担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

# 一次分数変換 (略解)

作成日：December 17, 2022 Updated：January 21, 2023 Version：1.0

**問題 1. (反転と図形)**

(1) $z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+c=0 \Leftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}-c \Leftrightarrow |z-\alpha|=\sqrt{|\alpha|^2-c}$. よって，中心 $z=\alpha$, 半径 $\sqrt{|\alpha|^2-c}$ の円.

(2) $z=x+iy, \alpha=a+ib$ として，$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+c=0 \Leftrightarrow 2ax+2by+c=0$. よって (方向ベクトル $(b,-a)$ の) 直線.

(3) 反転 $w=\dfrac{1}{z}$ によって，円 (小問 (1)) や直線 (小問 (2)) の方程式がどのような図形にうつるか調べる.

円について：$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+c=0 \overset{w=1/z,\ \overline{w}=1/\overline{z}}{\Longleftrightarrow} cw\overline{w}-\alpha w-\overline{\alpha w}+1=0\cdots(*)$ .

(i) $c\neq 0$ のとき, $(*) \Leftrightarrow \left|w-\dfrac{\overline{\alpha}}{c}\right|=\dfrac{\sqrt{|\alpha|^2-c}}{|c|}$. よって原点を通らない円は原点を通らない円にうつる.

(ii) $c=0$ のとき, $(*) \Leftrightarrow \alpha w+\overline{\alpha w}-1=0$. よって原点を通る円は原点を通らない直線にうつる.

直線について：$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+c=0 \overset{w=1/z,\ \overline{w}=1/\overline{z}}{\Longleftrightarrow} cw\overline{w}+\overline{\alpha}w+\alpha\overline{w}=0\cdots(**)$ .

(i) $c\neq 0$ のとき, $(**) \Leftrightarrow \left|w+\dfrac{\alpha}{c}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|c|}$. よって原点を通らない直線は原点を通る円にうつる.

(ii) $c=0$ のとき, $(**) \Leftrightarrow \overline{\alpha}w+\alpha\overline{w}=0$. よって原点を通る直線は原点を通る直線にうつる.

**問題 2. (一次分数変換の像)** $w=i\dfrac{z-i}{z+i}$ を $z$ について解くと $z=-i\dfrac{w+i}{w-i}$. ($w=-1$ は $z=\infty$ と対応. なお $z=-i$ も $w=\infty$ と対応すると解釈.)
まず $D$ の像を求める. $z$ が単位円の内部 $|z|<1$ にあるので, $|w+i|<|w-i|$. これは $w$ 平面において点 $i$ からの距離が点 $-i$ からの距離より大きい点全体を表す. これは実軸で分けられる領域のうち点 $-i$ を含む側である. すなわち求める像は $f(D)=\{w\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\ w<0\}$ (下半平面). 次に $H$ の像を求める. $z=x+iy, w=u+iv$ とおくと, $z=-i\dfrac{w+i}{w-i}=\dfrac{2uv-i(u^2+v^2-1)}{u^2+(v-1)^2}$. これが上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ にあるので, $u^2+v^2<1$. これより求める像は $f(H)=D$. (単位円内部)

**問題 3. (非調和比)** 非調和比

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta):=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta},\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$$

が平行移動，相似変換で不変であるのは明らかであるから，反転 $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$ で不変であることを示す：

$$(f(\alpha),f(\beta),f(\gamma),f(\delta))=\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\delta}}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}=(\alpha,\beta,\gamma,\delta).$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 4. (対称な 2 点)** 点 $z$ と点 $z^*$ が円 $C$ に関して対称であるとは, 円 $C$ 上の任意の相異なる 3 点 $z_1, z_2, z_3$ に対して, 以下が成り立つことである.

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = (\overline{z}, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2}\frac{z_1 - z_3}{z^* - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}\frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_3}{\overline{z} - \overline{z}_3} \cdots (*)$$

(1) $z_3 = \infty$ ととると, $(*)$ より $\dfrac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}$, すなわち $|z^* - z_2| = |z - z_2|$ が得られる. これは直線上の任意の点 $z_2$ について成り立つから, $z^*$ は直線 $C$ に関する点 $z$ の対称点である.

(2) $(\overline{z}, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3) = (\overline{z} - \overline{\alpha}, \overline{z}_1 - \overline{\alpha}, \overline{z}_2 - \overline{\alpha}, \overline{z}_3 - \overline{\alpha}) = \left(\overline{z} - \overline{\alpha}, \dfrac{R^2}{z_1 - \alpha}, \dfrac{R^2}{z_2 - \alpha}, \dfrac{R^2}{z_3 - \alpha}\right) = \left(\dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{\alpha}}, z_1 - \alpha, z_2 - \alpha, z_3 - \alpha\right) = (\underbrace{\dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{\alpha}} + \alpha}_{=z^*}, z_1, z_2, z_3)$. よって $(z^* - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = R^2$.

**問題 5. (アポロニウスの円)**

(1) 平面上の 2 定点 $p, q$ からの距離の比が一定 $(k : 1,\ (k > 0))$ であるような点 $z$ は

$$|z - p| = k|z - q| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z - p}{z - q}\right| = k$$

を満たす. ここで一次分数変換 $w = \dfrac{z - p}{z - q}$ を考えると, $w$ の軌跡は $|w| = k$ より円であることが分かるが, 円円対応の性質より, $z$ の軌跡もまた円である.

(2) (1) の式より, $(z-p)(\overline{z}-\overline{p}) = k^2(z-q)(\overline{z}-\overline{q}) \Leftrightarrow (1-k^2)z\overline{z} - (\overline{p} - k^2\overline{q})z - (p - k^2q)\overline{z} = k^2|q|^2 - |p|^2 \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{p - k^2q}{1 - k^2}\right|^2 = \dfrac{k^2|p - q|^2}{(1 - k^2)^2}$. よって軌跡の円の中心 $\alpha$ と半径 $r$ は $\alpha = \dfrac{p - k^2q}{1 - k^2}, \quad r = \dfrac{k|p - q|}{|1 - k^2|}$ である.

(3) $(p - \alpha)(\overline{q} - \overline{\alpha}) = \dfrac{k^2(q - p)}{1 - k^2}\dfrac{\overline{q} - \overline{p}}{1 - k^2} = \dfrac{k^2|p - q|^2}{(1 - k^2)^2} = r^2$.

(4) 円 $C_1$ に関して対称な 2 点を $p, q$ とし, 一次分数変換 $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ を考える. $\left|\dfrac{w - f(p)}{w - f(q)}\right| = \left|\dfrac{cq + d}{cp + d}\right|\left|\dfrac{z - p}{z - q}\right|$ であるから, 円 $C_1$ 上の点 $z$ の像 $C_2$ は, ちょうど 2 点 $f(p), f(q)$ を対称な 2 点対にもつアポロニウスの円である.

**問題 6. (一次分数変換の決定)**

(1) $w = \dfrac{1 - i}{2}\dfrac{z + 1}{z}$. (非調和比の不変性より $\dfrac{w - 1}{0 - 1}\dfrac{0 - \infty}{w - \infty} = \dfrac{z - (-i)}{-1 - (-i)}\dfrac{-1 - 0}{z - 0}$.)

(2) $w = \dfrac{-(1 + 3i)z + 4i}{(1 - 3i)z + 2i}$. ((1) の説明の続き：$\dfrac{0 - \infty}{w - \infty} = 1$ と解釈して整理する.)

(3) $w = e^{i\theta}\dfrac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}$, $(\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{Im}\ \alpha > 0)$. (点 $\alpha$ $(\mathrm{Im}\ \alpha > 0)$ が原点にうつるとすると, $\alpha$ の実軸に関して対称な点 $\overline{\alpha}$ は無限遠点にうつる. このことと実軸上の点 $z = x$ が単位円上にうつる条件から変換が定まる.)

(4) $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $(|d| = |c|, \overline{a}c - \overline{b}d \neq 0)$. (逆変換を $|z| = 1$ に代入し, 得られた $w$ についての式が直線を表す条件を吟味する.)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 7. (宿題：10 点)**

(1) (4 点) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと, $AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$.

このとき 任意の $z \in \mathbb{P}^1$ に対して, $(f_A \circ f_B)(z) = f_A(f_B(z)) = \dfrac{a\dfrac{pz+q}{rz+s}+b}{c\dfrac{pz+q}{rz+s}+d} = \dfrac{a(pz+q)+b(rz+s)}{c(pz+q)+d(rz+s)} = \dfrac{(ap+br)z+(aq+bs)}{(cp+dr)z+(cq+ds)} = f_{AB}(z)$.

(2) (6 点) 単位円内部を $D$ と表す. 点 $\alpha \in D$ が原点にうつるとすると, $\alpha$ の単位円に関して対称な点 $\alpha^* = 1/\overline{\alpha}$ (実際 $\alpha^*\overline{\alpha} = 1$ を満たす) は無限遠点にうつる. また単位円上の点は単位円上の点にうつるので, $e^{i\varphi}$ が $e^{i\lambda}$ にうつる $(\varphi, \lambda \in \mathbb{R})$ とすると, 非調和比の不変性 $(w, e^{i\lambda}, 0, \infty) = (z, e^{i\varphi}, \alpha, 1/\overline{\alpha})$ より, $\dfrac{w-0}{e^{i\lambda}-0}\dfrac{e^{i\lambda}-\infty}{w-\infty} = \dfrac{z-\alpha}{e^{i\varphi}-\alpha}\dfrac{e^{i\varphi}-(1/\overline{\alpha})}{z-(1/\overline{\alpha})}$, すなわち $w = e^{i\lambda}\dfrac{\overline{\alpha}e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-\alpha}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$. ここで $\left|\dfrac{\overline{\alpha}e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-\alpha}\right| = \left|\dfrac{\overline{\alpha}e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}{e^{i\varphi/2}-\alpha e^{-i\varphi/2}}\right| = 1$ (分母＝分子の複素共役 $\times(-1)$) より, 求める一次分数変換は, $w = f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$ $(|\alpha| < 1, \theta \in \mathbb{R})$ と書ける.

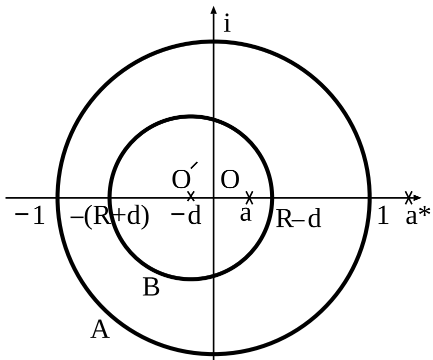
ここで, $|w| < 1 \Leftrightarrow |z-\alpha| < |\overline{\alpha}z-1| \Leftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) < (\overline{\alpha}z-1)(\alpha\overline{z}-1) \Leftrightarrow |z| < 1$ より, 求めた一次分数変換 $f$ は確かに $D$ を $D$ に写す. (実は全単射である.)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

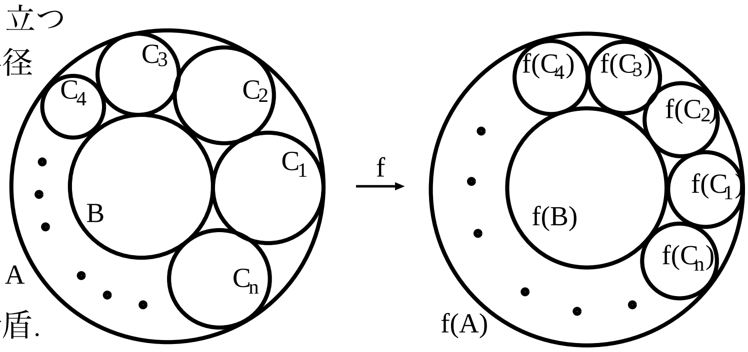
**問題 8. (宿題：10 点)**

(1) (a) (3 点) 円 $A$ を複素平面上の単位円とし，円 $B$ を右下の右上図のように中心 $-d$ $(d>0)$，半径 $R(<1)$ の円としても一般性を失わない．円 $B$ が円 $A$ の内側にあり互いに交わらないという条件から $R<1-d$ の関係式が成り立つ ($R<1+d$ も成り立つ)．円に関して対称な 2 点と円の中心は同一直線上にある．したがって円 $A,B$ 両方に関して対称な 2 点は 2 つの円の中心同士を結ぶ直線 $OO'$ 上にある．(この設定では実軸上にある.) この対称な点を $a,a^*(\in\mathbb{R})$ と書く．円 $A$ に関して対称であるから $a^*=1/a$．円 $B$ に関して対称であるから，$(a+d)(a^*+d)=R^2$，すなわち $da^2+(d^2-R^2+1)a+d=0$．この $a$ についての 2 次方程式の判別式を $D$ とすると，$D=(d^2-R^2+1)^2-4d^2=(d^2-R^2+1+2d)(d^2-R^2+1-2d)=((1+d)^2-R^2)((1-d)^2-R^2)>0$．よってこの 2 次方程式は異なる 2 つの実数解 $a_\pm$ を持ち，これが対称な 2 点の (実軸上の) 座標を表す．

(b) (3 点) 与えられた一次分数変換 $f$ は点 $a_+$ を 0 に，$a_-$ を $\infty$ にうつす．対称の原理より，対称な 2 点は $f$ によって対称な 2 点にうつされるので，$f(A)$ と $f(B)$ は原点中心の同心円になる．(円の中心と対称な点は無限遠点であることに注意.)




(2) (4 点) (1) の設定で本問題を考える．(b) の一次分数変換 $f$ は等角写像であり，円円対応の性質と合わせると，接する 2 円は接する 2 円にうつされる．したがって Steiner の定理の前提条件は $f$ によって写された先の同心円の状況でも成り立つ．この状況で Steiner の定理が成り立つのは ($f(C_1),\cdots,f(C_n)$ が同じ半径の円なので) 自明．したがってもしも元の状況で Steiner の定理が成り立たないとすると $C_n$ が $C_1$ と接しないことがあるが，一方 $f(C_n)$ は $f(C_1)$ と必ず接するので，$f$ の等角写像性と矛盾．




[**コメント (1/21)**] (1) (a) で「円 $B$ が円 $A$ の内側にあるとして一般性を失わない」と書きましたが，「円 $B$ が円 $A$ の外側にある」場合はどうか，との質問を受けました．結論から言うと「内側」として一般性を失いません．理由はリーマン球面 $\mathbb{P}^1$ を考えると分かります．複素平面上での円は立体射影を介してリーマン球面上の円と 1 対 1 に対応します (問題文 3 ページ)．円の「内側」「外側」という区別は複素平面上では存在しますが，リーマン球面上では存在しません．一次分数変換は $\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1$ への写像ですので，上記解答の場合の吟味で十分だということになります．

この議論に納得できない人は，場合分けして「円 $B$ が円 $A$ の外側にある」場合も考えれば OK です．この場合も円 $A$ を複素平面上の単位円とし，円 $B$ を中心 $-d$ $(d>0)$，半径 $R(<1)$ の円としても一般性を失わないですが，これで同様の議論をすると結局 (上記解答と同じ) 2 次方程式の解が異なる 2 つの実数解を持つことが示されます．

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 9. (ボーナス問題：6 点)**

(1) (1 点) $R_{n+1}(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $(0 < \theta < 1)$.

(2) (2 点) $e = \dfrac{m}{n} = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + R_{n+1}(1)$ $\cdots (*)$ の両辺に $n!$ をかけると
$$m(n-1)! = n! + n! + n(n-1)\cdots 3 + n(n-1)\cdots 4 + \cdots + 1 + n!R_{n+1}(1)$$
であるから, $n!R_{n+1}(1)$ は整数. 一方 $n!R_{n+1}(1) = \dfrac{e^{\theta}}{n+1} > 0$ より, $n!R_{n+1}(1)$ は 1 以上の整数である.

(3) (3 点) $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$ を用いると, $1 \leq n!R_{n+1}(1) = \dfrac{e^{\theta}}{n+1} < \dfrac{e}{n+1} < \dfrac{3}{n+1}$. すなわち $n+1 < 3$, よって $n = 1$. このとき $e = m$ (整数) となるが, これは $2 < e < 3$ と矛盾.

**問題 10. (ボーナス問題：8 点)**

(1) (2 点) $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{2n}x^{2n}\right)$ であるから, $l < n$ または $l > 2n$ のとき, $f_n^{(l)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ である. $n \leq l \leq 2n$ のとき, $f_n^{(l)}(0) = \dfrac{l!}{n!}a_l$ であるが, $a_l$ は整数であり, $l \geq n$ より, $\dfrac{l!}{n!}$ も整数.

(2) (3 点) まず $\dfrac{d}{dx}\left\{G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\right\} = \left\{G''(x) + \pi^2 G(x)\right\}\sin\pi x$ となる. ここで,
$$\begin{aligned}
\pi^2 G(x) &= p^n\left\{\pi^{2n+2}f_n(x) - \pi^{2n}f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-2}f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n\pi^2 f_n^{(2n)}(x)\right\} \\
G''(x) &= p^n\left\{\pi^{2n}f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2}f_n^{(4)}(x) + \pi^{2n-4}f_n^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right\}.
\end{aligned}$$
であるから, $f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ に注意して, $\pi^{2n} = q^n/p^n$ を代入すると
$\dfrac{d}{dx}\left\{G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\right\} = p^n\pi^{2n+2}f_n(x)\sin\pi x = \pi^2 q^n f_n(x)\sin\pi x.$

(3) (3 点) $0 < x < 1$ において, $0 < \sin\pi x \leq 1$ であり, また $0 < x^n, (1-x)^n < 1$ より $0 < f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!} < \dfrac{1}{n!}$. したがって
$$0 < I = \pi\int_0^1 q^n f_n(x)\sin\pi x\ dx < \pi\int_0^1 q^n \cdot \frac{1}{n!}\cdot 1\ dx = \frac{\pi q^n}{n!}.$$

**[コメント]** この証明は以下の論文にもとづく：

- Ivan Niven, “A simple proof that $\pi$ is irrational,” Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947) 509.

学問の新しい成果は, 一般に学術雑誌に出版されて公に認められる. (先述の論文は,「Bulletin of the American Mathematical Society」という名前の学術雑誌に出版されたということである.) 学術雑誌に出版されるためには, まず結果を (たいていは英文の) 論文として書き下ろして, 学術雑誌に投稿し, レフェリーと呼ばれる専門家の査読をクリアしなければならない.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

数学においても未解決問題はもちろん無数にあり, 重要な問題には懸賞金がかけられていることもある. 例えば, クレイ研究所が 2000 年に出題した「ミレニアム 7 大問題」には 1 問につき 100 万ドルの懸賞金が掛けられている. (Google で検索すればいろいろと出てきます.) 7 大問題の一つ, (3 次元) ポアンカレ予想は, 15 年ほど前にロシアの数学者ペレルマン (Pelelman) によって解かれた. 彼はこの業績で数学のノーベル賞と呼ばれる 2006 年のフィールズ賞受賞者に選ばれたが, 受賞を辞退し話題を呼んだ. ポアンカレ予想にまつわる数学者のドキュメンタリーが DVD 化されている：

- NHK エンタープライズ「ポアンカレ予想・100 年の格闘 ～数学者はキノコ狩りの夢を見る～」(2010 年)

**問題 11. (ボーナス問題：4 点)**

(1) (a) (2 点) 区間 $[k, k+1]$ で $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{x}$ であるから, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx$. よって

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \geq \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 \frac{1}{x}dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx - \log n$$
$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx - \log n = \log(n+1) - \log n > 0.$$ したがって数列 $\{a_n\}$ は下に有界.

(b) (2 点) 区間 $[n, n+1]$ で $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{x}$ であるから,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \big(\log(n+1) - \log n\big) = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$
$$= \int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\Big)dx \leq 0.$$ よって数列 $\{a_n\}$ は単調減少である.

(2) ($\infty$ 点??) この極限値が無理数かどうかは未解決です. **本当に**解けたならば, たちまち世界的有名人になれるでしょう.

- [参考文献] J.Havil 著, 新妻弘訳「オイラーの定数ガンマ」(共立出版, 2009 年).

[**コメント**] $a_n$ は右図の斜線部分の面積に等しい.
この図より, $\dfrac{1}{2} \leq \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \leq 1$ も説明できる.
(興味ある人は考えてみよう.)