担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題 (ローレンツ変換性・変分法)

作成日：November 12, 2017　Updated：November 13, 2017　Version：1.0　実施日：November 13, 2017

問題 1. (問題 7：ローレンツ変換性) 4 次元時空において K 系から K' 系へのローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ を考える.

(1) 計量 $\eta^{\mu\nu}$ は 2 階の反変テンソルとして変換することを示せ. また，クロネッカー・デルタ δ^{ν}_{μ} は 1 階共変反変のテンソルとして変換し，しかもその値は不変であることを示せ.

(2) 反変ベクトルの変換性から共変ベクトルの変換性を導け.

(3) 添え字の縮約で得られたテンソルが，階数の下がったテンソルとして変換することを示せ.

(4) 2 階の共変反対称テンソルが，反対称性の性質を保ったまま変換されることを示せ.

(5) 以後ローレンツ変換として以下のローレンツ・ブーストを考える.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

レポート問題 1 のように，電場 $\vec{E}$, 磁場 $\vec{B}$ を 2 階の反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ として組む. (ただし, $F_{i0} = E_i/c$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$.) 2 形式 $F = (1/2) F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ が座標変換のもと不変であることを利用して, 電磁場の変換性が以下で与えられることを示せ.

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3), \qquad E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2), \\ B'_1 &= B_1, \quad B'_2 = \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3\right), \quad B'_3 = \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2\right). \end{aligned}$$

(6) K 系から見て, その x^3 軸方向に一様な静磁場 B があるとする. このとき，K 系に対して静止している電荷 q の粒子には, 磁場によるローレンツ力は作用しない. この粒子を K' 系から見たとき，その粒子に作用するローレンツ力はどうなるか.

問題 2. (問題 8：最速降下曲線) 最速降下曲線とは，高さの異なる 2 点間を結ぶすべての曲線のうちで曲線上に軌道を拘束された物体に対して重力のみが作用する仮定の下，物体が速度 0 で高さの高い方の点を出発してからもう一方の点に達するまでの所要時間がもっとも短いような曲線である.

最速降下曲線を求めよ. (変分法を用いることを推奨するが, 他の解法でもかまわない.)