担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

位相空間, コンパクト性 (2023年1月12日)

作成日：January 9, 2023　Updated：January 17, 2023　実施日：January 12, 2023

位相空間

定義 1. (位相空間) X の部分集合からなる集合を $\mathcal{O}_X$ (あるいは $\mathcal{O}(X)$ や $\mathcal{O}$ とも書く) とおく．これが次の 3 つの条件を満たしているとする．

(1) $\phi, X \in \mathcal{O}_X$

(2) 任意有限個の $\mathcal{O}_X$ に属する集合の共通部分はまた $\mathcal{O}_X$ に属する．

(3) 任意個数 (有限または無限) の $\mathcal{O}_X$ に属する集合の和集合はまた $\mathcal{O}_X$ に属する．

このとき，$\mathcal{O}_X$ に属する X の部分集合を開集合と呼ぶ．また $\mathcal{O}_X$ を位相といい，X は位相空間であるという．(この演習問題では $X = \emptyset$ ではないと仮定する.)

$x \in X$ を含む開集合を x の開近傍という．ユークリッド空間同様, 内点・触点・集積点が以下のように定義される．

- $a \in X$ が $A(\subset X)$ の内点であるとは, ある a の開近傍 $U(a)$ が存在して $U(a) \subset A$.
- $a \in X$ が A の触点であるとは, 任意の a の開近傍 $U(a)$ に対して $U(a) \cap A \neq \emptyset$.
- $a \in X$ が A の集積点であるとは, 任意の a の開近傍 $U(a)$ に対して $(U(a) - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

位相空間 X の任意の相違なる 2 点 a, b に対して, $U(a) \cap U(b) = \emptyset$ となるような a の開近傍 $U(a)$ および b の開近傍 $U(b)$ が必ず存在するとき, X をハウスドルフ空間であるという．

問題 1. (目覚まし位相：N 点集合)

(1) 2 点からなる集合 $X = \{1, 2\}$ に 入りうる位相 $\mathcal{O}$ を全て書き下せ．またそれらの位相の強弱を議論せよ．($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が集合 X における 2 つの位相であって, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つとき, 位相 $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い, 位相 $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強いという.)

(2) 3点からなる集合 $X = \{1, 2, 3\}$ に対して位相を導入しよう．$\mathcal{O}_0 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}$, $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$, $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}$, とすると, $(X, \mathcal{O}_i)$, $i = 0, 1, 2$ はそれぞれ位相空間であるか？

(3) 4 点からなる集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ に, 位相の強弱関係のつく, 密着位相 ($\mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\}$), 離散位相 ($\mathcal{O}_X = 2^X$) 以外の位相を 2 つ入れよ．

(4) 5点からなる集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$ とすると, $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．このとき $A = \{1, 2, 4\}$ の内部 A°, 閉包 $\bar{A}$, 集積点全体 (導集合) A^d を求めよ．また X はハウスドルフ空間か？

(5) 5 点からなる集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, X\}$ をすると, $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．このとき $A = \{1, 2, 4, 5\}$ であるときの A の X に関する相対位相 $\widetilde{\mathcal{O}}$ を求めよ．また位相空間 $(A, \widetilde{\mathcal{O}})$ における $D = \{2, 4\}$ の閉包を求めよ．($A \subset X$ のとき, A の X に関する相対位相は $\widetilde{\mathcal{O}} = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.)

(6) (2) の位相空間 $(X, \mathcal{O}_1), (X, \mathcal{O}_2)$ に対し，写像 $f : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ を $f(1) = 1, f(2) = f(3) = 2$ で定める．f は連続写像であるか？$f(1) = f(2) = 2, f(3) = 3$ の場合はどうか？(連続写像の定義は H006 定理 1 参照)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

開被覆

定義 2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}$ (Λ は添字集合) が A の ($(X, \mathcal{O})$ における) 開被覆であるとは, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が成り立つときをいう.

問題 2. (開被覆) 二つの実数 $a < b$ に対して $\delta := (b-a)/3$ とおく. 任意の自然数 k に対し, ユークリッド空間 $\mathbb{E}^1 := (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\mathrm{E})$ の開集合 U_k を $U_k := (a + \delta/k, b - \delta/k)$ と定義する.

(1) $\{U_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ は開区間 (a, b) の開被覆であることを示せ.

(2) 任意の有限個の自然数 $k_1, \ldots, k_n$ に対して $\bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} \neq (a, b)$ を示せ.

問題 3. (有界閉集合と開被覆) ユークリッド空間 $\mathbb{E}^1 = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\mathrm{E})$ の閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が与えられたとき, $[a, b] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_K}$ となる有限個の Λ の元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ が存在する. これを以下のように示せ.

(1) $M \subset [a, b]$ を次で定義する.

$$x \in M \overset{\text{def}}{\iff} x \in [a, b] \text{ かつ有限個の } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \text{ があって } [a, x] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}.$$

このとき $a \in M$ かつ M は a 以外の $[a, b]$ の元を含むことを示せ.

(2) $M \subset [a, b]$ より M は有界. $x_o := \sup\{x \mid x \in M\}$ とすると $a < x_o \leq b$ を示せ.

(3) $x_o \in M$ を示せ.

(4) $x_o = b$ を示せ. また有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_K \in \Lambda$ が存在して $[a, b] \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_K}$ となることを示せ.

コンパクト性

定義 3. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の部分集合 F は, 次の条件を満たすとき ($\mathcal{O}_X$ に関して) コンパクト, あるいはコンパクト集合であるという：

> F の任意の $\mathcal{O}_X$ 開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から有限個 $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_r}$ $(\lambda_i \in \Lambda)$ を適当に選んで $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_r}\}$ を F の $\mathcal{O}_X$ 開被覆とすることができる.

特に X が $\mathcal{O}_X$ に関してコンパクト集合であるとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクト位相空間とよぶ.

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 F に関して, 有界閉集合であることと, $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合であることは同値である (定理 1(2). cf. 問題 3). 問題 2 より, 開区間 (a, b) が $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合でないことが分かる.

問題 4. (有限集合) 有限集合は任意の位相についてコンパクト空間となることを示せ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1. コンパクト集合について知られている基本的な定理を列挙する．(なお位相空間の連続写像の定義は H006 定理 1 のように与えられる.)

(1) (X,d) を距離空間とし距離 d から定まる距離位相を $\mathcal{O}_d$ とすると，次の三条件は同値.

  (a) $(X,\mathcal{O}_d)$ はコンパクト空間である.
  (b) X の任意の無限部分集合は集積点を持つ.
  (c) X の任意の点列は収束する部分列を持つ.

(2) ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{O}_{\mathrm{E}})$ の部分集合 A がコンパクト集合であるためには (ユークリッド距離に関して)A が有界閉集合となることが必要十分.

(3) コンパクト空間 $(X,\mathcal{O})$ の任意の閉集合は $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト集合.

(4) ハウスドルフ空間 $(X,\mathcal{O})$ のコンパクト集合 A は閉集合.

(5) $(X,\mathcal{O}(X))$ をコンパクト空間, $(Y,\mathcal{O}(Y))$ を位相空間とする．このとき任意の連続写像 $f:X\to Y$ に対し $f(X)$ は $(Y,\mathcal{O}(Y))$ のコンパクト集合.

(6) $(X,\mathcal{O})$ をコンパクト空間, f を X 上の実数値連続関数, つまり $f:(X,\mathcal{O})\to(\mathbb{R},\mathcal{O}_{\mathrm{E}})$ を連続写像とする．この時 $x_1,x_2\in X$ が存在して任意の $x\in X$ に対して $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ が成り立つ (最大値・最小値の存在).

(7) コンパクト空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ からハウスドルフ空間 $(Y,\mathcal{O}(Y))$ への任意の連続写像 $f:X\to Y$ と $(X,\mathcal{O}(X))$ の任意の閉集合 A に対し, $f(A)$ は $(Y,\mathcal{O}(Y))$ の閉集合.

(8) コンパクト空間 $(X,\mathcal{O}(X))$ からハウスドルフ空間 $(Y,\mathcal{O}(Y))$ への連続な全単射 $f:(X,\mathcal{O}(X))\to(Y,\mathcal{O}(Y))$ は同相写像.

(9) 位相空間 $(X_k,\mathcal{O}_k)$ $(k=1,\ldots,K)$ が与えられているとし, $\mathcal{O}$ を直積集合 $X_1\times\cdots\times X_K$ の積位相とする．任意の $k=1,\ldots,K$ に対して $(X_k,\mathcal{O}_k)$ がコンパクト空間ならば, $(X_1\times\cdots\times X_K,\mathcal{O})$ もコンパクト空間である.

問題 5. (コンパクト性の判定)　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^4+y^4+3xy=2\}$. がコンパクト集合かどうか判定せよ.

問題 6. (コンパクト空間の性質：最大値・最小値の存在) 定理 1 (6) を定理 1 (2),(5) を用いて証明したい．そこで $(X,\mathcal{O})$ をコンパクト空間, $f:X\to\mathbb{R}$ を連続関数とする.

(1) $f(X)\subset\mathbb{R}$ は有界閉集合であることを確認せよ.

(2) 前問 (1) より $a:=\inf\{f(x)\mid x\in X\}$, $b:=\sup\{f(x)\mid x\in X\}$ とおくと $-\infty<a\le b<+\infty$ となる．このとき $a,b\in f(X)$ を示せ．(ただし閉集合 A において収束点列の収束先は A に含まれることを用いてよい.)

(3) 前問 (2) より $a=f(x_1)$, $b=f(x_2)$ を満たす $x_1,x_2\in X$ が取れる．この x_1,x_2 が定理 1 (6) の主張を満たすことを示せ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 7. (コンパクト集合の性質) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであるとき, X の任意の閉集合 F はコンパクト部分集合であることを示せ (定理 1(3) の証明). (ヒント：例えば F の任意の開被覆と F^c との和集合を考察する.)

問題 8. (コンパクト空間)

(1) X をコンパクト空間とし Y を X と同相な位相空間とする. このとき Y はコンパクト空間であることを示せ.

(2) $[0, 1)$ と $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ は同相かどうか答えよ. ただし $[0, 1)$ にはユークリッド空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathrm{E}})$ の相対位相を入れる. (ヒント: S^1 はコンパクトであり, $[0, 1)$ はコンパクト集合でないことを示せ.)

今週の宿題 (提出期限は 1 月 15 日 (日)23 時 55 分厳守です)

問題 9. (宿題) 各小問は独立した問題である. (1)〜(2) は (何か定理を用いず) コンパクト性の定義に基づき解答せよ.

(1) A, B を位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ のコンパクト部分集合とする. このとき, $A \cup B$ はコンパクトであることを示せ.

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f: X \to Y$ を連続写像とする. 部分集合 $Z \subset X$ が ($\mathcal{O}_X$ に関して) コンパクトであるなら, その像 $f(Z)$ は ($\mathcal{O}_Y$ に関して) コンパクトであることを示せ.

(3) 定理 1 (3), (4), (5) を用いて定理 1 (7) を示せ.

(4) 定理 1 (7) を用いて定理 1 (8) を示せ. (f^{-1} が連続写像であることを示せばよい.)