担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題 (2022年7月31日版)

作成日：April 1, 2022 Updated：August 2, 2022 Version：1.0 実施日：August 11, 2022

レポートの提出について：

- 提出期限は **2022年8月11日(木)24時(厳守)とします．** 最後にまとめて提出してくださっても，こまめに提出してくださってもどちらでも構いません．(採点は8月12日から始めます.)
- 原則として**手書きの自筆**レポートをスマホなどを用いてスキャンして提出してください．(紙に記載したものでもタブレットなどに記載したものでも構いません.) パソコンで描図や数値計算を行い，それを参考資料として追加するのはかまいません．**スキャンできない方は遠慮なくご相談ください．**
- スキャンした提出物に表紙は不要ですが，1ページ目の上部に学生番号・氏名を明記してください．
- 参考にした文献や議論した友人がいれば，最後に引用するのが良いと思います．

問題 1. (落体の運動)　質量 m の物体 (質点) が，速さの2乗に比例する空気抵抗力を受けて落下する状況を考える．(比例定数を $m\mu(>0)$ と表す.) 時刻 t での物体の位置を $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，速度を $\vec{v}(t)=(v_x(t),v_y(t),v_z(t))$ で表す．(z 軸は鉛直**上向き**にとる.) 初期条件 $\vec{r}(0)=(0,0,h)$, $\vec{v}(0)=(0,0,0)$ の下，物体の落下運動を議論する．

(1) z 方向の運動方程式をたてよ．(抵抗力と物体の速度は逆向きであることに注意.)

(2) 終端速度 $v_z(\infty)$ はいくらか．

(3) $v_z(t)$ を t の関数として具体的に求め，グラフの概形を図示せよ．

(4) $z(t)$ を t の関数として具体的に求めよ．

(5) 大気中での実際の落体実験のデータを調べ，ここで得られた理論値と比較し，この抵抗力の仮説が現実の抵抗力を表しているかどうかについて考察せよ．(参考文献は必ず記載すること．自分で実験しても構わない.)

問題 2. (曲線座標でのラグランジュ方程式)

(1) 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，質量 m の1質点の運動を考える．

(a) Cartesian 座標から極座標への変換 $(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ を考える．質点の運動エネルギー K を，(r,θ,φ) の言葉で書き表せ．

(b) 球面振り子の設定 ($r=l$ (定数), $U=mgz=mgr\cos\theta$) に対して，(θ,φ に関する) ラグランジュ方程式を書き下せ．

(2) 2次元空間 $\mathbb{R}^2$ において，質量 m の1質点の運動を考える．

(a) Cartesian 座標系 (x,y) から回転座標系 (ξ,η) に以下の座標変換を行う．

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

質点の運動エネルギー K を (陽に t を用いずに) ξ,η の言葉で書き下せ．

(b) $U=0$ とする．ラグランジュ方程式を書き下し，遠心力とコリオリ (Coriolis) の力が現れることを示せ．(どの項がどの力を表すか明記せよ.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (最速降下曲線)　最速降下曲線とは，高さの異なる 2 点間を結ぶすべての曲線のうちで曲線上に軌道を拘束された物体に対して重力のみが作用する仮定の下，物体が速度 0 で高さの高い方の点を出発してからもう一方の点に達するまでの所要時間がもっとも短いような曲線である．

最速降下曲線を求めよ．(変分法を用いることを推奨するが, 他の解法でもかまわない.)

問題 4. (N 次元等方調和振動子)　ラグランジアンが以下で与えられる N 次元等方調和振動子を考える．

$$L=\sum_{k=1}^{N}\frac{m}{2}\left((\dot{q}^k)^2-\omega^2(q^k)^2\right),\quad (\omega>0).$$

(1) 一般化座標 q^i に対するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ．

(2) 任意の i,j の組について，(q^i,q^j) 平面での無限小回転に対して L は不変である．この対称性に関するネーターチャージ M^{ij} を求めよ．

(3) L は以下の変換に関して準不変である．(ε_{ij} は無限小パラメータ)

$$q^k\to q^k+\frac{\varepsilon_{ij}}{2}\left(\dot{q}^i\delta^{kj}+\dot{q}^j\delta^{ki}\right),\quad k\in\{1,2,\cdots,N\}.$$

この対称性に関するネーターチャージが $T^{ij}=m(\dot{q}^i\dot{q}^j+\omega^2q^iq^j)$ となることを示せ．

(4) ある運動方程式をオイラー・ラグランジュ方程式として与えるラグランジアンは一意ではない．そのような例として以下, 次のラグランジアンを考える ($N=2$ の設定)：

$$\widetilde{L}=m\dot{q}^1\dot{q}^2-m\omega^2q^1q^2.$$

一般化座標 q^i に対するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ．また, 一般化運動量 p_i およびハミルトニアン $\widetilde{H}$ を計算せよ．$\widetilde{H}$ は保存量か？また (3) との関係はあるか？

問題 5. (ケプラー運動)　惑星の運動に関するケプラーの法則を力学の法則から導こう．

> [ケプラー (Kepler) の法則]
>
> - **第 1 法則**：惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を運動する．
> - **第 2 法則**：惑星と太陽を結ぶ線が一定時間に描く面積は一定である．
> - **第 3 法則**：惑星の公転周期の 2 乗は軌道長半径の 3 乗に比例する．その比例定数は惑星によらない．

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，中心力により相互作用する 2 質点の運動 (2 体問題) を考える．質点 1, 質点 2 の質量をそれぞれ m_1,m_2, 位置をそれぞれ $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ とおくと, このシステムのラグランジアン $\mathcal{L}$ は, 以下のように与えられる．

$$\mathcal{L}=\frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2+\frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2-U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$$

質点 1 を太陽, 質点 2 を惑星と同一視し, $m_1\gg m_2$ の極限でケプラー問題に帰着する．

(1) 重心座標 $\vec{R}$ と相対座標 $\vec{r}$ および換算質量 m を以下で定義する:

$$\vec{R}:=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2},\quad \vec{r}:=\vec{r}_2-\vec{r}_1,\quad m:=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

$\mathcal{L}$ をこれらを用いて書き換え, 重心座標 $\vec{R}$ が循環座標であることを示せ．(この結果より, 重心座標に共役な運動量 $\vec{P}$ は保存する.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 座標並進に関する対称性を用いて，一般性を失うことなく, $\dot{\vec{R}}=\vec{0}$ となる座標系 (重心系) に移ることができる．このとき, $\mathcal{L}=(m/2)\dot{\vec{r}}^2-U(|\vec{r}|)$ となる．この L は座標回転に関する対称性を持つ．したがってネーターの定理より, 角運動量 $\vec{L}=m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ は保存する．角運動量の第 3 成分 L_3 を極座標を用いて表せ．極座標表示は以下を取る：$\vec{r}=(x^1,x^2,x^3)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

(3) 座標回転に関する対称性を用いて，一般性を失うことなく, x^3 軸を $\vec{L}$(一定) と平行にとることができる．このとき $\vec{r}$ はつねに x^1-x^2 平面上を動くことに注意．$L:=|\vec{L}|$ とおく．($L=L_3$ である．) 面積速度 $h:=(1/2)r^2\dot{\varphi}$ を m, L を用いて表し, これが時間によらず一定であることを示せ. (ケプラーの第 2 法則=面積速度一定則)

(4) 第 1 法則を証明するため, レンツ (Lenz)・ベクトルというものを導入する：

$$\vec{e}:=\frac{1}{\kappa}\dot{\vec{r}}\times\vec{L}-\frac{\vec{r}}{r}.\quad\cdots(*)$$

(正確にはこれはレンツ・ベクトル $\vec{A}$ を κ で割ったものであり, 離心 (eccentricity) ベクトルとも呼ばれる.) (2) の相対運動のラグランジアンから導かれる運動方程式は以下の通りである：

$$m\ddot{\vec{r}}=-\kappa\frac{\vec{r}}{r^3},\qquad \left(U(r)=-\frac{\kappa}{r},\quad \kappa:=Gm_1m_2\right).$$

(a) レンツ・ベクトル $\vec{e}$ は保存量であることを示せ.
(ヒント：3 次元ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ に関する恒等式 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ および $r\dot{r}=\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$ を用いてよい. $\ddot{\vec{r}}$ は運動方程式を用いて書き換えるとよい.)

(b) レンツ・ベクトルの大きさ e は以下のようになることを示せ.

$$e^2=1+\frac{2L^2}{m\kappa^2}E,$$

ただし E は全エネルギーで定数 (保存量)：$E:=K+U=(m/2)\dot{\vec{r}}^2-(\kappa/r)$.
(恒等式 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ を用いてよい.)

(c) $\vec{r}$ と $\vec{e}$ のなす角を ϕ とすると以下が成り立つことを示せ．((*) の両辺と $\vec{r}$ との内積をとる．前問の 3 次元ベクトルの恒等式を用いてよい．)

$$r=\frac{l}{1+e\cos\phi},\quad l:=\frac{L^2}{m\kappa}.$$

(d) $E<0$ のとき前問で得られた軌道の式は離心率がちょうど e となる楕円を与えることを示せ．また楕円の長半径 $a:=(1/2)(r_{\min}+r_{\max})$ を κ, E で表せ. (ケプラーの第 1 法則)

(e) (ケプラー問題とは無関係な設問) レンツ・ベクトル (保存量) の存在に対応する対称性を見出そう．$\mathcal{L}$ が以下の変換 $x^j\mapsto x^j+\varepsilon_i f^{ij}$, $(i,j=1,2,3)$ に関して準不変 $\delta\mathcal{L}=\varepsilon_i\dot{Y}^i$ であるとし, この対称性に関するネーター・チャージがレンツ・ベクトルの 3 つの成分を与えるとする: $e^i=(m/\kappa)(x^i(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})-\dot{x}^i(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}))-x^i/r$. f^{ij}, Y^i を定めよ.

(5) 以上を用いて, $E<0$ のとき, 公転周期 T と長半径 a との間には, $T^2=4\pi^2\dfrac{m}{\kappa}a^3$ の関係が成り立つことを示せ. (短半径 b が $b=a\sqrt{1-e^2}$ となることは既知としてよい.) これと $\kappa=Gm_1m_2$, $m_1\gg m_2$ より, 比例定数が惑星 (m_2 の値) によらず一定であることが導かれる. (ケプラーの第 3 法則)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 6. (ケプラー運動の対称性とポアソン括弧) 3 次元のケプラー運動を考える．(記号はレポート問題 5 に準ずる．すなわち，$\vec{A} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \kappa\dfrac{\vec{r}}{r}$ をレンツ (Lenz)・ベクトル，$\vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{r}\times\vec{p}$ を角運動量とする.) 正準変数として，(x^i, p_j) $(i,j=1,2,3)$ をとる．以下すべて $i=1, j=2$ の場合について証明すれば十分である．

(1) 角運動量の 3 つの成分 L_i に関して，(ポアソン括弧による) 関係式 $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k$ $(i,j,k \in \{1,2,3\})$ が成り立つことを示せ．(ϵ_{ijk} はエディントンのイプシロンで $\epsilon_{123}=1$ とする．関係式の右辺では k について和が取られていることに注意.)

(2) レンツ・ベクトル，角運動量の 3 つの成分に関して，関係式 $\{A_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}A_k$ が成り立つことを示せ．

(3) レンツ・ベクトルの 3 つの成分に関して，関係式 $\{A_i, A_j\} = -(2H/m)\epsilon_{ijk}L_k$ が成り立つことを示せ．ただし H はハミルトニアンで，$H = \vec{p}^2/2m - \kappa/r$.

(4) H は保存量であるから，$H=E$ (定数) とあらわし，$E<0$ とする．ここでレンツ・ベクトルをスケール変換した以下の量を定義すると：$M_i := \sqrt{\dfrac{m}{2|E|}}A_i$, 以下の関係式が成り立つ：

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k, \quad \{M_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}L_k.$$

$SO(4)$ のリー代数の生成子の満たす関係式 (ただし積は行列の交換子積) を書き下し，この関係式と一致する (同型である) ことを示せ．($SO(4)$ のリー代数の生成子については講義で少し解説する予定だが，解説できなかった場合は各自調べてください.)

なお，$A_i = (1/2)(L_i + M_i)$，$B_i = (1/2)(L_i - M_i)$ とさらに書き直すと，$SU(2)$ のリー代数の直和と同型であることも分かる．

問題 7. (Lax 形式・戸田格子)

(1) $L(t)$ を $n\times n$ 対称行列に値をとる t についての関数とする．以下の 3 つの命題は同値であることを示せ．

(i) $L(t)$ のすべての固有値は t によらない．

(ii) 直交行列 $U(t)$ が存在し，$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}$ と表される．

(iii) 反対称行列 $B(t)$ が存在し，$\dot{L} = BL - LB$ と表される．

(2) $L(t)$ を $n\times n$ 対称行列，$B(t)$ を $n\times n$ 反対称行列とする．$\dot{L} = BL - LB$ を Lax 方程式という．Lax 方程式を用いて $\mathrm{Tr}L^k$ $(k=1,\cdots,n)$ が保存量であることを示せ．

(3) 戸田格子と呼ばれる自由度 n のハミルトン・システムを考える (周期条件 $q_{n+1} = q_1$ を課す)：

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{p_i^2 + \exp(q_i - q_{i+1})\right\}, \quad (i=1,\cdots,n).$$

(a) ハミルトンの運動方程式を書き下せ．次いで変数変換 $a_i = (1/2)\exp\left((q_i - q_{i+1})/2\right)$，$b_i = p_i/2$ を施すと以下の方程式に書き換えられることを示せ ($a_n = a_0, b_{n+1} = b_1$)：

$$\dot{a}_i = a_i(b_i - b_{i+1}), \quad \dot{b}_i = 2(a_{i-1}^2 - a_i^2) \quad (i=1,\cdots,n).$$

(b) $n \times n$ の対称行列 L および反対称行列 B を以下のように定義する：

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & -a_2 & \ddots & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 & -a_{n-1} \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Lax 方程式 $\dot{L} = BL - LB$ が前問 (a) の方程式と一致することを示せ.

(c) L の異なる固有値 λ と μ がポアソン可換であることを示せ. (ヒント：L の固有値 λ, μ に属する (長さ 1 の) 固有ベクトルをそれぞれ u, v とし, $\{\lambda, \mu\}$ を計算する. L が対称行列であること, u 同士の内積が 1 であることより $\partial\lambda/\partial p_k = (1/2)u_k^2$, $\partial\lambda/\partial q^k = u_{k+1}u_k a_k - u_k u_{k-1} a_{k-1}$ などが分かるはず. 得られた $\{\lambda, \mu\}$ の式を $Lu = \lambda u, Lv = \mu v$ の第 k 成分の 2 式と比較してうまく変形するとゼロになることが分かる.) この結果と講義ノート命題 1.59 (iv) より, $\mathrm{Tr} L^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ $(k = 1, \cdots, n)$ は n 個のポアソン可換な保存量を与える. よって戸田格子は完全可積分系であることが示された.

[ベクトル解析の記号 (勾配・発散・回転) のまとめ]

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ を考え, その座標を $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ とする. その上の C^∞ 級の関数 $f(x) := f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, およびベクトル値関数 (ベクトル場) $\vec{v}(x) := (v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x))$ を考える. (引数の (x) は $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ の略記.) また微分演算子の記号として以下を導入する (∇ はナブラ (nabla) と読む)：

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

関数 f の勾配 (gradient): grad f, およびベクトル場 $\vec{v}$ の発散 (divergence): div $\vec{v}$ は以下のように定義される：

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\ f &:= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) =: \nabla f, \\ \mathrm{div}\ \vec{v} &:= \frac{\partial v_1}{\partial x^1} + \frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x^n} =: \nabla \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

∇ を用いて右端のように表示することもある.
特に 3 次元空間においては, ベクトル場 $\vec{v}$ の回転 (rotation): rot $\vec{v}$ というものが以下のように定義される：

$$\mathrm{rot}\ \vec{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3}, \frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1}, \frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) =: \nabla \times \vec{v}.$$

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. (マクスウェルの方程式)　時間座標を t, 3 次元空間の座標を $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ とする．(以後, 矢印の記号 $\vec{\ }$ は 3 次元ベクトルを表す.) 与えられた電荷密度を ρ, 電流密度を $\vec{j}$ とすると,「真空中の」マクスウェルの方程式は次式で与えられる：

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \mathrm{rot}\ \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{2}$$

ただし $\vec{E}$, $\vec{B}$ はそれぞれ電場, 磁場を表す．c は正定数 (光速度)．また, スカラーポテンシャル ϕ とゲージポテンシャル $\vec{A}$ は $\vec{E}$, $\vec{B}$ と以下の関係を持つ：

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\ \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{A}. \tag{3}$$

小問 (1)〜(3) ではこれらを微分形式を用いて書き表すことを考える．そのために, 4 次元時空の座標 $x^\mu := (ct, \vec{x})$, 4 元ポテンシャル $A_\mu := (-\phi, \vec{A})$ および 4 元電流密度 $j_\mu := (-c\rho, \vec{j})$ を導入する．(以後, 添え字は以下を走る：$\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$．$i, j \in \{1,2,3\}$．)

(1) 1-form $A := A_\mu dx^\mu$ および 2-form $F := dA$ を定義する．$F = (1/2)F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ と表したとき, $F_{i0} = E_i$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$ であることを示せ．$\epsilon_{123} = +1, F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ とする．

(2) $d \circ d = 0$ より, $dF = ddA = 0$ である (Bianchi の恒等式)．式 (1) は, $dF = 0$ で表されることを示せ．

(3) 1-form $j := j_\mu dx^\mu$ を定義する．式 (2) は $* \, d * F = (4\pi/c)j$ で表されることを示せ．ただし, $*$ はホッジ作用素 (Hodge operator) と呼ばれ，以下のように定義される．(p-form 全体の空間を $(n-p)$-form 全体の空間に写す．$* : \Omega^p \to \Omega^{n-p}$.)

$$*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) := \frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{i_1,\cdots,i_p}{}_{j_1,\cdots,j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}}.$$

ただし本問では (ミンコフスキー空間では), 上付き添え字を下付き添え字におろすとき,「0」が上付き添え字に含まれるときはマイナス符号が出る．(たとえば, $\epsilon^{01}{}_{23} = -\epsilon_{0123}$, $\epsilon^{20}{}_{31} = -\epsilon_{2031}$, $\epsilon^{12}{}_{03} = +\epsilon_{1203}$.) $\epsilon_{0123} = +1$ とする．

(4) 電荷の保存則 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j} = 0$ を示せ．(微分形式を用いて示してもよい.)

(5) $j = 0$ とする．6 月 17 日出題の宿題で, 式 (1) 第 2 式の両辺の回転をとることで以下が示された．

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E} = \vec{0} \tag{4}$$

式 (4) は波動方程式と呼ばれるものである．空間 1 次元で考えると波動方程式は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(t,x) = 0, \tag{5}$$

である．$f(t,x) = f(x - ct)$ の形の関数 (c は定数) は, 式 (5) の解であることを示せ．(これは速さ c で x の正の方向に進行する波を表す．同様に $f(t,x) = f(x + ct)$ の形の関数も式 (5) の解であり, 速さ c で x の負の方向に進行する波を表す.)
これより, 電場・磁場は速さ c で進行する波になりうることが分かる．これが電磁波であり物理学では「光」と総称して呼ばれる．(可視光は波長 (約 4000〜7000) $\times 10^{-10}$ m の電磁波.) なお重力波の満たす方程式も (4) と同じ波動方程式である．(伝播速度も同じ.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. (ガリレイ変換・ローレンツ変換)

(1) 1 次元波動方程式にガリレイ変換: $t' = t, x' = x - vt$ を施すと次の方程式が得られることを示せ. (ただしこの変換の下 f は不変: $f(t', x') = f(t, x)$ とする.)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \xrightarrow{\text{ガリレイ変換}} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f'}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2} - \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 f'}{\partial t' \partial x'} = 0.$$

また次の関数は, 変換後の方程式を満たすことを示せ. ($f_{\mathrm{R}}, f_{\mathrm{L}}$ は任意関数.)

$$f'(t', x') = f_{\mathrm{R}}(x' - (c - v)t') + f_{\mathrm{L}}(x' + (c + v)t')$$

(2) 特殊相対性理論を空間 1 次元，時間 1 次元の設定で考え，光速不変の原理から座標変換の満たすべき関係式 (ローレンツ変換) を導こう．

いま互いに一定の速さ v で相対運動している 2 つの慣性系 (座標系) K, K' を考える．それらの系における空間座標と時間座標の組をそれぞれ (x, t), (x', t') とする．

慣性系 K と K' の空間座標の原点が一致した瞬間をそれぞれの系の時間座標の原点に選ぶ．(すなわちこのとき $t = t' = 0$.) $t = t' = 0$ に原点から放出された光が真空中を伝わるとき，光速不変の原理より，$x^2 = c^2t^2$, $x'^2 = c^2t'^2$ が成り立つ．すなわち，

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$$

が成り立つ．求める座標変換の式を $x' = A(x - vt)$, $t' = Bt + Cx$ とおき，係数 A, B, C を与えられた量で表せ．ただし，$v/c \to 0$ の極限でガリレイ変換 $x' = x - vt, t' = t$ に一致することを用いてよい.

(3) 4次元時空において以下のような K 系から K' 系へのローレンツ変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ $(\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\})$ を考える：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

(a) (1) のように，電場 $\vec{E}$, 磁場 $\vec{B}$ を 2 階の反対称 tensor $F_{\mu\nu}$ として組む．2 形式 $F = (1/2)F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ が座標変換のもと不変であることを利用して, 電磁場の変換性が以下で与えられることを示せ.

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3), \qquad E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2), \\ B'_1 &= B_1, \quad B'_2 = \gamma\left(B_2 + \beta E_3\right), \quad B'_3 = \gamma\left(B_3 - \beta E_2\right). \end{aligned}$$

(b) K 系から見て, その x^3 軸方向に一様な静磁場 B があるとする. このとき，K 系に対して静止している電荷 q の粒子には, 磁場によるローレンツ力は作用しない. この粒子を K' 系から見たとき，その粒子に作用するローレンツ力はどうなるか. なおここでの単位系 (ガウス単位系) ではローレンツ力は $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$ であることに注意.

問題 10. (特殊相対論のパラドックス：銀河鉄道 999 編)
静止しているときには同じ長さの銀河鉄道 K 号と K' 号が，宇宙空間で正反対の方向に相対速度 $v = (\sqrt{3}/2)c$ で走っているとする (c は光速度)．K 号にはメーテルが乗っていて, K' 号のちょうど先頭に乗っている鉄郎に列車すれ違いの際，日川白鳳 (桃) を渡そうと考えている．受け渡しは一瞬で問題なく行われるものとする．(ツッコミはなしでお願いいたします.)

さて，K 号から見ると K' 号はローレンツ短縮を起こして半分の長さになっているので，メーテルは **K 号の先端が K' 号の最後尾に一致した瞬間**に K 号のちょうどど真ん中の位置で，手渡せばよいと考えた．

その旨鉄郎に伝えて, いよいよアンドロメダ星雲にてすれ違いのときがやってきた．メーテルは K 号のど真ん中で上記 (太字) の時刻に日川白鳳を瞬間差し出しするつもりでいる．鉄郎はいつでも受け取れるよう受け手をずっと窓から差し出している．ところがハッと鉄郎は思った．K' 号から見れば K 号がローレンツ短縮を起こして半分の長さになっているので，これだと受け取れない！

果たして日川白鳳は無事手渡せたであろうか？ミンコフスキー・ダイヤグラムを用いて説明せよ．メーテル・鉄郎の軌跡 (世界線) および問題文の**太字の事象**をダイヤグラム内に明記せよ．(2 人それぞれの座標系を基準としてダイヤグラムを書き, どちらから見ても結果に矛盾がないことを確かめよ．なお日川白鳳を受け渡したくない人は他の物品に変更して本問を解いても構わない．過去問では「みかん」「ドリアン」「赤福」「イソジン」が受け渡しされた実績がある．)

問題 11. (Tensor の数学的基礎) $(V, \langle\ |\ \rangle)$ を n 次元内積空間とし, V^* をその双対空間とする．Tensor および 計量を用いた添え字の上げ下げ，添え字の縮約などについて数学的に厳密な定義と説明を与え，25 枚程度の用紙にまとめよ．

問題 12. (ゲージ理論, Yang-Mills 理論)

(1) まず電磁気学の理論を考える．記号は問題 8 に準ずる．

(a) ディラックの磁気単極子 (モノポール=monopole) は $\vec{A} = \dfrac{g}{4\pi}\dfrac{1}{r(r+x^3)}(-x^2, x^1, 0)$ で与えられる．この回転 (rot) を計算し ($r(r+x^3) \neq 0$ の領域で) $\vec{B}(\vec{x}) = \dfrac{g}{4\pi}\dfrac{\vec{x}}{r^3}$ を示せ．(電場に関するクーロンの法則と照らし合わせると, これは原点に存在する磁荷 g の点磁荷 (モノポール) から生じる磁場と解釈できる.)

(b) 前問のゲージ場 $\vec{A}$ に対して, 以下のゲージ変換を施す:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} - \nabla\lambda(x), \quad \lambda(x) = 2g \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right).$$

このとき変換後のゲージ場は $\vec{A}' = \dfrac{g}{4\pi}\dfrac{1}{r(r-x^3)}(x^2, -x^1, 0)$ となることを示せ．(なおゲージ変換は磁場を変えないので, 変換後の磁場は $\vec{B}(\vec{x}) = \dfrac{g}{4\pi}\dfrac{\vec{x}}{r^3}$ である.)

(a), (b) のゲージ場は原点の他にそれぞれ x^3 軸の負および正の部分に特異点を持つ．これは, Dirac string と呼ばれ, 磁場には影響を与えず, ゲージ変換で方向を変える．一方磁場は原点のみに特異点を持ち, ここでは場が定義されていないと解釈される．したがってディラック・モノポールは $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の領域で定義され, S^2 上の主 $U(1)$ 束という非自明なファイバー束で記述される．

(2) 次に電磁気学の理論を行列型に拡張することを考える. $[A,B]:=AB-BA$ とする. 簡単のため結合定数は 1 とする. 記号の煩わしさを避けるため講義ノートとは異なるエルミート性をゲージ場に課す.

(a) ゲージ場 $A_\mu(x)$ を $N\times N$ 反エルミート行列 $(A^\dagger=-A)$ に値をとる関数として定める. 1-form $A:=A_\mu dx^\mu$ および 2-form $F:=dA+A\wedge A$ を定義する. $F=(1/2)F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ ($F_{\mu\nu}$ は 2 階の反対称 tensor) と表したとき, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$ であることを示せ. ($F_{\mu\nu}$ を場の強さと呼ぶ. $N=1$ の場合, $[A_\mu,A_\nu]=0, F=dA$ となり, 電磁気学の理論と一致する.)

なお, 行列値関数の場合の微分形式の wedge 積および外微分は普通の実数値関数の場合とまったく同様に定義され, 例えば, $\omega=Adx^1\wedge dx^2$, $\eta=Bdx^3\wedge dx^4$ (A,B: n 次正方行列に値をとる関数) のとき, $\omega\wedge\eta=ABdx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\wedge dx^4$, $d\omega=\dfrac{\partial A}{\partial x^\mu}dx^\mu\wedge dx^1\wedge dx^2$.

(b) $g(x)$ をユニタリ群 $U(N)$ に値をとる関数とする. ゲージ場に対するゲージ変換を $A_\mu\mapsto A'_\mu=g^{-1}A_\mu g+g^{-1}(\partial_\mu g)$ として定義したとき, $F_{\mu\nu}$ に対するゲージ変換が $F_{\mu\nu}\mapsto F'_{\mu\nu}=g^{-1}F_{\mu\nu}g$ となることを示せ. (電磁気のゲージ変換は $g(x)=e^{i\lambda(x)}\in U(1)$ としたもの.)

(c) 共変微分を $D_\mu:=\partial_\mu+A_\mu$ で定義する. $D_\rho\cdot F_{\mu\nu}+D_\mu\cdot F_{\nu\rho}+D_\nu\cdot F_{\rho\mu}=0$ が成り立つことを示せ (Bianchi の恒等式). ただし $D_\rho\cdot F_{\mu\nu}:=\partial_\rho F_{\mu\nu}+[A_\rho,F_{\mu\nu}]$. ($N=1$ の場合, 電磁気学の $dF=0$ に一致. 電磁気学の $*d*F=J$ に対応する方程式は Yang-Mills 方程式と呼ばれ, $*D*F=J$ で与えられる.)

(d) $\omega:=\mathrm{Tr}\left(A\wedge dA+\dfrac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$ を Chern-Simons 3-form と呼ぶ. (Tr は $N\times N$ 行列のトレース.) $\mathrm{Tr}(A\wedge A\wedge A\wedge A)=0$ を示し, $\mathrm{Tr}(F\wedge F)=d\omega$ を証明せよ.

問題 13. (リーマン幾何における計量・接続) 4 次元時空における semi-Riemann 計量を $g_{\mu\nu}$ とする. (添え字の $\mu,\nu,\rho,\sigma,\tau,\kappa$ は $0,1,2,3$ を走るものとする.) Christoffel Symbol $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ を以下で定める：

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\ :=\ \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\nu g_{\mu\sigma}+\partial_\mu g_{\nu\sigma}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right).$$

(1) $g:=\det g_{\mu\nu}(<0)$ とする. $dg=gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$ を示せ.

(2) 反変 vector A^ν に対する共変微分は $\nabla_\mu A^\nu=\partial_\mu A^\nu+\Gamma^\nu{}_{\rho\mu}A^\rho$ で与えられる. $\Gamma^\mu{}_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2g}\partial_\nu g$ および $\nabla_\mu A^\mu=\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu)$ を示せ.

(3) 前問の結果は 3 次元 Riemann 多様体においても成り立つ. 3 次元ラプラシアンの極座標表示を求めよう. 3 次元一般座標系におけるラプラシアンは共変微分を用いて以下のように定義される ($g>0$ に注意)：

$$\Delta f:=\nabla_i\nabla^i f=\nabla_i\partial^i f=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\,\partial^i f)=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}\,g^{ij}\partial_j f),$$

ただし f は 3 次元空間のスカラー関数で, 以後添え字 i,j,k は $1,2,3$ を走るものとする. 3 次元ユークリッド計量は極座標表示で $ds^2=\delta_{ij}dx^idx^j=dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$ となる (記号は問題 5(2) に準ずる). これから, $g_{rr},g_{\theta\theta}$ などの計量の成分を読み取り, 3 次元ラプラシアンの極座標表示を r,θ,φ を用いて表せ.

(4) K 系から K' 系への一般座標変換 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ を考える．この座標変換を以後 $x'^\mu(x)$ の略記で表す．(引き数の x は x^0, x^1, x^2, x^3 をまとめて表したもの.) 共変 vector A_μ に対する共変微分 $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} A_\rho$ が tensor の変換性を持つという要請から, Christoffel Symbol $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ が以下のように変換することを示せ.

$$\left(\nabla'_\mu A'_\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\nabla_\rho A_\sigma \Rightarrow\right) \quad \Gamma'^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\Gamma^\kappa{}_{\sigma\tau} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}.$$

あるいは 講義ノート 48 ページの数学的定義：$\nabla_\mu(\partial_\nu) = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\partial_\rho$ から導いてもよい．

(5) (講義ノート定理 4.18 に関する問題) $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ より $\delta R = \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ が成り立つ．$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\rho})$ に注意して, 以下を示せ.

$$\begin{aligned}\int \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x &= \int \left(\nabla_\rho(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\rho})\right)\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int \left(\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\rho})\right)d^4x.\end{aligned}$$

ただし, $\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ は $(1,2)$ 型 tensor であり, $\nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\rho}) = \partial_\rho(\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}) + \Gamma^\rho{}_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}\delta\Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma}$ が成り立つこと, および $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$ を既知としてよい．

問題 14. (測地線の方程式) 背景時空上の点 P から点 Q まで運動する質量 m の質点を考える．時空内の (ある座標系から記述した) 質点の位置を x^μ $(\mu \in \{0,1,2,3\})$ とする $(x^0 := ct)$.

(1) まず背景時空をミンコフスキー空間として以下の作用積分 S を考える：

$$S = -\alpha\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} d\tau,$$

ただし τ は質点の固有時間であり $d\tau = \sqrt{-dx_\mu dx^\mu}$. α は定数とする．この停留曲線が質点の運動の軌跡を与える．ラグランジュ形式として, $S = \int_{t_{\mathrm{P}}}^{t_{\mathrm{Q}}} L(x^i, \dot{x}^i)dt$ $(i \in \{1,2,3\})$ と表したときの L を $(m, c, v$ を用いて$)$ 表せ．(定数 α は, $v^i := dx^i/dt$, $v := \sqrt{v_i v^i}$, $\beta := v/c$ として, L を $\beta = 0$ の周りでテイラー展開した式の β の 2 次の項が $(1/2)mv^2$ に等しいことから定まる.) またこのとき x^i の共役運動量 p_i およびハミルトニアン H を計算し, 講義ノート例 2.29 の 4 元運動量と比較せよ.

(2) 次に背景時空を semi-Riemann 多様体として以下の作用積分 S を考える.

$$S = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} d\tau,$$

ただし τ は質点の固有時間であり $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}$. この作用積分の停留曲線は以下のようになることを示せ；

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0.$$

これは測地線の方程式と呼ばれ, 曲がった空間での質点の運動の軌跡を与える.

(ヒント：例えばラグランジュ形式として, $S = \int_{\lambda_{\mathrm{P}}}^{\lambda_{\mathrm{Q}}} L(x^\mu, \dot{x}^\mu)d\lambda$, $(\dot{x}^\mu := dx^\mu/d\lambda)$ と表し, Euler-Lagrange 方程式を求める．λ は経路をパラメトライズする実数.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 前問 (2) と同じ設定で以下の作用積分を考える：

$$\widetilde{S}=\frac{1}{2}\int_{\tau_{\mathrm{P}}}^{\tau_{\mathrm{Q}}} g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}d\tau.$$

(a) 作用積分 $\widetilde{S}$ の停留曲線が (2) の測地線方程式を与えることを示せ.

(b) (a) の結果を用いると計量から Christoffel symbol が簡明に求まる. 以下の計量に対して Christoffel symbol をすべて求めよ：

$$ds^2=-f(r)dt^2+g(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).$$

$(x^0,x^1,x^2,x^3)=(ct,r,\theta,\varphi)$ として, 各変数に関する $\widetilde{S}$ の Euler-Lagrange 方程式を求めれば, そこから ${\Gamma^{\mu}}_{\rho\sigma}$ が読み取れる.

問題 15. (シュワルツシルト・ブラックホール解) 原点を除く領域で真空 ($T_{\mu\nu}=0$) となっている状況で，球対称かつ静的なブラックホール解を求めてみよう. 解の形として以下を仮定する：

$$ds^2=-e^{\nu(r)}c^2dt^2+e^{\lambda(r)}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

(1) $T_{\mu\nu}=0$ のとき, アインシュタイン方程式は $R_{\mu\nu}=0$ となることを示せ.

(2) $(x^0,x^1,x^2,x^3)=(ct,r,\theta,\varphi)$ とすると, $g_{00}=-e^{\nu},g_{11}=e^{\lambda},g_{22}=r^2,g_{33}=r^2\sin^2\theta$ である. この計量より, Christoffel Symbol, Riemann 曲率の各成分を計算し, Ricci 曲率を求めよ. (問題 14(3) の結果を用いてもよい.)

(3) (2) を (1) に代入することで $\nu'+\lambda'=0$ が得られることを示せ. (肩のダッシュ$'$ は r 微分を表す.) これより，$\nu=-\lambda$ が得られる. (積分定数はゼロとおいた.)

(4) (3) の結果を (1) に代入することで $e^{\nu}=1+\dfrac{C}{r}$ が得られることを示せ. (C は定数)

原点に質点 M が存在する場合の弱い重力場の極限での計量は以下の形になる:

$$ds^2=-\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2+(\text{空間部分}).$$

(問題 14(1) の非相対論的極限の考察を重力ポテンシャルの下で行えば g_{00} がこのような形になることが分かる.)

これと前問の結果を比較することで ($r\to\infty$ で両者が一致することにより) $C=-2MG/c^2$ と定まり, Schwarzshild ブラックホール解が得られた.