担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

略解 (位相空間, コンパクト性)

作成日：January 9, 2023 Updated：January 17, 2023

問題 1. (N 点集合の位相)

(1) $\mathcal{O}_0 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$, $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{2\}, X\}$, $\mathcal{O}_{12} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$. $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{12}$, $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{12}$ より, この包含関係に応じた位相の強弱が決まる. ($\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の間には強弱関係はない.)

(2) $(X, \mathcal{O}_0)$ は位相空間ではない. ($\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mathcal{O}_0$.) $(X, \mathcal{O}_1), (X, \mathcal{O}_2)$ は位相空間である.

(3) 例えば $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1,2\}, X\}$, $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, X\}$. ($\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.)

(4) $A^\circ = \{1,2\}$, $\bar{A} = \{1,2,3,4,5\}$, $A^d = \{3,4,5\}$. (各点の開近傍を書き下し, 吟味する.) X はハウスドルフ空間ではない. (異なる 2 点 4 と 5 の開近傍はともに X のみ)

(5) $\widetilde{\mathcal{O}} = \{\emptyset, \{1\}, A\}$. $\bar{D} = \{2,4,5\}$.

(6) 前者の場合は連続である. (開集合の逆像が全て $\mathcal{O}_1$ の元 (開集合) になっている.)

後者の場合は連続でない. ($f^{-1}(\{2\}) = \{1,2\}$ となるが, これは $\mathcal{O}_1$ の元 (開集合) ではない.)

問題 2. (開被覆)

(1) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して U_k は $\mathbb{R}$ の開集合だから任意の $x \in (a,b)$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して $a + \varepsilon < x < b - \varepsilon$ となる. よって $\delta/k < \varepsilon$ となる k を取れば $a + \delta/k < a + \varepsilon < x < b - \varepsilon < b - \delta/k$ となるから $x \in U_k$ である. したがって $(a,b) \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ だから $\{U_k \mid k = 1, 2 \ldots\}$ は (a,b) の開被覆である.

(2) $k \le l$ のとき $U_k \subset U_l$ に注意する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ と n 個の $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ を取る. $K = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ とすると $U_{k_i} \subset U_K$ が任意の $i = 1, \ldots, n$ について成り立つ. $K \in \{k_1, \ldots, k_n\}$ だから $U_K = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$ が成り立つ. ところが $a + \delta/K \notin U_K$ だが $a + \delta/K \in (a,b)$ である. したがって $(a,b) \neq U_K = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$ となる.

問題 3. (有界閉集合と開被覆)

(1) 仮定から $a \in [a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ だからある $\nu \in \Lambda$ が存在して $a \in U_\nu$. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ は $\mathbb{R}$ の開集合だから, ある $\delta > 0$ $(a + 2\delta < b)$ が存在して $(a - 2\delta, a + 2\delta) \subset U_\nu$ となる. 特に $[a, a+\delta] \subset U_\nu$,$a + \delta < b$ より $a + \delta \in M \cap (a,b] \neq \emptyset$ となる.

(2) $x_o = \sup\{x \mid x \in M\}$ とおく. 任意の $x \in M$ に対して $a \le x \le b$ だから $x_o \le b$. また前問 (1) よりある $\delta > 0$ が存在して $a + \delta \in M$ だから $a < a + \delta \le x_o$ となる.

(3) 前問 (2) より $x_o \in [a,b] \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ である. よってある $\mu \in \Lambda$ が存在して $x_o \in U_\mu$ となる. U_μ が開集合だから $\varepsilon > 0$ を $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon) \subset U_\mu$ と取る. 上限の定義により $x_o - \varepsilon < x_1 \le x_o$ となる $x_1 \in M$ が存在する. M の定義からある有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $[a, x_1] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる. よって $[a, x_o] \subset [a, x_1] \cup (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \cup U_\mu$ となる. よって $x_o \in M$ である.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(4) $x_o < b$ と仮定して矛盾を導く．前問 (3) の解答にあるように $x_o \in U_\mu$ となる $\mu \in \Lambda$ を取り，$(x_o - 2\varepsilon, x_o + 2\varepsilon) \subset U_\mu$ となる $x_o + 2\varepsilon < b$ を満たす $\varepsilon > 0$ を取る．さらに $x_o - \varepsilon < x_1 \leq x_o$ となる $x_1 \in M$ を取る．そして有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ で $[a, x_1] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となるものを取る．このとき $x_o + \varepsilon \in [a, b]$ であり $[a, x_o + \varepsilon] = [a, x_1] \cup (x_o - 2\varepsilon, x_o + 2\varepsilon) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \cup U_\mu$ となる．よって $x_o + \varepsilon \in M$ だが x_o が M の上限であることに矛盾する．よって $x_o = b$．したがって $b \in M$ だから M の定義から有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ が存在して $[a, b] \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{K} U_{\lambda_i}$ となる．

問題 4. (有限集合) X を有限集合として $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とする．また $\mathcal{O}$ を X の任意の位相とする．$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を位相 $\mathcal{O}$ における X の開被覆とする．つまり $X = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ である．このとき任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して $x_i \in U_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在する．よって $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ となる．したがって $(X, \mathcal{O})$ はコンパクト空間である．

問題 5. (コンパクト性の判定) 定理 1 (2) より $\mathbb{R}^2$ の部分集合について，コンパクト集合であることと (ユークリッド距離について) 有界閉集合であることとが同値であることを用いる．

A はコンパクト集合である．[理由] $g(x, y) := x^4 + y^4 + 3xy$ は $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数である．一点からなる集合 $\{2\} \subset \mathbb{R}$ は閉集合だから $g^{-1}(\{2\}) = A$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合 (H006 問題 6 参照)．次に $(x, y) \in A$ とし $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ と極座標表示する．$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ である．このとき，

$$
\begin{aligned}
2 &= g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 3r^2 \sin\theta\cos\theta \\
&= r^4(2\sin^4\theta - 2\sin^2\theta + 1) + \frac{3r^2}{2}\sin(2\theta) = r^4(2(\sin^2\theta - 1/2)^2 + 1/2) + \frac{3r^2}{2}\sin 2\theta \\
&\geq \frac{r^2}{2}(r^2 - 3).
\end{aligned}
$$

したがって $r^2(r^2 - 3) \leq 4$ となり $r^2 \leq 4$．つまり $(x, y) \in A$ ならば $x^2 + y^2 \leq 4$ だから A は有界．よって A は有界閉集合だからコンパクト集合となる．

問題 6. (コンパクト空間の性質：最大値・最小値の存在)

(1) 定理 1 (5) より $f(X)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合．よって定理 1 (2) より $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合である．

(2) $a = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$ だから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in X$ で $f(x_n) < a + 1/n$ となるものが存在する．また $a \leq f(x_n)$ だから $a \leq f(x_n) < a + 1/n$ より数列 $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は a に収束する．$\{f(x_n)\} \subset f(X)$ であり $\{f(x_n)\}$ は a に収束し，$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合だから $a \in f(X)$ である．$b \in f(X)$ も同様である．

(3) 前問 (2) より $f(x_1) = a,\ f(x_2) = b$ となる $x_1, x_2 \in f(X)$ が存在する．上限と下限の定義から任意の $x \in X$ に対して $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$．よって定理 1 (6) がしたがう．

担当教員： 浜中 真志　研究室： 理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. (コンパクト集合の性質) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を F の任意の開被覆とする. F は閉集合なので補集合 F^c は開集合. したがって, $\{F^c\}\cup\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆となる. 仮定により X はコンパクトなので, ここから有限個の開集合 $U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_n},F^c$ を選んで $\{U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_n},F^c\}$ を X の開被覆とすることができる. このとき, 和集合 $U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n}$ は F を含む. ゆえに, F はコンパクトである.

問題 8. (コンパクト空間)

(1) $f:X\to Y$ を同相写像とすると $f:X\to Y$ は連続な全射. したがって定理 1 (5) より $f(X)=Y$ は Y のコンパクト集合である. つまり Y はコンパクト空間である.

(2) S^1 と $[0,1)$ は同相ではない. 以下でこれを示す. $\rho:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $\rho(z)=|z|$ は $\mathbb{C}$ 上の連続関数である. また $\{1\}\subset\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であるから $\rho^{-1}(1)=S^1$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である. S^1 は $\mathbb{C}$ のユークリッド距離に関して有界であるから S^1 は $\mathbb{C}$ の有界閉集合. よって定理 1, (2) より S^1 はコンパクト集合である.

一方 $n\in\mathbb{N}$ に対して $U_n:=\left[0,1-\dfrac{1}{n+1}\right)\subset[0,1)$ とおく. $V_n=\left(-1+\dfrac{1}{n+1},1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ は $\mathbb{R}$ の開集合であり, $V_n\cap[0,1)=U_n$ となるから, U_n は $[0,1)$ の相対位相で開集合. 任意の $x\in[0,1)$ に対して $x<1$ より $x<1-\dfrac{1}{n+1}$ となる $n\in\mathbb{N}$ が存在し $x\in U_n$ となる. よって $[0,1)=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ である. つまり $\{U_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ は $[0,1)$ の開被覆. もし $[0,1)$ がコンパクト集合ならある有限個の自然数 $n_1,\dots,n_L$ $(n_1<\cdots<n_L)$ が存在して, $[0,1)=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{L}U_{n_i}$ となる. 定義から $n\le m$ ならば $U_n\subset U_m$ が成り立つ. したがって, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{L}U_{n_i}\subset U_{n_L}$. つまり, $[0,1)\subset U_{n_L}$ であるが, $U_{n_L}\subset[0,1)$ より $[0,1)=U_{n_L}$ となる. ところが, $1-\dfrac{1}{n_L+2}\notin U_{n_L}$, $1-\dfrac{1}{n_L+2}\in[0,1)$ より, 矛盾である. よって $[0,1)$ はコンパクト集合ではなく, したがって前問 (1) より S^1 と同相ではない.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. (宿題：20 点)

(1) (5 点) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $A\cup B$ の任意の開被覆とする．このとき $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は A の開被覆であり, B の開被覆でもある．仮定により A がコンパクトなので, 有限個の開集合 $U_{\lambda_1},\ldots,U_{\lambda_k}$ を選んで A の開被覆とすることができる．同様に B も仮定によりコンパクトなので, 有限個の開集合 $U_{\lambda_{k+1}},\ldots,U_{\lambda_\ell}$ を選んで B の開被覆とすることができる (ここで添字の集合 $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$ と $\{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_\ell\}$ に共通するものがあってもよい)．したがって, 有限個の開集合 $U_{\lambda_1},\ldots,U_{\lambda_\ell}$ (重複するものがある場合はスキップする) によって $A\cup B$ の開被覆が得られるので, $A\cup B$ はコンパクトである．

(2) (5 点) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $f(Z)$ の任意の開被覆とする．$\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は Z の開被覆であるので, Z がコンパクトであるという仮定により有限個の開集合 $f^{-1}(U_{\lambda_1}),\ldots,f^{-1}(U_{\lambda_n})$ を選んで $Z\subset f^{-1}(U_{\lambda_1})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{\lambda_n})$ とすることができる．したがって

$$f(Z)\subset f(f^{-1}(U_{\lambda_1})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{\lambda_n}))\subset U_{\lambda_1}\cup\cdots\cup U_{\lambda_n}$$

であるので, $f(Z)$ は有限個の開集合 $U_{\lambda_1},\ldots,U_{\lambda_n}$ で覆うことができる, すなわち, $f(Z)$ はコンパクトである．

(3) (5 点) $(X,\mathcal{O}(X))$ をコンパクト空間, $(Y,\mathcal{O}(Y))$ をハウスドルフ空間とする．$f:X\to Y$ を連続写像, A を X の閉集合とする．このとき定理 1 (3) より A は X のコンパクト集合である．また A の位相を X に関する相対位相とすると, f の A への制限写像 $f|_A$ は (Y の任意の開集合の $f|_A$ による逆像が A の開集合となるので) コンパクト位相空間 A から Y への連続関数であり, 定理 1 (5) より $f(A)=f|_A(A)$ は Y のコンパクト集合である．したがって定理 1 (4) より $f(A)$ は Y の閉集合となる．よって定理 1 (7) が示された．

(4) (5 点) $(X,\mathcal{O}(X))$ をコンパクト空間, $(Y,\mathcal{O}(Y))$ をハウスドルフ空間とする．$f:X\to Y$ を連続な全単射とし, F を X の任意の閉集合とする．f は連続だから, 定理 1(7) より $f(F)$ は Y の閉集合．また f は全単射だから 逆写像 f^{-1} が存在する．ここで, f^{-1} による F の逆像 $(f^{-1})^{-1}(F)$ は $f(F)$ に等しいので, Y の開集合である．よって $f^{-1}:Y\to X$ は連続．したがって, $f:X\to Y$ は連続な全単射で $f^{-1}:Y\to X$ が連続だから f は同相写像．よって定理 1 (8) が示された．