界を持つ開弦に書き換えられるが、開弦の境界には巻きつき数で表される境界条件がある [34]。Riemann 面の穴の数を h とすると、最も単純には i 番目の穴が target の brane 上の S^1 に n_i 回巻きついたことを意味する $\vec{n} = (n_1, \dots, n_h)$ というベクトルを用いた表記が考えられる。ここで Riemann 面が向き付け可能であることから $n_i \geq 0$ と出来、また全ての巻きつき数の和は $\sum_{i=1}^h n_i$ となる。実際には Riemann 面の何番目の穴かという情報は全く等価である為、この \vec{n} から新しく \vec{k} という基底に移った方が以下で便利である。

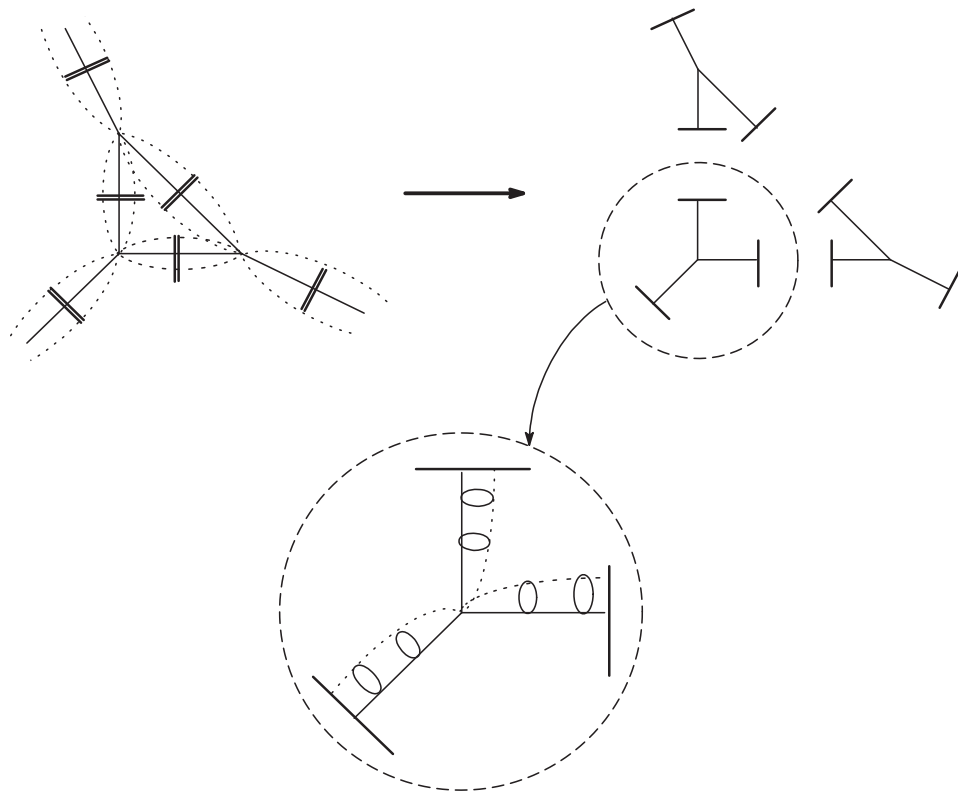


図 5.1: toric 多様体の分解

toric diagram の各線分に brane/anti-brane 対を導入することにより toric diagram 上の閉弦は開弦に変わり、toric diagram は \mathbb{C}^3 を表す局所的な 3 点 vertex に分解される。

\vec{k} の j 番目の成分は $n_i = j$ を満たす i の数によって与えられ、例えば $\vec{n} = (1, 0, 2, 0, 0, 1)$ ならば $\vec{k} = (2, 1, 0, 0, \dots)$ となる。 \vec{k} の言葉で表すと、穴の数 h 及び巻きつき数の和 ℓ は、

$$h = |\vec{k}| = \sum_{j=1}^{\infty} k_j, \quad \ell = \sum_{j=1}^{\infty} j k_j \quad (5.1)$$

である。この \vec{k} は置換群 S_l の共役類 $C(\vec{k})$ と対応づけられ、具体的には $C(\vec{k})$ は長さ 1 の cycle を k_1 個、長さ 2 の cycle を k_2 個含むというような置換を表す共役類となる。またこの対応は Young tableau を用いて表すことも出来て、そのとき ℓ は巻きつき \vec{k} を表す Young tableau の箱の数となる。共役類 $C(\vec{k})$ に含まれる置換群の位数は $l!/z_{\vec{k}}$ であり、ここで $z_{\vec{k}}$ を、

$$z_{\vec{k}} = \prod_j k_j! j^{k_j} \quad (5.2)$$

と定義した。 \vec{k} で表された開弦の境界が $N (\rightarrow \infty)$ 枚の brane 上で作る Wilson loop は、前章と同様に添え字の無い Tr を fundamental 表現の trace をとして、

$$\Upsilon_{\vec{k}}(U) = \prod_{j=1}^{\infty} (\text{Tr} U^j)^{k_j} \quad (5.3)$$

である。(5.2),(5.3) を用いれば、4.3節で現れた Ooguri-Vafa operator(4.59) は、

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right] &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right)^m \\ &= 1 + \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \Upsilon_{\vec{k}}(U) \Upsilon_{\vec{k}}(V^{-1}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

と書き直せる。ただし \vec{k} の和は $|\vec{k}| > 0$ に対してとるものとする。 $(\vec{k} = \vec{0}$ は第 1 項の 1 として現れているともみなせる。) 巻きつき数で表された (5.3) の作用素は Frobenius formula を用いて $U(\infty)$ の表現¹で表される作用素に書き直すことが出来て、

$$\Upsilon_{\vec{k}}(U) = \sum_R \chi_R(C(\vec{k})) \text{Tr}_R U \quad (5.5)$$

となる。ここで $\chi_R(C(\vec{k}))$ は R の Young tableau に対応した表現での $C(\vec{k})$ の指標であり、 R 及び \vec{k} を Young tableau で表したときに (5.5) の関係式の両辺で Young tableau の box の総和は等しく、即ち、

$$\chi_R(C(\vec{k})) \propto \delta_{\ell(R), \ell(\vec{k})} \quad (5.6)$$

¹巻きつき数を Young tableau で表せば無限個の行、列を持つ Young tableau が現れるので、それを $U(N)$ の表現の Young tableau と対応付ける為には $N \rightarrow \infty$ とする必要がある。

である。このことは後に振幅の Kähler moduli への依存性をみるときに、巻きつき数で表された場合と表現で表された場合の対応を示している。(5.5) 及び指標の直交性、

$$\sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \chi_R(C(\vec{k})) \chi_{R'}(C(\vec{k})) = \delta_{R,R'} \quad (5.7)$$

$$\sum_R \frac{1}{z_{\vec{k}}} \chi_R(C(\vec{k})) \chi_R(C(\vec{k}')) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \quad (5.8)$$

を用いれば Ooguri-Vafa operator は、

$$\exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right] = 1 + \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \Upsilon_{\vec{k}}(U) \Upsilon_{\vec{k}}(V^{-1}) = 1 + \sum_R \text{Tr}_R U \text{Tr}_R V^{-1} \quad (5.9)$$

となり、ここで R の和は自明な表現は除いた $SU(\infty)$ の全ての表現についての和である。また (5.7) を用いれば (5.5) の逆は、

$$\text{Tr}_R U = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} \chi_R(C(\vec{k})) \Upsilon_{\vec{k}}(U) \quad (5.10)$$

となる。

brane の上での開弦の境界は巻きつき数で表せるが、上記のように巻きつき数の情報は表現の基底を用いて書き換えることが出来る。後の議論で Chern-Simons 理論との対応を見る為には表現を用いて開弦の境界を分類した方が便利であるので、以下の議論では表現の基底を用いる。

5.1.2 3点 vertex

図 5.1 で示したように toric 多様体上の弦の振幅は \mathbb{C}^3 における振幅に分解された。このとき 3 種類の弦が \mathbb{C}^3 に入射してきて 3 点 vertex で相互作用するとみなせ、 \mathbb{C}^3 上の分配関数 Z は 3 種類の弦の (巻きつき数で表された) 境界条件 $\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}$ を足し合わせることで、

$$Z = \sum_{\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}} C_{\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}} \prod_{i=1}^3 \frac{1}{z_{\vec{k}^{(i)}}} \Upsilon_{\vec{k}^{(i)}}(U_i) \quad (5.11)$$

となる。ここで $C_{\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}}$ は $\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}$ という巻きつき数を持つ 3 種類の弦の相互作用の係数である。この巻きつき数で表された 3 点 vertex を (5.5) を用いて表現で表された 3 点 vertex に書き換えることが出来て、

$$Z = \sum_{R_1, R_2, R_3} C_{R_1, R_2, R_3} \prod_{i=1}^3 \text{Tr}_{R_i} U_i \quad (5.12)$$

となる。ただし C_{R_1, R_2, R_3} は表現を用いて表した 3 点 vertex の係数であり、(5.11) との対応は、

$$C_{R_1, R_2, R_3} = \sum_{\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}} C_{\vec{k}^{(1)}, \vec{k}^{(2)}, \vec{k}^{(3)}} \prod_{i=1}^3 \frac{\chi_{R_i}(C(\vec{k}^{(i)}))}{z_{\vec{k}^{(i)}}} \quad (5.13)$$

で与えられる。このように表現の基底で表された vertex から toric 多様体上の弦の振幅を再現する為には、巻きつき数の場合と同様に、それぞれの弦の中間状態 (toric diagram の線分上) をその弦が brane 上に作る Wilson loop の表現で分類し、最後に線分上の表現について足し合わせるにより得られる。

この章では (5.12) で表された C_{R_1, R_2, R_3} を具体的に求めることを主要な目標とする。この C_{R_1, R_2, R_3} がわかれば、後は線分上の propagator に対応する項と framing に対応する項を考慮することで toric 多様体上の振幅が全て得られることとなる。

5.1.3 brane と framing

toric 多様体を \mathbb{C}^3 に分解する上で brane/anti-brane の対を導入する必要があったが、そのような brane/anti-brane の選び方には任意性が残っている。実際にそのような任意性が Chern-Simons 理論における framing 依存性に対応していることを見る [67]。

toric diagram の線分と交わるように置かれた brane/anti-brane は non-compact であり、無限遠での境界条件を指定する必要がある。この為には A-model が complex moduli に対する依存性を持たないことから、特に brane の場所を表す Lagrangian 部分多様体の体積に寄らないので、この non-compact な brane を有限の大きさに変えられることを用いる。即ち $\mathbb{R}^2 \times S^1$ と同型な brane を、toric diagram の base の \mathbb{R}^3 の有限の距離の上で brane の cycle を縮退させることにより S^3 や $S^2 \times S^1$ などの compact な多様体に置き換える (図 5.2)。

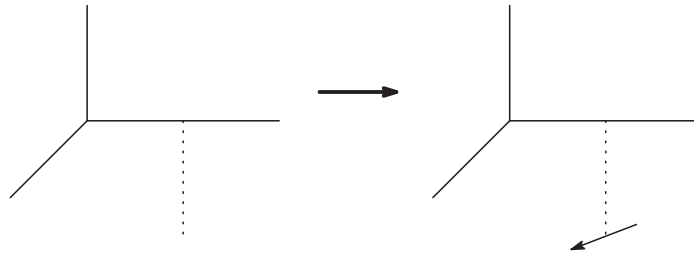


図 5.2: brane の境界条件

non-compact な brane (左) の無限遠での境界条件を与えることは、brane を compact にした場合 (右) で brane の縮退する cycle を選ぶことに相当する。

このとき境界条件に対応するのは brane に新たに指定された縮退する cycle であり、図 5.2 中で矢印で表されている。この cycle を $f = (p, q)$ として、brane が交わる toric diagram 上の縮退した cycle を $v = (r, s)$ とすると brane が S^3 となる条件として、

$$f \wedge v = ps - qr = 1 \tag{5.14}$$

を課すこととする。このときある f が (5.14) を満たすとすれば、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f - nv$ も (5.14) を満たすことがわかる。この整数の任意性は framing の任意性に対応しており、brane

の境界条件はこの n で表される。ある framing $f^{(0)}$ を固定すれば、その framing に対する相対的な framing $f^{(n)}$ は

$$f^{(n)} \wedge f^{(0)} = n \quad (5.15)$$

という式で定義される。この依存性を考慮すると、(5.12) の vertex の場合は 3 種類の brane の framing に依存し、

$$C_{R_1, R_2, R_3}^{f_1, f_2, f_3} \quad (5.16)$$

という framed vertex に書き直される。framing \wedge の具体的な依存性は、(2.30) 及び $N \rightarrow \infty$ より、

$$C_{R_1, R_2, R_3}^{f_1 - n_1 v_1, f_2 - n_2 v_2, f_3 - n_3 v_3} = (-1)^{\sum_i \ell(R_i) n_i} q^{\frac{1}{2} \sum_i \kappa_{R_i} n_i} C_{R_1, R_2, R_3}^{f_1, f_2, f_3} \quad (5.17)$$

となる。標準的な framing を選ぶ為には \mathbb{C}^3 に対する $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用を用いればよい。 \mathbb{C}^3 の 3 つの半直線の向きを vertex への内向きの方向に v_i と選び、それぞれの半直線と交わる brane の framing を f_i とする。このとき $\sum_i v_i = 0$ であり、 $v_i \wedge v_j = \pm 1$ ($i \neq j$) より、

$$v_3 \wedge v_2 = v_2 \wedge v_1 = v_1 \wedge v_3 = 1 \quad (5.18)$$

と選ぶことが出来る。このとき自然な f_i の framing として、

$$(f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_3^{(0)}) = (v_2, v_3, v_1) \quad (5.19)$$

を基準とすることが出来、これは (5.14) を満たしている (図 5.3)。

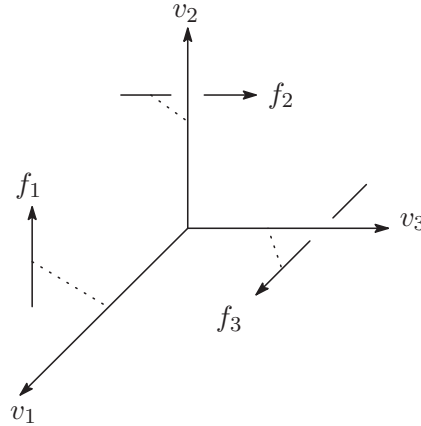


図 5.3: topological vertex における基準となる framing

ここで定義した framing は 2.2 節の canonical framing とは異なっていることに注意されたい。例えば図 5.3 において、 v_3 と f_3 は直交していない為、この座標での自然な S 変換のみでは移り

合わず、 T 変換を用いる必要がある。よって、この T 変換の作用により brane において v_3 上の S^1 fiber の self-linking number は non-zero となる。一般の f_i, v_i に対しては $g \in SL(2, \mathbb{Z})$ として、

$$(f_i, v_i) \rightarrow (g \cdot f_i, g \cdot v_i) \quad (5.20)$$

という対称性があるので、相対的な framing を測る為には、

$$v_1^{(0)} = (-1, -1), v_2^{(0)} = (0, 1), v_3^{(0)} = (1, 0) \quad (5.21)$$

という座標を用いることが出来る。よって $C_{R_1, R_2, R_3} \equiv C_{R_1, R_2, R_3}^{f_i^{(0)}, v_i^{(0)}}$ として基準の framing を定めれば、相対的な framing は (5.17) より、

$$C_{R_1, R_2, R_3}^{(f_i, v_i)} = C_{R_1, R_2, R_3}^{(f_i', v_i^{(0)})} = (-1)^{\sum_i \ell(R_i) n_i} q^{\frac{1}{2} \sum_i \kappa_{R_i} n_i} C_{R_1, R_2, R_3} \quad (5.22)$$

となる。ここで $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用を $(f_i, v_i) \rightarrow (f_i', v_i^{(0)})$ とした。またこの式における n_i は (5.15) より $i + 3 \equiv i$ として、

$$n_i = f_i' \wedge f_i(0) = f_i' \wedge v_{i+1}^{(0)} = f_i \wedge v_{i+1} \quad (5.23)$$

で得られる。 $SL(2, \mathbb{Z})$ の \mathbb{Z}_3 部分群、

$$v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, v_3 \rightarrow v_1 \quad (5.24)$$

による C_{R_1, R_2, R_3} の不変性は、 C_{R_1, R_2, R_3} の添え字の cyclic な置換に対する対称性を表していて、 C_{R_1, R_2, R_3} は、

$$C_{R_1, R_2, R_3} = C_{R_2, R_3, R_1} = C_{R_3, R_1, R_2} \quad (5.25)$$

を満たす。

5.1.4 propagator

3 点 vertex C_{R_1, R_2, R_3} が与えられたとして、そこから toric 多様体上の振幅を計算するには、vertex の間をつなぐ propagator を定義しなければならない。その為には toric diagram に向き付けを与える必要があり、その向き付けに対する vertex の変化について調べる。

まず vertex を示す v_i のうちで、例えば $v_1 \rightarrow -v_1$ という変換について考える。この変換により Wilson loop は全て逆向きとなる為に符号が逆となり、結果として穴の数が h で与えられる Riemann 面は $(-1)^h = (-1)^{|\vec{k}|}$ という寄与を受ける。またこのことは brane を anti-brane に置き換えた場合の符号の寄与と考えることも出来る [68]。この変換は表現の基底を用いれば、

$$\chi_{R^t}(C(\vec{k})) = (-1)^{|\vec{k}| + \ell(R)} \chi_R(C(\vec{k})) \quad (5.26)$$

より、

$$C_{R_1, R_2, R_3} \xrightarrow{v_1 \rightarrow -v_1} (-1)^{\ell(R)} C_{R_1^t, R_2, R_3} \quad (5.27)$$

と表すことも出来る。ただし R^t は表現 R の Young tableau を転置することにより得られる表現である。この式は v_1 を他の v_i に変えても同様に成り立ち、向き付けの変化に対する vertex の変換は (5.27) で決定される。

次に propagator について考える。線分の端の一方の vertex から出射された閉弦が brane 上で \vec{k} で表される巻きつき数を持っていたとして、その閉弦と、brane 上で \vec{k}' となり他方の vertex へと入射する閉弦をつなぐ propagator を考える (図 5.4)。

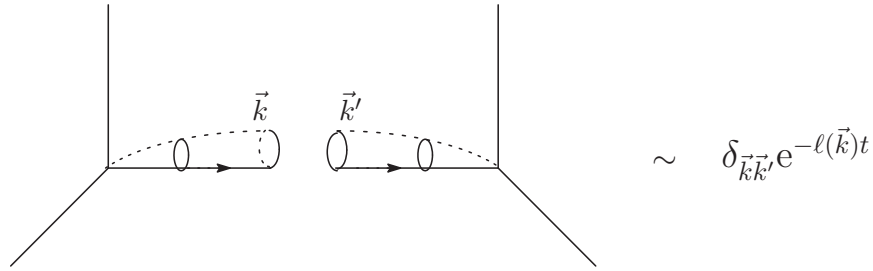


図 5.4: propagator

このとき、 $\vec{k} = \vec{k}'$ という条件を満たす 2 つの開弦のみが貼り合わされて閉弦となる。ここで貼り合わされて作られた閉弦が S^2 に巻きつくことにより target で面積を持ち、その面積が作用に寄与し振幅となって現れるが、この S^2 への巻きつき数は \vec{k} から (5.1) により得られ、 S^2 の Kähler パラメータを t とすると、

$$\exp(-\ell(\vec{k})t) \quad (5.28)$$

という propagator が得られる。より詳しく書くと、toric diagram Γ を 2 つの Γ_L, Γ_R という diagram に分解し、それぞれの分配関数を $Z(\Gamma)$ 及び $Z(\Gamma_L), Z(\Gamma_R)$ とすれば、

$$Z(\Gamma) = \sum_{\vec{k}} Z(\Gamma_L)_{\vec{k}} \frac{(-1)^{|\vec{k}|} e^{-\ell(\vec{k})t}}{z_{\vec{k}}} Z(\Gamma_R)_{\vec{k}} \quad (5.29)$$

と書ける。ここで $(-1)^{|\vec{k}|}$ は S^2 の貼り合わせにおいて北半球と南半球で向き付けが逆となることによる寄与で、 $1/z_{\vec{k}}$ は \vec{k} の巻きつき数を持つ 2 つの開弦を貼り合わせる等価な組み合わせの数が $z_{\vec{k}}$ であることによる。(5.29) を表現の基底で書き換えると、(5.26) 及び指標の直交性 (5.7) より、

$$Z(\Gamma) = \sum_Q Z(\Gamma_L)_Q (-1)^{\ell(Q)} e^{-\ell(Q)t} Z(\Gamma_R)_Q \quad (5.30)$$

となる。

このように propagator が具体的に与えられたので、あとは 3 点 vertex C_{R_1, R_2, R_3} の値がわかれば toric 多様体上の振幅を全て計算出来る。次の節では conifold transition を用いて Chern-Simons 理論の結び目の期待値から C_{R_1, R_2, R_3} の値を導く方法について議論する。

5.2 vertex の導出

この節では 4 章で得られた手法を用いることで C_{R_1, R_2, R_3} の具体形を示す。結果から先に述べると、

$$C_{R_1, R_2, R_3} = q^{\frac{1}{2}(\kappa_{R_2} + \kappa_{R_3})} \sum_{Q_1, Q_3} N_{Q_1 Q_3}^{R_1 R_3} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 Q_3}}{W_{R_2 \bullet}} \quad (5.31)$$

となり、ここで $N_{Q_1 Q_3}^{R_1 R_3}$ は、

$$N_{Q_1 Q_3}^{R_1 R_3} = \sum_Q N_{Q Q_1}^{R_1} N_{Q Q_3}^{R_3} \quad (5.32)$$

と与えられる。ただし $N_{R_1 R_2}^{R_3}$ は $R_1 \otimes R_2$ に含まれる R_3 の数であり、また、 $W_{R_1 R_2}$ は linking number が +1 の Hopf link の期待値 (2.41) の $N \rightarrow \infty$ における値である。このとき 2 章の議論より、分母の $W_{R_2 \bullet}$ (\bullet は自明な表現) は表現 R_2 の unknot の期待値であり、 R_2 の quantum dimension になる。以下では実際に vertex の値が (5.31)(5.32) となることを、 R_1, R_2, R_3 のうち 2 つ及び 1 つが自明な表現の場合から順に確かめていく。(5.32) の $U(\infty)$ の表現のテンソル積において Young tableau の box の数が保存することを用いれば、 R_1, R_2, R_3 に自明な表現が含まれる場合に (5.31) は著しく簡単化されることがわかる。即ち、

$$N_{R_1 R_2}^{R_3} \propto \delta_{\ell(R_1) + \ell(R_2)}^{\ell(R_3)} \quad (5.33)$$

より、特に自明な表現を含む場合は、

$$N_{R_1 R_2}^{\bullet} = \delta_{R_1}^{\bullet} \delta_{R_2}^{\bullet}, \quad N_{\bullet R_2}^{R_3} = \delta_{R_2}^{R_3} \quad (5.34)$$

などとなる。よって自明な表現が 1 つ含まれる場合は、(5.31) で $R_3 = \bullet$ とすることにより、

$$\begin{aligned} C_{R_1, R_2, \bullet} &= q^{\frac{1}{2}\kappa_{R_2}} \sum_{Q_1, Q_3} \sum_Q N_{Q Q_1}^{R_1} N_{Q Q_3}^{\bullet} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 Q_3}}{W_{R_2 \bullet}} \\ &= q^{\frac{1}{2}\kappa_{R_2}} \sum_{Q_1} N_{\bullet Q_1}^{R_1} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 \bullet}}{W_{R_2 \bullet}} \\ &= q^{\frac{1}{2}\kappa_{R_2}} W_{R_2^t R_1} \end{aligned} \quad (5.35)$$

となり、またこの式で $R_2 = \bullet$ とすれば自明な表現が 2 つの場合は、

$$C_{R_1, \bullet, \bullet} = W_{\bullet R_1} \quad (5.36)$$

となる。このように自明な表現が含まれる場合の3点 vertex は単純に Hopf link 及び unknot の期待値となることがわかる。このことは4章で議論したような conifold transition を用いて比較的容易に理解出来るが、その為にまず \mathbb{C}^3 への conifold transition の応用について議論する。

5.2.1 \mathbb{C}^3 と conifold transition

conifold transition を用いて vertex を計算する上でまず用いることは、自明な表現は non-compact な 2-cycle と対応している、という事実である。このことは4章でも述べたが、non-compact な 2-cycle に string が巻きつくると、無限大の面積から作用に無限大の寄与が現れ、経路積分に寄与しない。よって例えば図 5.1 で表したような brane によって分解された \mathbb{C}^3 の一部に対して、brane の先まで toric diagram を延長しても全体として string の巻きつきの寄与は変化しない(図 5.5)。よって toric 多様体を分解して得られた \mathbb{C}^3 は、brane によって切り取られ

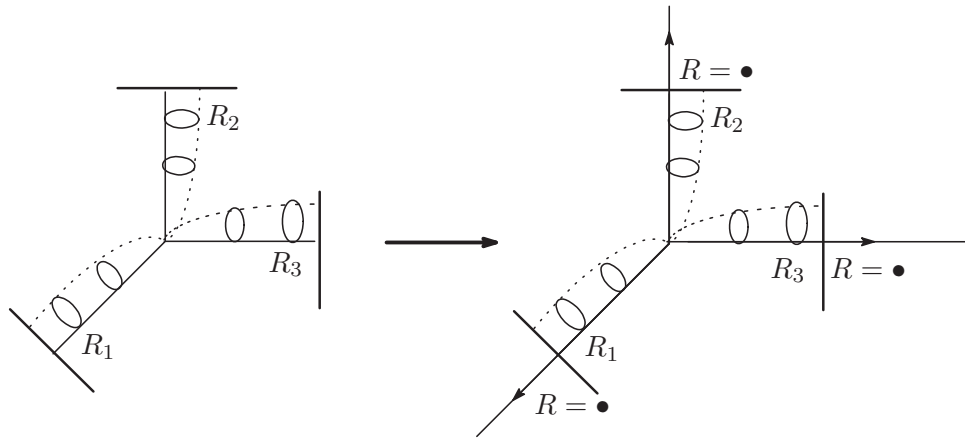


図 5.5: \mathbb{C}^3 の拡張

non-compact な 2-cycle には string は巻きつくことは出来ず、constant map の以外は寄与しない為 non-compact な cycle を付け加えることが出来る。この操作により、brane で切り取られた3点 vertex(左)は brane と交わった \mathbb{C}^3 (右) と等価であることがわかる。

た \mathbb{C}^3 の一部ではなく、brane と交わっている non-compact な \mathbb{C}^3 全体とみなすことが出来るのである。ここで vertex から見て brane の向こう側は non-compact なので string は巻きつくことが出来ない。よって brane/anti-brane の対のうちで vertex 側の brane には任意の表現 R の Wilson loop が存在し得るが、brane の外側には非自明な Wilson loop は存在出来ず、巻きつき数で表せば $\vec{k} = \vec{0}$ 、表現で表せば $R = \bullet$ となっている。逆に vertex のうちで表現が自明なものがあれば、そこには brane を置く必要は無い。即ち、brane を取り去ることにより vertex から伸びる直線全体が1つの non-compact な 2-cycle となり、non-compact な diagram の上では Wilson loop は存在出来ないので、自明な表現が得られる(図 5.6)。

次に \mathbb{C}^3 に対する conifold transition の作用について考える。基本的なアイデアは \mathbb{C}^3 の toric

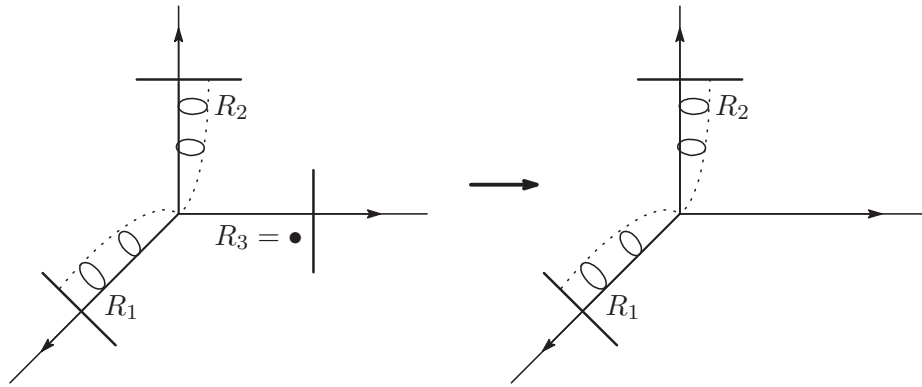


図 5.6: 自明な表現と brane

自明な表現の string は面積 0 であることから brane 上で Wilson loop を為さず (左)、これは non-compact な 2-cycle がある場合 (右) と同じ状態を表わしている。

diagram を、Kähler パラメータ t を無限大にした resolved conifold から得られた diagram とみなすことである。即ち、 \mathbb{C}^3 の vertex 上に自明な表現があった場合その方向への直線は non-compact であるとみなせるが、この non-compact な直線を resolved conifold における Kähler パラメータが無限大となったものと考えれば、そのような resolved conifold に対して conifold transition を施すことが出来る (図 5.7)。

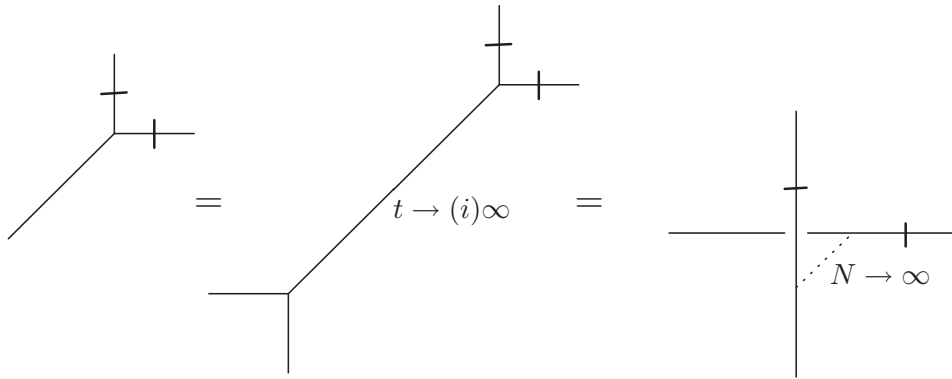


図 5.7: \mathbb{C}^3 の conifold transition

\mathbb{C}^3 を $t \rightarrow \infty$ の resolved conifold と思うことにより conifold transition を施すことが出来る。この場合 transition によって得られる deformed conifold の S^3 には $N \rightarrow \infty$ 枚の brane が巻きついている。

このとき (4.23) から resolved conifold 側で $t \rightarrow (+i)\infty$ とする為には deformed conifold 側では $N \rightarrow \infty$ となるので、 \mathbb{C}^3 からの transition で得られる deformed conifold の S^3 上の理論は $U(\infty)$ Chern-Simons 理論となる。ここで、このような transition を用いる為には \mathbb{C}^3 で 3 つの表現に少なくとも 1 つ自明な表現が含まれていて、brane の無い non-compact な直線が存在する

ことが必要であった。よって全ての表現が非自明な場合には conifold transition を直接用いるだけでは vertex の値を求めることは出来ず、多少複雑な過程を要する。

5.2.2 $C_{R,\bullet,\bullet}$ の導出

まずは表現のうち1つだけが非自明な場合に vertex の値 $C_{R,\bullet,\bullet}$ を求め、それが (5.36) と一致することを見る。この場合は \mathbb{C}^3 上の1つの直線のみには brane が存在し、他の2方向は non-compact となっている。ここで vertex と brane の間の disk の Kähler パラメータを t とする。このような設定の \mathbb{C}^3 に対して conifold transition を行くと図 5.8 のように brane が配置された deformed conifold が得られる。

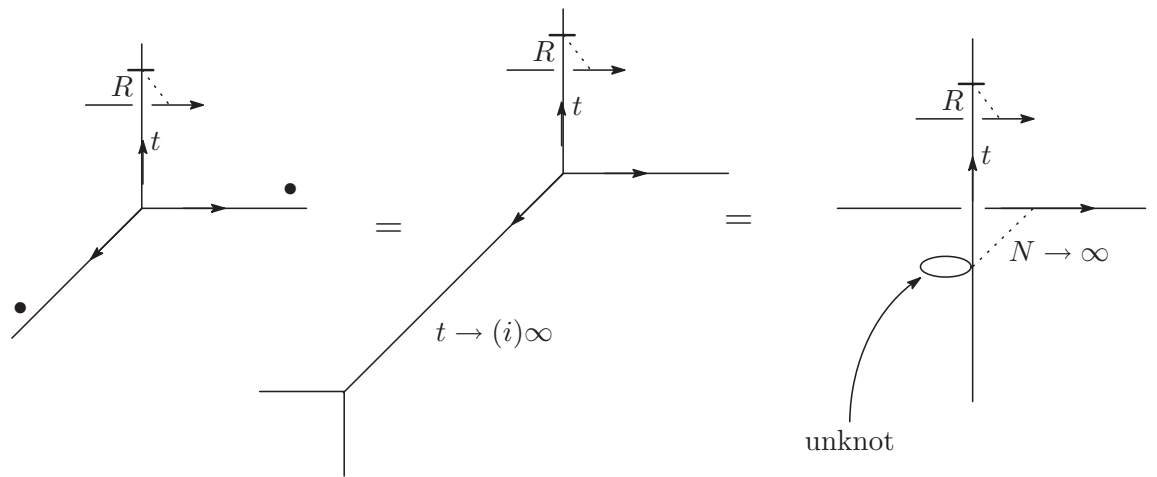


図 5.8: $C_{R,\bullet,\bullet}$ の導出に用いられる conifold transition

resolved conifold 側で brane を1種類のみ挿入すると、deformed conifold 側で unknot が現れる。

このように deformed conifold に新しく brane が加わったという設定は 4.3 節での設定と類似しているが、多少異なっている。両者の相違点は、4.3 節の場合は probe brane と S^3 上の brane が交わっていたのに対して、図 5.8 の場合は2種類の brane が Kähler パラメータ $t \neq 0$ だけ離れていることと、4.3 節では brane 上の Wilson loop の表現は全て足しあわされていたのに対して、この場合は brane 上の表現が1つに定まっているということである。 t は deformed conifold 側では2種類の brane の間の annulus の面積に対応していて、このことにより 4.3 節で brane 間の開弦を記述していた massless の複素スカラー ϕ が、図 5.8 においては開弦の target における面積に相当する質量 t を持った massive な複素スカラーになる。即ち、この massive 複素スカラーを同じ記号で ϕ と書くと、deformed conifold の S^3 の結び目 (Wilson loop) における作用は massless の

場合の (4.55) から、

$$S_{\mathcal{K}} = \oint_{\mathcal{K}} \text{Tr}_{(N,M)} \bar{\phi} (d + t + A - \tilde{A}) \phi \quad (5.37)$$

と変更を受け、ここでこの場合は $N = M = \infty$ である。brane 上の Wilson loop の表現を全て足し合わせるとすると、 ϕ が massive の場合の Ooguri-Vafa operator が (定数倍を無視して)、

$$\begin{aligned} \det(d + t + A - \tilde{A})^{-1} &= \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \log \sin \left(\frac{\theta_n - \tilde{\theta}_m + it}{2} \right) \right] \\ &= \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \log \left[e^{-\frac{i}{2}(\theta_n - \tilde{\theta}_m + it)} - e^{\frac{i}{2}(\theta_n - \tilde{\theta}_m + it)} \right] \right] \\ &= \exp \left[- \text{Tr} \log \left((U^{-\frac{1}{2}} \otimes V^{\frac{1}{2}}) e^{\frac{t}{2}} - (U^{\frac{1}{2}} \otimes V^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{t}{2}} \right) \right] \\ &= \exp \left[- \text{Tr} \log (1 - e^{-t}(U \otimes V^{-1})) \right] \\ &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nt} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

となり、新たに e^{-nt} という寄与が現れる。(5.38) は、例えば massless の場合から $V \rightarrow e^t V$ という変更を施したと思えば容易に他の基底で書き直すことが出来、(5.9) より巻きつき数及び表現の基底では、

$$\exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nt} \text{Tr} U^n \text{Tr} V^{-n} \right] = 1 + \sum_{\vec{k}} \frac{1}{z_{\vec{k}}} e^{-\ell(\vec{k})t} \Upsilon_{\vec{k}}(U) \Upsilon_{\vec{k}}(V^{-1}) \quad (5.39)$$

$$= 1 + \sum_R e^{-\ell(R)t} \text{Tr}_R U \text{Tr}_R V^{-1} \quad (5.40)$$

となる。Ooguri-Vafa operator は deformed conifold 側での probe brane の寄与を表しているが、ここで $e^{-\ell(R)t}$ などの項は resolved conifold 側で string の面積が作用に与える寄与と 1 対 1 に対応している。よって、brane が離れていることによる効果は deformed conifold 側と resolved conifold 側で同じであることがわかったので、resolved conifold 側の vertex に対応する項としては 4.3 節の議論と同様にして、表現 R の unknot の期待値が現れることとなる。よって、

$$C_{R, \bullet, \bullet} = \langle \text{Tr}_R U \rangle = W_{\bullet R} \quad (5.41)$$

が得られ、これは (5.36) と一致する。この $C_{R, \bullet, \bullet}$ の値を用いて、例えば $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1(\text{resolved conifold})$ や $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(0) \rightarrow \mathbb{P}^1$ (図 3.5) などの分配関数が計算出来、特に resolved conifold の場合には 4 章の結果と一致する。具体的には [69] resolved conifold の分配関数を Z として、

$$\begin{aligned} Z &= \sum_R C_{R, \bullet, \bullet} e^{-\ell(R)t} (-1)^{\ell(R)} C_{R^t, \bullet, \bullet} \\ &= \sum_R (-1)^{\ell(R)} e^{-\ell(R)t} W_{\bullet R} W_{\bullet R^t} \end{aligned} \quad (5.42)$$

であるが、ここで Schur 関数 S_R を用いて $W_{\bullet,R}$ の具体的な値を、

$$W_{\bullet,R} = S_R(x_i = q^{i-\frac{1}{2}}) \quad (5.43)$$

とすれば、この分配関数は、

$$\begin{aligned} Z &= \sum_R (-e^{-t})^{\ell(R)} S_R(q) S_{R^t}(q) \\ &= \sum_R S_R(-e^{-t}q) S_{R^t}(q) \end{aligned} \quad (5.44)$$

と書ける。ここで Schur 関数の満たす公式、

$$\sum_R S_R(x) S_R(y) = \prod_{i,j \geq 1} (1 - x_i y_j)^{-1} \quad (5.45)$$

$$\sum_R S_R(x) S_{R^t}(y) = \prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j)^{+1} \quad (5.46)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{i,j \geq 1} (1 - e^{-t} q^{i+j-1})^{+1} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-t} q^k)^k \\ &= \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{n} \frac{q^n}{(1 - q^n)^2} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt}}{n} \frac{1}{(2 \sin \frac{n}{2} g_s)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

となり、これは (4.6) と一致する。

5.2.3 $C_{R_1, R_2, \bullet}$ の導出

次に 3 種類の表現のうちで 1 つだけが自明な場合の vertex の値を求める。 $C_{R_1, R_2, \bullet}$ は [70, 71] においても、ここでの議論とは多少異なった方法で求められている。 $C_{R_1, R_2, \bullet}$ の計算は $C_{R, \bullet, \bullet}$ に加えて、自明な表現のうちの片方を非自明な表現に置き換えるので、対応した brane の設定としては、brane が新たに 1 種類加わり図 5.9 のようになる。

ここで 2 つの表現 R_1, R_2 のうち R_2 の側だけ diagram の向き付けを逆にしたが、実際に $C_{R_1, R_2, \bullet}$ を用いて 1-loop の toric diagram の分配関数などを計算する場合にはこのような向き付けが自然に現れる (図 5.10)

図 5.9 から、deformed conifold 上では 2 つの massive 複素スカラーが現れ、 S^3 上では 2 つの Wilson loop が linking number +1 の Hopf link となる。 $C_{R, \bullet, \bullet}$ の場合と同様に massive 複素スカ

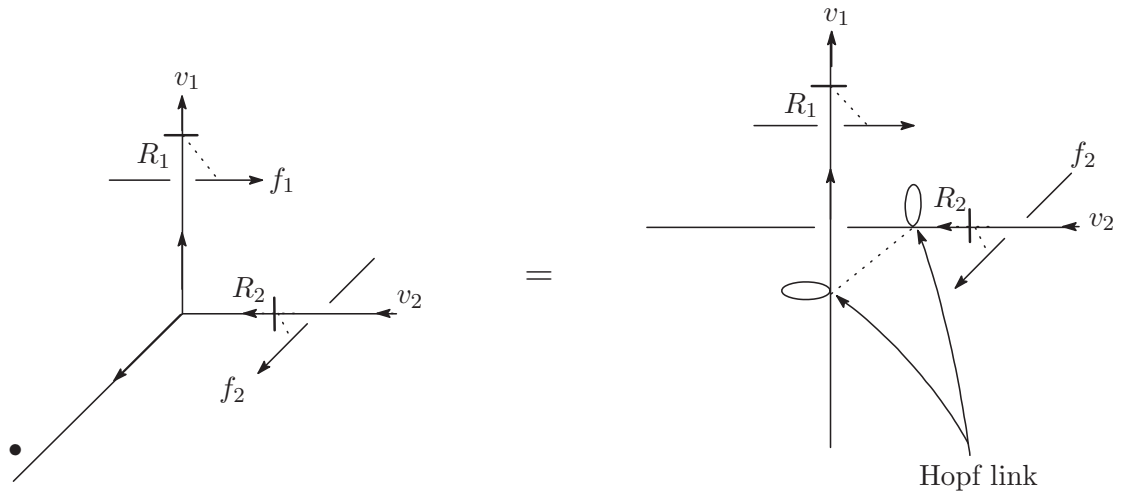


図 5.9: $C_{R_1, R_2, \bullet}$ の導出に用いられる diagram

resolved conifold 側で brane を 2 種類挿入すると、deformed conifold 側で Hopf link が現れる。

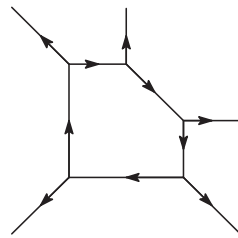


図 5.10: 1-loop diagram の例

ラーの効果は resolved conifold 側の Kähler パラメータの依存性と対応していて、vertex の値としては Hopf link の期待値が現れる。ここで、 R_1 の Wilson loop については $v_1 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 0)$ より Chern-Simons 理論の framing の意味で framing が 0 となるが、 R_2 の Wilson loop は、 $v_2 = (-1, 0)$, $f_2 = (-1, -1)$ より framing は -1 となる。この framing の寄与を踏まえると、(2.30) より vertex の値は、

$$(-1)^{\ell(R_2)} q^{-\frac{1}{2}\kappa_{R_2}} W_{R_2 R_1} \quad (5.48)$$

となる。一方で (5.35) の結果は、 $v_2 \rightarrow -v_2$ を考慮すると (5.27) より、

$$\begin{aligned} C_{R_1, R_2, \bullet} &\xrightarrow{v_2 \rightarrow -v_2} (-1)^{\ell(R_2)} C_{R_1, R_2^t, \bullet} \\ &= (-1)^{\ell(R_2)} q^{-\frac{1}{2}\kappa_{R_2}} W_{R_2 R_1} \end{aligned} \quad (5.49)$$

となり、(5.48) の結果と一致する。よって 1 つの表現のみが自明な場合も 3 点 vertex の公式 (5.31) が確かめられた。このようにして得られた $C_{R_1, R_2, \bullet}$ の値を用いれば 1-loop までの toric diagram の分配関数を求めることが出来る。ここで 1-loop の toric diagram が表す toric Calabi-Yau 多様体は geometric engineering [72, 73, 74] の意味では $\mathcal{N} = 2$ SUSY $SU(2)$ ゲージ理論と対応付けられるので、この vertex を用いて $SU(2)$ の場合の Instanton counting [75] との比較などが詳しく調べられている [76, 77, 78]。

5.2.4 C_{R_1, R_2, R_3} の導出

C_{R_1, R_2, R_3} は図 5.3 のように \mathbb{C}^3 の 3 つの直線全てが brane と交わっている設定に対応している為、このままでは conifold transition を用いて vertex の値を求めることは出来ない。そこで [10] では図 5.3 のような diagram の代わりに図 5.11 のような diagram を考察し、その後で L_1 で表されている brane を (無限遠での境界条件を保ったまま) 左側に移動させることにより 3 点 vertex の値を求めた。

ここで図 5.11 のうちで vertex と i 番目の brane の間のストリングの表現を Q_i とし、1 番目の brane と 3 番目の brane の間のストリングの表現を Q とした²。conifold transition を用いた deformed conifold の側の記述は $C_{R_1, R_2, \bullet}$ のときと同様で³、deformed conifold の S^3 上で Wilson loop が為す絡み目は 2.3 節の図 2.10 で表される $L(Q_2; Q_1^t, Q_3^t)$ となる。また、 i 番目の brane の上の loop を V_i とすると、図 5.11 に現れる Wilson loop は、 $\text{Tr}_{Q_1} V_1, \text{Tr}_{Q^t} V_1^{-1}, \text{Tr}_{Q_2} V_2, \text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3$ の 4 種類存在するが、ここで $\text{Tr}_{Q^t} V_1^{-1}$ については、 Q_1 が brane と交わり V_1 を為すとすると Q と交わるのは anti-brane であることから loop は V_1^{-1} となり、また向き付けが逆になる為、 $Q \rightarrow Q^t$ となっている。また V_3 に関しては、3 番目の brane には Q と Q_3 という 2 種類のストリングが交わ

²即ち、 Q_3 で表されるストリングは 1 番目の brane と相互作用をしていない。

³ $C_{R_1, R_2, \bullet}$ を導出したときは片方の表現の向き付けが内向きだった為に $\langle \text{Hopf link}_{R_1 R_2}^+ \rangle$ が得られたが、両方の表現が外向きの場合は $(-1)^{\ell(R_2)} \langle \text{Hopf link}_{R_1 R_2^t}^+ \rangle$ となる。

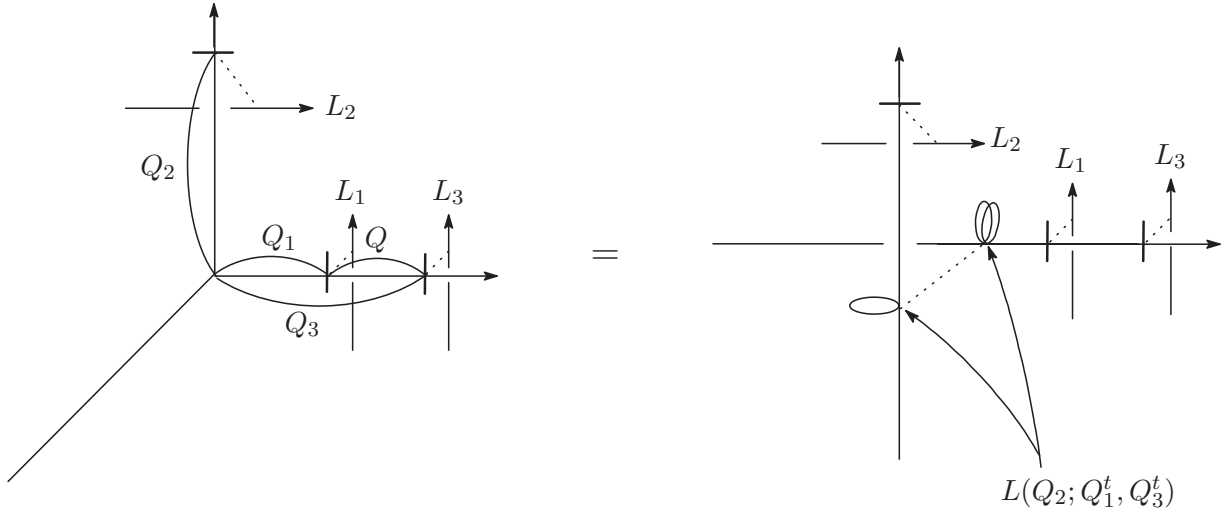


図 5.11: 3 点 vertex の導出に用いられる diagram

resolved conifold 側に図のような 3 種類の brane を挿入すると、deformed conifold 側で $L(Q_2; Q_1^t, Q_3^t)$ という絡み目が現れる。

り、 $Q \otimes Q_3$ という表現が現れる。また Q_i という表現のストリングが巻きつく 2-cycle の Kähler パラメータを t_i とすると、図 2.10 のストリングの Kähler パラメータへの依存性は、

$$e^{-t_1 \ell(Q_1)} e^{-t_2 \ell(Q_2)} e^{-t_3 \ell(Q_3)} e^{-(t_3 - t_1) \ell(Q)} \quad (5.50)$$

となる。これらをまとめると、図 2.10 の brane の配位に対する分配関数 $Z(V_1, V_2, V_3)$ は、

$$Z(V_1, V_2, V_3) = \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q} e^{-t_1 \ell(Q_1) - t_2 \ell(Q_2) - t_3 \ell(Q_3) - (t_3 - t_1) \ell(Q)} (-1)^{\ell(Q_1) + \ell(Q) + \ell(Q_3)} \times \langle L(Q_2; Q_1^t, Q_3^t) \rangle \text{Tr}_{Q_1} V_1 \text{Tr}_{Q^t} V_1^{-1} \text{Tr}_{Q_2} V_2 \text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3 \quad (5.51)$$

となり、(2.47) を用いて $L(Q_2; Q_1^t, Q_3^t)$ の期待値を Hopf link の期待値に書き換えれば、

$$Z(V_1, V_2, V_3) = \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q} e^{-t_1 \ell(Q_1) - t_2 \ell(Q_2) - t_3 \ell(Q_3) - (t_3 - t_1) \ell(Q)} (-1)^{\ell(Q_1) + \ell(Q) + \ell(Q_3)} \times \frac{W_{Q_2 Q_1^t} W_{Q_2 Q_3^t}}{W_{Q_2 \bullet}} \text{Tr}_{Q_1} V_1 \text{Tr}_{Q^t} V_1^{-1} \text{Tr}_{Q_2} V_2 \text{Tr}_{Q \otimes Q_3} V_3 \quad (5.52)$$

となる。このように図 2.10 に対応した分配関数が計算されたので、次にこの配位を变形することで 3 点 vertex を求めるが、その為に (5.52) の中で、

$$e^{-t_1 \ell(Q_1) - t_2 \ell(Q_2)} (-1)^{\ell(Q_1)} W_{Q_2 Q_1^t} \text{Tr}_{Q_1} V_1 \text{Tr}_{Q_2} V_2 \quad (5.53)$$

という項に注目すると、これは図 5.12 の左側の diagram の寄与を表していて、実際 (5.35) 及び (5.22) より、

$$C_{Q_2, Q_1, \bullet}^{(0, -1, 0)} = (-1)^{\ell(Q_1)} W_{Q_2 Q_1^t} \quad (5.54)$$

である。

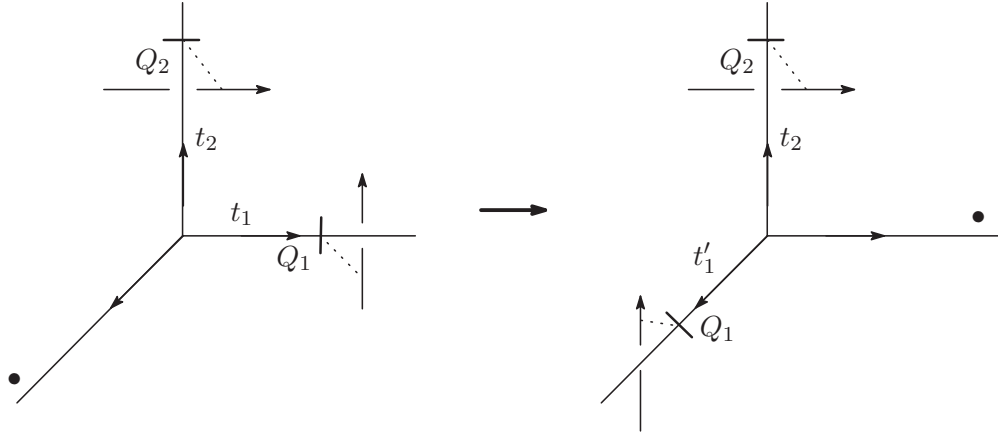


図 5.12: brane の配位の変更

よって、図 5.12の左側の diagram から右側の diagram への配位の変更に伴う寄与は、

$$\begin{aligned}
C_{Q_2, Q_1, \bullet}^{(0, -1, 0)} &= (-1)^{\ell(Q_1)} W_{Q_2 Q_1^t} \rightarrow C_{Q_1, Q_2, \bullet}^{(0, 0, 0)} = q^{\frac{1}{2}\kappa_{Q_2}} W_{Q_2^t Q_1} \\
\text{Tr}_{Q_1} V_1 \text{Tr}_{Q_2} V_2 &\rightarrow \text{Tr}_{Q_1} V_1^{-1} \text{Tr}_{Q_2} V_2 \\
e^{-t_1 \ell(Q_1)} e^{-t_2 \ell(Q_2)} e^{-(t_3 - t_1) \ell(Q)} &\rightarrow e^{-t_1' \ell(Q_1)} e^{-t_2 \ell(Q_2)} e^{-(t_3 + t_1') \ell(Q)} \quad (5.55)
\end{aligned}$$

とまとめられる。ただし $\text{Tr}_{Q_1} V_1 \rightarrow \text{Tr}_{Q_1} V_1^{-1}$ は、表現 Q_1 を持つストリングの境界が brane から anti-brane に変わったことによる変化である。(5.55) による分配関数の変化を $Z(V_1, V_2, V_3) \rightarrow Z'(V_1, V_2, V_3)$ とすると、

$$\begin{aligned}
Z'(V_1, V_2, V_3) &= \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q} e^{-t_1' \ell(Q_1) - t_2 \ell(Q_2) - t_3 \ell(Q_3) - (t_3 + t_1') \ell(Q)} (-1)^{\ell(Q) + \ell(Q_3)} q^{\frac{1}{2}\kappa_{Q_2}} \\
&\quad \times \frac{W_{Q_2^t Q_1} W_{Q_2 Q_3^t}}{W_{Q_2 \bullet}} \text{Tr}_{Q_1} V_1^{-1} \text{Tr}_{Q_2} V_2 \text{Tr}_{Q_3} V_3 \quad (5.56)
\end{aligned}$$

となり、更にテンソル積を展開して書き換えると、

$$\begin{aligned}
Z'(V_1, V_2, V_3) &= \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q} e^{-t_1' \ell(Q_1) - t_2 \ell(Q_2) - t_3 \ell(Q_3) - (t_3 + t_1') \ell(Q)} (-1)^{\ell(Q) + \ell(Q_3)} q^{\frac{1}{2}\kappa_{Q_2}} \\
&\quad \times \frac{W_{Q_2^t Q_1} W_{Q_2 Q_3^t}}{W_{Q_2 \bullet}} \sum_{R_1, R_3} N_{Q_1 Q^t}^{R_1} N_{Q, Q_3}^{R_3} \text{Tr}_{R_1} V_1^{-1} \text{Tr}_{R_2} V_2 \text{Tr}_{R_3} V_3 \\
&= \sum_{Q_1, Q_2, Q_3, Q} e^{-t_1' \ell(R_1) - t_2 \ell(Q_2) - t_3 \ell(R_3)} (-1)^{\ell(R_3)} q^{\frac{1}{2}\kappa_{Q_2}} \\
&\quad \times \frac{W_{Q_2^t Q_1} W_{Q_2 Q_3^t}}{W_{Q_2 \bullet}} \sum_{R_1, R_3} N_{Q_1 Q^t}^{R_1} N_{Q, Q_3}^{R_3} \text{Tr}_{R_1} V_1^{-1} \text{Tr}_{R_2} V_2 \text{Tr}_{R_3} V_3 \quad (5.57)
\end{aligned}$$

となる。ここで (5.33) を用いた。このようにして得られた値は実際には C_{R_1, R_2, R_3} ではなく、図 5.11, 5.12 からわかるように framing は R_1, R_2, R_3 に対して $0, 0, -1$ となる。即ち (5.57) において、

$$e^{-t_1 \ell(R_1) - t_2 \ell(Q_2) - t_3 \ell(R_3)} \text{Tr}_{R_1} V_1^{-1} \text{Tr}_{R_2} V_2 \text{Tr}_{R_3} V_3$$

の係数は $C_{R_1, R_2, R_3}^{0,0,-1}$ を表し、

$$\begin{aligned} C_{R_1, R_2, R_3}^{0,0,-1} &= \sum_{Q_1, Q_3, Q} (-1)^{\ell(R_3)} q^{\frac{1}{2} \kappa_{R_2}} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 Q_3^t}}{W_{R_2 \bullet}} N_{Q_1 Q^t}^{R_1} N_{Q, Q_3}^{R_3} \\ &= \sum_{Q_1, Q_3} (-1)^{\ell(R_3)} q^{\frac{1}{2} \kappa_{R_2}} N_{Q_1 Q_3}^{R_1 R_3} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 Q_3}}{W_{R_2 \bullet}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

となる。ただし、 $N_{Q_1 Q_3^t}^{R_1 R_3}$ は (5.32) で与えられ、また $Q \rightarrow Q^t, Q_3 \rightarrow Q_3^t$ という書き換えを行った。(5.58) と (5.22) より、 C_{R_1, R_2, R_3} は、

$$\begin{aligned} C_{R_1, R_2, R_3} &= (-1)^{\ell(R_3)} q^{\frac{1}{2} \kappa_{R_3}} C_{R_1, R_2, R_3}^{0,0,-1} \\ &= q^{\frac{1}{2} (\kappa_{R_2} + \kappa_{R_3})} \sum_{Q_1, Q_3} N_{Q_1 Q_3}^{R_1 R_3} \frac{W_{R_2^t Q_1} W_{R_2 Q_3}}{W_{R_2 \bullet}} \end{aligned} \quad (5.59)$$

となり、(5.31) で述べた vertex の値が確かめられた。

結論

以上のように、Gopakumar-Vafa duality、conifold transition の toric diagram 的記述、結び目不変量などを用いて local toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の 3 点 vertex を求めることが出来た。この vertex を用いて具体的な Calabi-Yau 多様体上の位相的弦の振幅を計算することが出来、実際に topological vertex によって計算された振幅の値は知られている結果を全て再現することが確かめられている [10]。

この vertex の値は、Hopf link の期待値で表されているが、この Hopf link の期待値は Schur 関数を用いて書き直すことが出来 [35, 79]、更にその Schur 関数は 2 次元の CFT の計算で表すことが出来る [80]。また、topological vertex は mirror symmetry [16] によって B-model 側でも解析されていて [10, 81]、 \mathbb{C}^3 の mirror に対応して現れる Riemann 面の上での boson, fermion との関係が示されている。

topological vertex の更なる応用としては、

- 結晶の溶解を表す統計力学系の topological vertex 的記述 [79, 82]
- Matrix model との比較 [83]
- Instanton Counting との比較 [76, 84, 77, 83, 85, 78]

などがある。

謝辞

本論文の執筆にあたり多くの方々にお世話になりました。特に、日頃から研究に関して御指導頂いている松尾泰先生を始め、親切なご助言を下された江口徹先生、山口哲氏、酒井一博氏、に深く感謝申し上げます。また日々有益な議論の相手となってくれる同期の小山文一君、中山優君、立川裕二君にこの場を借りてお礼を申し上げます。

補遺 A Wess-Zumino-Witten 模型

A.1 理論の構成

Wess-Zumino-Witten(WZW) 模型 [86, 87] の作用は

$$S^{\text{WZW}} = \frac{k}{16\pi} \int_{\Sigma} d^2x \text{Tr}'(\partial^\nu g^{-1} \partial_\nu g) + k\Gamma \quad (\text{A.1})$$

で与えられる。ここで、 $g(x)$ は semisimple な群 G (対応した Lie 代数を g とする) に値をとる行列値の Boson 場で、 Tr' は $t^a, t^b \in g$ ($[t^a, t^b] = \sum_c i f_{abc} t^c$) に対して $\text{Tr}'(t^a t^b) = 2\delta_{a,b}$ と定義されている。作用が実である為に $g(x)$ は unitary 表現であることが要請される。 Γ は Wess-Zumino 項と呼ばれ、

$$\Gamma = \frac{-i}{24\pi} \int_B d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}'(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) \quad (\text{A.2})$$

である。 B は境界として Σ を持つような 3 次元の多様体で、 \tilde{g} は g を B の上へ拡張したものである。(A.2) の定義には不定性が残っているが、その不定性を $\Delta\Gamma$ とすると、 $\Delta\Gamma$ は (A.2) の右辺の積分範囲を S^3 に変更したもので与えられ、

$$\Delta\Gamma = \frac{-i}{24\pi} \int_{S^3} d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}'(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) \quad (\text{A.3})$$

となる。この $\Delta\Gamma$ は $2\pi i$ の整数倍になる¹ことが示されるので、 $e^{\Delta\Gamma}$ は well defined となる。これから k が整数であることを要請すれば (A.1) は正しく定義された作用となることがわかる。

A.1.1 対称性と保存カレント

g の (正則及び反正則の) 変化に対する S^{WZW} の変化を見るために g を

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z) g(z, \bar{z}) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \quad (\text{A.4})$$

変化させることを考える。無限小変形は、

$$\Omega(z) = 1 + \omega(z), \quad \bar{\Omega}(\bar{z}) = 1 + \bar{\omega}(\bar{z}) \quad (\text{A.5})$$

¹Bott の定理により S^3 から G への写像は S^3 から G の $SU(2)$ 部分群への写像へと連続変形されるので、実際には S^3 から $SU(2) \simeq S^3$ への写像について (A.2) が整数値になることを示せば十分である。ただし、 G が $SO(3)$ の場合には $SU(2)$ 部分群を持たず (A.2) は πi の整数倍となる。

で与えられ、この無限小変形に対して g は

$$\delta_\omega g = \omega g, \quad \delta_{\bar{\omega}} g = -g\bar{\omega} \quad (\text{A.6})$$

と変化する。 $g \rightarrow g + \delta_\omega g + \delta_{\bar{\omega}} g$ に伴い作用は、

$$\begin{aligned} \delta S^{\text{WZW}} &= \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}'(g^{-1} \delta g [\partial_z (g^{-1} \partial_{\bar{z}} g)]) \\ &= \frac{k}{2\pi} \int d^2x \text{Tr}'[\omega(z) \partial_{\bar{z}} (\partial_z g g^{-1}) - \bar{\omega}(\bar{z}) \partial_z (g^{-1} \partial_{\bar{z}} g)] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となり、この式は部分積分により 0 となる。即ち S^{WZW} は local $G(z) \times G(\bar{z})$ 不変性を持っていることがわかる。この対称性に対する保存カレントを

$$J(z) \equiv -k \partial_z g g^{-1}, \quad \bar{J}(\bar{z}) \equiv k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (\text{A.8})$$

とすると、 g の変化 (A.6) に対するカレントの変化は、

$$\begin{aligned} \delta_\omega J &= -k (\partial_z \omega g + \omega \partial_z g) g^{-1} + k \partial_z g g^{-1} \omega \\ &= [\omega, J] - k \partial_z \omega \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となり、これを Lie 代数の基底を用いて書くと、

$$\delta_\omega J^a = \sum_{b,c} i f_{abc} \omega^b J^c - k \partial_z \omega^a \quad (\text{A.10})$$

となる。一方で、一般の相関関数 $\langle X \rangle$ に対して Ward identity は、

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum_a \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum_a \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle \quad (\text{A.11})$$

と与えられ、この式で $X = J$ とした場合と (A.10) を比べると、 J^a と J^b の OPE

$$J^a(z) J^b(w) \sim \frac{k \delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum_c i f_{abc} \frac{J^c(w)}{(z-w)} \quad (\text{A.12})$$

が得られ、これはカレント代数と呼ばれる。 J^a を mode 展開して

$$J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n^a \quad (\text{A.13})$$

と書くと J_n^a の交換関係は、

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c i f_{abc} J_{n+m}^c + kn \delta_{ab} \delta_{n+m,0} \quad (\text{A.14})$$

となり、これは affine Lie 代数の交換関係である²。 \bar{J} についても J と全く同様に affine Lie 代数をなすことが示されるが、 J と \bar{J} の OPE は正則なので、

$$[J_n^a, \bar{J}_m^b] = 0 \quad (\text{A.15})$$

であり J と \bar{J} の代数は独立である。

²zero-mode の部分だけ見ると J_0^a は通常の Lie 代数の交換関係を満たし、閉じた部分代数となっていることがわかる。

A.2 Sugawara construction

次に WZW 模型のエネルギー運動量テンソル $T(z)$ を求める。 $T(z)$ は、

$$T(z) = \gamma \sum_a (J^a J^a)(z) \quad (\text{A.16})$$

と書かれるとする。ここで γ は定数であり、実際この γ の値は J^a が次元 1 の primary operator になることを要請すれば一意に決まることがわかる。この為に具体的に (A.16) の表式と (A.12) の OPE を用いて $T(z)J(w)$ を計算すれば、

$$\begin{aligned} T(z)J^a(w) &= 2\gamma(k+y) \frac{J^a}{(z-w)^2} \\ &= 2\gamma(k+y) \left[\frac{J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a(w)}{(z-w)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

となる。ここで y は、

$$-\sum_{b,c} f_{abc} f_{cbd} = \sum_{b,c} f_{abc} f_{dbc} = 2y\delta_{ad} \quad (\text{A.18})$$

で定義される dual Coxeter 数である。(A.17) の第 2 項の係数が 1 となることを要請すれば、

$$\gamma = \frac{1}{2(k+y)} \quad (\text{A.19})$$

となり、 γ の値は一意に決まる。これを用いてエネルギー運動量テンソルの式は、

$$T(z) = \frac{1}{2(k+y)} \sum_a (J^a J^a)(z) \quad (\text{A.20})$$

となる。ここで $T(z)T(w)$ の OPE の一般形

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \quad (\text{A.21})$$

に (A.20) を代入して

$$\partial J^a(z)J^b(w) \sim \frac{-2k\delta_{ab}}{(z-w)^3} - \sum_c i f_{abc} \frac{J^c(w)}{(z-w)^2} \quad (\text{A.22})$$

などを用いて計算すると、central charge c の値は

$$c = \frac{k \dim g}{k+y} \quad (\text{A.23})$$

となる。ここで $\dim g = \delta_{aa}$ である。このようなエネルギー運動量テンソルの構成を Sugawara construction と呼ぶ。このエネルギー運動量テンソルを mode L_n で展開すると (A.20) は、

$$L_n = \frac{1}{2(k+y)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : \quad (\text{A.24})$$

となる。また mode で表すと affine Lie 代数と Virasoro 代数は

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \quad (\text{A.25})$$

$$[L_n, J_m^a] = -mJ_{n+m}^a \quad (\text{A.26})$$

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c if_{abc}J_{n+m}^c + kn\delta_{ab}\delta_{n+m,0} \quad (\text{A.27})$$

となる³。

A.3 表現と modular 変換

A.3.1 primary state

表現の highest weight μ に対して WZW 模型の primary state $|\phi_\mu\rangle$ は、

$$J_0^a|\phi_\mu\rangle = -t_\mu^a|\phi_\mu\rangle \quad (\text{A.28})$$

$$J_n^a|\phi_\mu\rangle = 0 \text{ (for } n > 0) \quad (\text{A.29})$$

を満たすような状態として定義される。ここで primary field ϕ_μ との関係は、 $\phi_\mu(0)|0\rangle = |\phi_\mu\rangle$ である。式 (A.24) を見れば、

$$L_n|\phi_\mu\rangle = 0 \text{ (for } n > 0) \quad (\text{A.30})$$

がわかる。また L_0 の $|\phi_\mu\rangle$ への作用を考えると、 J_0 の部分だけが残ることがわかり、

$$\begin{aligned} L_0|\phi_\mu\rangle &= \frac{1}{2(k+y)} \sum_a J_0^a J_0^a |\phi_\mu\rangle \\ &= \frac{\sum_a t_\mu^a t_\mu^a}{2(k+y)} |\phi_\mu\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

となる。即ち $|\phi_\mu\rangle$ の conformal weight h_μ は、

$$h_\mu = \frac{\sum_a t_\mu^a t_\mu^a}{2(k+y)} \quad (\text{A.32})$$

で与えられる。Quadratic Casimir Operator $\sum_a t_\mu^a t_\mu^a$ の値は、Cartan-Weyl 基底を用いて書けば highest weight state $|\mu\rangle$ に対する

$$\sum_i H^i H^i + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \frac{|\alpha|^2}{2} (E^\alpha E^{-\alpha} + E^{-\alpha} E^\alpha) \quad (\text{A.33})$$

³ここで J_0^a は全ての Virasoro operator と交換していることがわかり、この理論が Lie 代数 g で表される対称性を持っていることを示している

の作用の固有値として表される。ここで

$$\sum_i H^i H^i |\mu\rangle = \sum_i \mu^i \mu^i |\mu\rangle = (\mu, \mu) |\mu\rangle \quad (\text{A.34})$$

$$E^\alpha |\mu\rangle = 0 \quad (\text{for } \alpha \in \Delta_+) \quad (\text{A.35})$$

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] |\mu\rangle = \frac{2}{|\alpha|^2} \alpha \cdot H |\mu\rangle = \frac{2}{|\alpha|^2} (\alpha, \mu) |\mu\rangle \quad (\text{A.36})$$

等を用いると (A.33) の $|\mu\rangle$ への作用の固有値は、 $(\mu, \mu + 2\rho)$ となることがわかる。ここで Weyl vector ρ を

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha \quad (\text{A.37})$$

と定義した。これらをまとめると $|\phi_\mu\rangle$ の conformal weight h_μ の式は、

$$h_\mu = \frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(k + y)} \quad (\text{A.38})$$

と表される。 $|\mu\rangle$ の affine Lie 代数 \hat{g} への拡張を $|\hat{\mu}\rangle$ と書くと、対応した primary field $\hat{\mu}(z)$ は、 $\hat{\mu}(z)|0\rangle = |\hat{\mu}\rangle$ として定義され、 $|\hat{\mu}\rangle$ は、

$$E_n^{\pm\alpha} |\hat{\mu}\rangle = H_n^i |\hat{\mu}\rangle = E_0^\alpha |\hat{\mu}\rangle = 0 \quad (\text{for } n, \alpha > 0) \quad (\text{A.39})$$

$$H_0^i |\hat{\mu}\rangle = \mu^i |\hat{\mu}\rangle \quad (\text{A.40})$$

を満たす。 $|\hat{\mu}\rangle$ の conformal weight は、

$$h_{\hat{\mu}} \equiv h_\mu = \frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(k + y)} \quad (\text{A.41})$$

である。上で定義された primary state の中でも特に表現の highest weight $\hat{\mu}$ が可積分表現である場合は、任意の $\alpha \in \Delta_+$ と $n > 0$ に対して、

$$(E_0^{-\alpha})^{(\alpha^\vee, \mu) + 1} |\hat{\mu}\rangle = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$(E_{-n}^\alpha)^{2kn/|\alpha|^2 - (\alpha^\vee, \mu) + 1} |\hat{\mu}\rangle = 0 \quad (\text{A.43})$$

を満たす。実際には (A.43) は (A.42) と

$$(E_{-1}^\theta)^{k - (\theta, \mu) + 1} |\hat{\mu}\rangle \quad (\text{A.44})$$

から得られる。ここで θ は highest root である。

A.3.2 modular 変換性

T^2 上の WZW 模型の表現において $|\hat{\mu}\rangle$ の可積分表現の指標を

$$\chi_{\hat{\mu}}(\tau) = \text{Tr}_{\hat{\mu}} e^{2\pi i \tau (L_0 - c/24)} \quad (\text{A.45})$$

と定義する。ここで c は式 (A.23) で与えられる理論の central charge である。指標に対する $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用 [31] を考えると⁴、 T 変換 ($\tau \rightarrow \tau + 1$) の場合は容易にわかるように、

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} e^{2\pi i (h_{\hat{\mu}} - c/24)} \quad (\text{A.46})$$

となる ($h_{\hat{\mu}}$ は (A.38) で与えられる L_0 の固有値)。また S 変換 ($\tau \rightarrow -1/\tau$) は、

$$S_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{i^{|\Delta_+|}}{(k+y)^{r/2}} \left(\frac{\text{vol}\Lambda_w}{\text{vol}\Lambda_r} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) \exp \left[-\frac{2\pi i}{k+y} (w(\mu + \rho), \nu + \rho) \right] \quad (\text{A.47})$$

となる。ここで \mathcal{W} は Weyl group を表し ($\epsilon(w)$ は w の符号)、 $|\Delta_+|$ は g の positive root の数である。 $\text{vol}\Lambda_w/\text{vol}\Lambda_r$ については、

$$\frac{\text{vol}\Lambda_w}{\text{vol}\Lambda_r} = [\det(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)]^{-1} = \{\det[(\alpha_i^\vee)_j]\}^{-1} \quad (\text{A.48})$$

となり、更に群 G が simply-laced の場合には Cartan matrix A_{ij} を用いて、

$$\frac{\text{vol}\Lambda_w}{\text{vol}\Lambda_r} = (\det A_{ij})^{-1} \quad (\text{A.49})$$

と表される。

例として S_{00} を計算する。これは Chern-Simons 理論における S^3 の分配関数の計算に用いられる。式 (A.47) より、

$$S_{00} = \frac{i^{|\Delta_+|}}{(k+y)^{r/2}} \left(\frac{\text{vol}\Lambda_w}{\text{vol}\Lambda_r} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) \exp \left[-\frac{2\pi i}{k+y} (w(\rho), \rho) \right] \quad (\text{A.50})$$

である。ここで Weyl の denominator formula

$$\sum_{w \in \mathcal{W}} \epsilon(w) e^{w(\rho)} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sinh \frac{\alpha}{2} \quad (\text{A.51})$$

を用いると (A.50) は、

$$S_{00} = \frac{1}{(k+y)^{r/2}} \left(\frac{\text{vol}\Lambda_w}{\text{vol}\Lambda_r} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \left(\frac{\pi}{k+y} (\alpha, \rho) \right) \quad (\text{A.52})$$

⁴ $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用はレベル k の値に対して閉じている。即ちあるレベル k の状態に対して $SL(2, \mathbb{Z})$ を作用させた状態のレベルは再び k で与えられる。

となる。 $G = SU(N)$ の場合は [33] $y = N, r = N - 1, \det A_{ij} = N$ より (A.49) を用いて、

$$\begin{aligned} S_{00}^{SU(N)} &= (k + N)^{-N/2} \left(\frac{k + N}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \left(\frac{\pi}{k + N} (\alpha, \rho) \right) \\ &= (k + N)^{-N/2} \left(\frac{k + N}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \left[2 \sin \left(\frac{j\pi}{k + N} \right) \right]^{N-j} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

となる。

A.3.3 quantum dimension

上で見てきたような highest weight 表現の次元は無限次元なので、これらの次元を考えることに意味が無いように思われるかもしれないが、実際には quantum dimension と呼ばれる量が定義される。 quantum dimension は S 変換の値を用いて表され、Chern-Simons 理論における結び目の不変量としても現れる。

highest weight $\hat{\mu}$ の無限次元表現の quantum dimension $\dim_q \hat{\mu}$ とは、「次元」を無限次元の真空表現 ($\mu = 0$) との比として定義する次元で ((A.45) を用いて)、

$$\dim_q \hat{\mu} \equiv \frac{\text{Tr}_{\hat{\mu}}(1)}{\text{Tr}_0(1)} = \lim_{\tau \rightarrow +i0} \frac{\chi_{\hat{\mu}}(\tau)}{\chi_0(\tau)} \quad (\text{A.54})$$

と書かれる。指標の漸近的振舞を見るために指標の S 変換を考える。

$$\chi_{\hat{\mu}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{\hat{\nu}} S_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \chi_{\hat{\nu}}(\tau) \quad (\text{A.55})$$

より (ν はレベル k の highest weight の和)、 τ を $-1/\tau$ と書き換えて、

$$\chi_{\hat{\mu}}(\tau) = \sum_{\hat{\nu}} S_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \chi_{\hat{\nu}}(-1/\tau) \quad (\text{A.56})$$

と書ける。ここで $\chi_{\hat{\nu}}$ の $\tau \rightarrow +i0$ 極限を考えると L_0 の最低固有値 $l_{\hat{\nu}}$ に対して、

$$\lim_{\tau \rightarrow +i0} \chi_{\hat{\nu}}(-1/\tau) = e^{\frac{\pi ic}{12\tau}} e^{-\frac{2\pi i}{\tau} l_{\hat{\nu}}} \left[\dim|\nu| + \mathcal{O}(e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}) \right] \quad (\text{A.57})$$

となるので (A.56) の $\hat{\nu}$ の和において L_0 の最低固有値が 0 の部分 ($\hat{\nu} = 0$) が支配的になり、 (A.56) の $\tau \rightarrow +i0$ 極限は、

$$\lim_{\tau \rightarrow +i0} \chi_{\hat{\mu}}(\tau) = S_{\hat{\mu}0} e^{\frac{\pi ic}{12\tau}} \quad (\text{A.58})$$

となる。この式を quantum dimension の定義 (A.54) に代入すると、

$$\dim_q \hat{\mu} = \frac{S_{\hat{\mu}0}}{S_{00}} \quad (\text{A.59})$$

となる。(A.47) を代入して (A.51) を用いると、

$$\dim_q \hat{\mu} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\sin\left(\frac{\pi(\mu+\rho, \alpha)}{k+y}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(\rho, \alpha)}{k+y}\right)} \quad (\text{A.60})$$

ここで $q \equiv e^{\frac{2\pi i}{k+y}}$ として q 数を、

$$[x] = q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}} = 2i \sin\left(\frac{\pi x}{k+y}\right) \quad (\text{A.61})$$

とすると⁵、(A.60) は、

$$\dim_q \hat{\mu} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{[(\mu + \rho, \alpha)]}{[(\rho, \alpha)]} \quad (\text{A.62})$$

と書ける。 $G = SU(N)$ の場合は、更に $\lambda \equiv q^N$, $[x]_\lambda \equiv \lambda^{\frac{1}{2}} q^{\frac{x}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} q^{-\frac{x}{2}}$ として、

$$\dim_q \hat{\mu} = \prod_{1 \leq i < j \leq d_R} \frac{[l_i - l_j + j - i]}{[j - i]} \prod_{i=1}^{d_R} \frac{\prod_{v=-i+1}^{l_i-i} [v]_\lambda}{\prod_{v=1}^{l_i} [v - i + d_R]} \quad (\text{A.63})$$

となる。ただし、 $SU(N)$ の表現を Young tableau で表したときの行の数を d_R 、 i 行目の列の長さを l_i , $i = 1, \dots, d_R$ とした。

5

$[x] = \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ と定義する場合もあり、そのとき $q \rightarrow 1$ で $[x] \rightarrow x$

参考文献

- [1] E. Witten, “*Topological sigma models*,” Commun. Math. Phys. **118** (1988) 411.
- [2] E. Witten, “*Mirror manifolds and topological field theory*,” hep-th/9112056.
- [3] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, “*Kodaira-spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*,” Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311–428, [hep-th/9309140].
- [4] I. Antoniadis, E. Gava, K. S. Narain and T. R. Taylor, “*Topological amplitudes in string theory*,” Nucl. Phys. **B413** (1994) 162–184, [hep-th/9307158].
- [5] R. Gopakumar and C. Vafa, “*M-theory and topological strings. i*,” hep-th/9809187.
- [6] R. Gopakumar and C. Vafa, “*M-theory and topological strings. ii*,” hep-th/9812127.
- [7] R. Gopakumar and C. Vafa, “*On the gauge theory/geometry correspondence*,” Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 1415–1443, [hep-th/9811131].
- [8] E. Witten, “*Chern-simons gauge theory as a string theory*,” Prog. Math. **133** (1995) 637–678, [hep-th/9207094].
- [9] E. Witten, “*Quantum field theory and the jones polynomial*,” Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351.
- [10] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, “*The topological vertex*,” hep-th/0305132.
- [11] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil and E. Zaslow, *Mirror Symmetry*. Clay Mathematical Institute, 2003.
- [12] R. Gopakumar, “*M-theory, topological strings and large n gauge theory*,” Recent Advances in String Theory, 1999/12/8-10, 東大数理 (1999).
- [13] M. Marino, “*Enumerative geometry and knot invariants*,” hep-th/0210145.
- [14] E. Witten, “*Phases of $n = 2$ theories in two dimensions*,” Nucl. Phys. **B403** (1993) 159–222, [hep-th/9301042].

- [15] J. Wess and J. Bagger, “*Supersymmetry and supergravity*,” Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p.
- [16] K. Hori and C. Vafa, “*Mirror symmetry*,” hep-th/0002222.
- [17] T. Eguchi and S.-K. Yang, “ *$N=2$ superconformal models as topological field theories*,” Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1693–1701.
- [18] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, “*Holomorphic anomalies in topological field theories*,” Nucl. Phys. **B405** (1993) 279–304, [hep-th/9302103].
- [19] P. Candelas, X. C. De La Ossa, P. S. Green and L. Parkes, “*A pair of calabi-yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*,” Nucl. Phys. **B359** (1991) 21–74.
- [20] S. Katz, A. Klemm and C. Vafa, “*M-theory, topological strings and spinning black holes*,” Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 1445–1537, [hep-th/9910181].
- [21] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, “*Five-branes, membranes and nonperturbative string theory*,” Nucl. Phys. **B456** (1995) 130–152, [hep-th/9507158].
- [22] H. Ooguri, Y. Oz and Z. Yin, “*D-branes on calabi-yau spaces and their mirrors*,” Nucl. Phys. **B477** (1996) 407–430, [hep-th/9606112].
- [23] G. ’t Hooft, “*A planar diagram theory for strong interactions*,” Nucl. Phys. **B72** (1974) 461.
- [24] S. Coleman, *Aspects of symmetry*. Cambridge Univ Press.
- [25] E. Witten, “*Noncommutative geometry and string field theory*,” Nucl. Phys. **B268** (1986) 253.
- [26] K. Ohmori, “*A review on tachyon condensation in open string field theories*,” hep-th/0102085.
- [27] R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*. Springer Verlag, 1997.
- [28] J. M. F. Labastida, P. M. Llatas and A. V. Ramallo, “*Knot operators in chern-simons gauge theory*,” Nucl. Phys. **B348** (1991) 651–692.
- [29] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, “*A new polynomial invariant of knots and links*,” Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1991) 239–246.

- [30] G. W. Moore and N. Seiberg, “*Polynomial equations for rational conformal field theories,*” Phys. Lett. **B212** (1988) 451.
- [31] E. Verlinde, “*Fusion rules and modular transformations in 2-d conformal field theory,*” Nucl. Phys. **B300** (1988) 360.
- [32] J. M. F. Labastida and A. V. Ramallo, “*Operator formalism for chern-simons theories,*” Phys. Lett. **B227** (1989) 92.
- [33] V. Periwal, “*Topological closed string interpretation of chern-simons theory,*” Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 1295–1298, [hep-th/9305115].
- [34] M. Marino and C. Vafa, “*Framed knots at large n ,*” hep-th/0108064.
- [35] H. R. Morton and S. G. Lukac, “*The homfly polynomial of the decorated hopf link,*” J. Knot Theory Ramif. **12** (2003) 395–416, [math.GT/0108011].
- [36] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1988.
- [37] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties.* Princeton Univ. Press, 1993.
- [38] N. C. Leung and C. Vafa, “*Branes and toric geometry,*” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 91–118, [hep-th/9711013].
- [39] O. Aharony, A. Hanany and B. Kol, “*Webs of (p,q) 5-branes, five dimensional field theories and grid diagrams,*” JHEP **01** (1998) 002, [hep-th/9710116].
- [40] M. Aganagic and C. Vafa, “*Mirror symmetry, d-branes and counting holomorphic discs,*” hep-th/0012041.
- [41] M. A. Luty and I. Taylor, Washington, “*Varieties of vacua in classical supersymmetric gauge theories,*” Phys. Rev. **D53** (1996) 3399–3405, [hep-th/9506098].
- [42] P. S. Aspinwall, B. R. Greene and D. R. Morrison, “*Calabi-yau moduli space, mirror manifolds and spacetime topology change in string theory,*” Nucl. Phys. **B416** (1994) 414–480, [hep-th/9309097].
- [43] P. Candelas and X. C. de la Ossa, “*Comments on conifolds,*” Nucl. Phys. **B342** (1990) 246–268.
- [44] P. S. Aspinwall, B. R. Greene and D. R. Morrison, “*Multiple mirror manifolds and topology change in string theory,*” Phys. Lett. **B303** (1993) 249–259, [hep-th/9301043].

- [45] M. Aganagic and C. Vafa, “*G(2) manifolds, mirror symmetry and geometric engineering,*” [hep-th/0110171](#).
- [46] J. M. Maldacena, “*The large n limit of superconformal field theories and supergravity,*” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [[hep-th/9711200](#)].
- [47] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “*Gauge theory correlators from non-critical string theory,*” *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114, [[hep-th/9802109](#)].
- [48] E. Witten, “*Anti-de sitter space and holography,*” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, [[hep-th/9802150](#)].
- [49] H. Ooguri and C. Vafa, “*Worldsheet derivation of a large n duality,*” *Nucl. Phys.* **B641** (2002) 3–34, [[hep-th/0205297](#)].
- [50] M. Kontsevich, “*Enumeration of rational curves via torus actions,*” [hep-th/9405035](#).
- [51] J. Bryan and R. Pandharipande, “*Bps states of curves in calabi-yau 3-folds,*” *Geom.Topol.* **5** (2001) 287–318, [[math.AG/0009025](#)].
- [52] C. Faber and R. Pandharipande, “*Hodge integrals and gromov-witten theory,*” .
- [53] R. Pandharipande, “*Hodge integrals and degenerate contributions,*” .
- [54] P. S. Aspinwall and D. R. Morrison, “*Topological field theory and rational curves,*” *Commun. Math. Phys.* **151** (1993) 245–262, [[hep-th/9110048](#)].
- [55] D. S. Freed and R. E. Gompf, “*Computer calculation of witten’s three manifold invariant,*” *Commun. Math. Phys.* **141** (1991) 79–117.
- [56] L. C. Jeffrey, “*Chern-simons-witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation,*” *Commun. Math. Phys.* **147** (1992) 563–604.
- [57] L. Rozansky, “*A large k asymptotics of witten’s invariant of seifert manifolds,*” *Commun. Math. Phys.* **171** (1995) 279–322, [[hep-th/9303099](#)].
- [58] I. Macdonald, “*The volume of a compact lie group,*” *Invent.Math.* **56** (1980) 93.
- [59] C. Vafa, “*Superstrings and topological strings at large n,*” *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2798–2817, [[hep-th/0008142](#)].
- [60] N. Berkovits, H. Ooguri and C. Vafa, “*On the worldsheet derivation of large n dualities for the superstring,*” [hep-th/0310118](#).

- [61] H. Ooguri and C. Vafa, “*Knot invariants and topological strings*,” Nucl. Phys. **B577** (2000) 419–438, [[hep-th/9912123](#)].
- [62] J. M. F. Labastida, M. Marino and C. Vafa, “*Knots, links and branes at large n* ,” JHEP **11** (2000) 007, [[hep-th/0010102](#)].
- [63] C. H. Taubes, “*Lagrangians for the gopakumar-vafa conjectures*,” Adv.Theor.Math.Phys. **5** (2001) 139–163, [[math.DG/0201219](#)].
- [64] S. Katz and C.-C. M. Liu, “*Enumerative geometry of stable maps with lagrangian boundary conditions and multiple covers of the disc*,” Adv.Theor.Math.Phys. **5** (2002) 1–49, [[math.AG/0103074](#)].
- [65] J. Li and Y. S. Song, “*Open string instantons and relative stable morphisms*,” Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2002) 67–91, [[hep-th/0103100](#)].
- [66] P. Mayr, “ *$N = 1$ mirror symmetry and open/closed string duality*,” Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2002) 213–242, [[hep-th/0108229](#)].
- [67] M. Aganagic, A. Klemm and C. Vafa, “*Disk instantons, mirror symmetry and the duality web*,” Z. Naturforsch. **A57** (2002) 1–28, [[hep-th/0105045](#)].
- [68] C. Vafa, “*Brane/anti-brane systems and $u(n-m)$ supergroup*,” [hep-th/0101218](#).
- [69] T. Eguchi and H. Kanno, “*Topological strings and nekrasov’s formula*,” Quantum Periods, 2003/11/18-20, IAS (2003).
- [70] M. Aganagic, M. Marino and C. Vafa, “*All loop topological string amplitudes from chern-simons theory*,” [hep-th/0206164](#).
- [71] A. Iqbal, “*All genus topological string amplitudes and 5-brane webs as feynman diagrams*,” [hep-th/0207114](#).
- [72] S. Katz, A. Klemm and C. Vafa, “*Geometric engineering of quantum field theories*,” Nucl. Phys. **B497** (1997) 173–195, [[hep-th/9609239](#)].
- [73] S. Katz, P. Mayr and C. Vafa, “*Mirror symmetry and exact solution of 4d $n = 2$ gauge theories. i*,” Adv. Theor. Math. Phys. **1** (1998) 53–114, [[hep-th/9706110](#)].
- [74] S. Katz and C. Vafa, “*Matter from geometry*,” Nucl. Phys. **B497** (1997) 146–154, [[hep-th/9606086](#)].
- [75] N. A. Nekrasov, “*Seiberg-witten prepotential from instanton counting*,” [hep-th/0206161](#).

- [76] A. Iqbal and A.-K. Kashani-Poor, “Instanton counting and chern-simons theory,” hep-th/0212279.
- [77] T. Eguchi and H. Kanno, “Topological strings and nekrasov’s formulas,” JHEP **12** (2003) 006, [hep-th/0310235].
- [78] Y. Konishi, “Topological strings, instantons and asymptotic forms of gopakumar-vafa invariants,” hep-th/0312090.
- [79] A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, “Quantum calabi-yau and classical crystals,” hep-th/0309208.
- [80] T. Eguchi and H. Kanno, “Geometric transitions, chern-simons gauge theory and veneziano type amplitudes,” hep-th/0312234.
- [81] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, “Topological strings and integrable hierarchies,” hep-th/0312085.
- [82] A. Iqbal, N. Nekrasov, A. Okounkov and C. Vafa, “Quantum foam and topological strings,” hep-th/0312022.
- [83] T. J. Hollowood, A. Iqbal and C. Vafa, “Matrix models, geometric engineering and elliptic genera,” hep-th/0310272.
- [84] A. Iqbal and A.-K. Kashani-Poor, “ $Su(n)$ geometries and topological string amplitudes,” hep-th/0306032.
- [85] Y. Konishi and K. Sakai, “Asymptotic form of gopakumar-vafa invariants from instanton counting,” hep-th/0311220.
- [86] E. Witten, “Nonabelian bosonization in two dimensions,” Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455–472.
- [87] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal field theory,” New York, USA: Springer (1997) 890 p.