担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

一次分数変換 (2022 年 12 月 22 日)

作成日：December 17, 2022　Updated：January 9, 2023　Version：1.0　実施日：December 22, 2022

問題 1. (目覚まし反転)　$\alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$ とする．

(1) 方程式 $z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + c = 0, \quad (c < |\alpha|^2)$ はどのような図形を表すか？

(2) 方程式 $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + c = 0, \quad (\alpha \neq 0)$ はどのような図形を表すか？

(3) 反転 $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ によって, 円や直線はどのような図形にうつるか？

(リーマン球面)
複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け足してコンパクト化した空間を $\widehat{\mathbb{C}}$ または $\mathbb{P}^1$ と記し、リーマン球面と呼ぶ．$\mathbb{C}$ 上の直線は無限遠点 ∞ を付けたすと $\mathbb{P}^1$ 上の円となる．
問題 1 の写像 f は

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & (z \neq 0, \infty \text{ のとき}) \\ 0 & (z = \infty \text{ のとき}) \\ \infty & (z = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めることによって $\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1$ への (正則) 写像にまで自然に延長できる．

定義 1.　a, b, c, d を $ad - bc \neq 0$ であるような複素数とする．このとき $\mathbb{P}^1$ の点 z に対して $\mathbb{P}^1$ の点

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

を対応させる写像を一次分数変換と呼ぶ．一次分数変換は $\mathbb{P}^1$ の自己同型写像である．

問題 2. (一次分数変換の像)　一次分数変換 $w = f(z) = i\dfrac{z - i}{z + i}$ による, 単位円板 $D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ および上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ の像を求めよ．

一次分数変換は正則行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

で定まるから、その一次分数変換を $f_A(z)$ と表すことにする．λ を 0 でない複素数とするとき $f_{\lambda A} = f_A$ である．
正則な 2 次の正方行列 A, B に対して $f_A \circ f_B = f_{AB}$ が成り立つ (宿題).

一次分数変換 $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ は

(i) $c \neq 0$ ならば, $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c^2} \cdot \dfrac{1}{z + \dfrac{d}{c}}$,　　(ii) $c = 0$ ならば, $w = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ と

かけるから，3 種類の操作 1) 平行移動 $z \mapsto z + \alpha$ (α は定数), 2) 原点のまわりの相似変換 $z \mapsto \lambda z$ (λ は非零定数), 3) 反転 $z \mapsto 1/z$ の合成として表すことができる．
問題 1 の結果より, 1 次分数変換は $\mathbb{P}^1$ 上の (広義の) 円 (直線は半径 ∞ の円と解釈) を円にうつす．(円円対応)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (非調和比) 一次分数変換は非調和比 (あるいは複比)

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

を不変に保つことを示せ. (反転について示せばよい.)

問題 4. (対称な 2 点) 点 z と点 z^* が円 C に関して対称であるとは, 円 C 上の任意の相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 に対して以下が成り立つことである.

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = (\overline{z}, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3) \qquad \cdots (*)$$

(1) 円 C が直線のとき (半径 ∞), z^* は直線 C に関する点 z の対称点であることを示せ.

(2) 円 C が中心 α, 半径 R の円のとき, $(z^*-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = R^2$ が成り立つことを示せ. また, z を z^* とともに複素平面に図示せよ.

問題 5. (アポロニウスの円)

(1) 平面上の 2 定点 p, q からの距離の比が一定 $(k:1,\ (k>0))$ であるような点の軌跡は円であることを, 一次分数変換の性質を用いて説明せよ.

(2) この軌跡の円を $|z-\alpha| = r$ とするとき, 中心 α と半径 r が以下のように求まることを示せ.

$$\alpha = \frac{p-k^2 q}{1-k^2}, \quad r = \frac{k|p-q|}{|1-k^2|}$$

(3) p, q はこの円に関して対称であることを示せ. $((p-\alpha)(\overline{q}-\overline{\alpha}) = r^2.)$

(4) (対称の原理) 一次分数変換が円 C_1 を円 C_2 にうつすとき, C_1 に関して対称な 2 点は C_2 に関して対称な 2 点にうつされることを示せ.

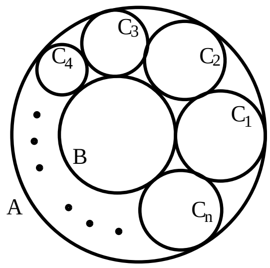
問題 6. (一次分数変換の決定) 次の一次分数変換 $w = \varphi(z)$ を求めよ. (ヒント：非調和比の不変性より, 3 点の φ による像が決まれば $w = \varphi(z)$ は定まる. また対称の原理を用いる (境界は境界にうつることに注意).)

(1) $z_1 = -1, z_2 = -i, z_3 = 0$ をそれぞれ $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$ にうつす.

(2) $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = 0$ をそれぞれ $w_1 = -1, w_2 = 1, w_3 = 2$ にうつす.

(3) z 平面の上半平面を w 平面の単位円の内部にうつす.

(4) z 平面の単位円を w 平面の直線にうつす.



今週の宿題・ボーナス問題 (提出期限は 2023 年 1 月 8 日 (日)23 時 55 分です)

問題 7. (宿題) 一次分数変換について以下の問いに答えよ.

(1) (問題文 1 ページ目の囲み記事にある事実：) 正則な 2 次の正方行列 A, B に対して $f_A \circ f_B = f_{AB}$ が成り立つことを示せ.

(2) z 平面の単位円の内部を w 平面の単位円の内部にうつす一次分数変換を求めよ. (単位円に関して対称な 2 点 $z = \alpha, \overline{\alpha}^{-1}$ がそれぞれ $w = 0, \infty$ にうつるとし, また「単位円 $\to$ 単位円」の条件も用いる.)

問題 8. (宿題)

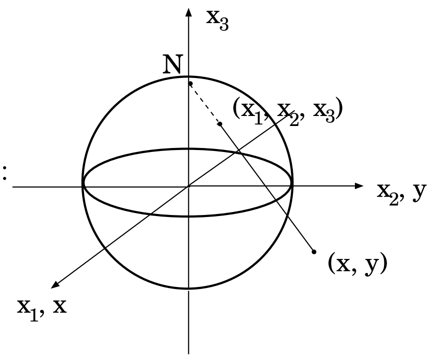
(1) 互いに同心円でなく交わらない (半径有限の) 二つの円 A, B が, ある一次分数変換で同心円にうつることを示したい. (問題 5(4) の対称の原理を既知としてよい.)

(a) 二つの円 A, B 両方に関して対称な 2 点 $a_\pm$ が存在することを示せ.

(b) $f(z) = \dfrac{z-a_+}{z-a_-}$ とすると $f(A)$ と $f(B)$ が同心円になることを示せ.

(2) 一方が他方の内部に完全に含まれる 2 つの円 A, B がある．両者の中間のある位置で, 両方の円に接する円 C_1 を描き, A, B, C_1 に接する円 C_2, A, B, C_2 に接する円 C_3, A, B, C_3 に接する円 C_4, $\cdots$, と順次作ったとき, 有限回で C_n が最初の C_1 に接したとする．このとき, C_1 を描く操作をどこから始めても, 必ず同じ n で C_n が最初の C_1 に接すること (Steiner の定理) を示せ．(1) の結果および, 一次分数変換の円円対応 (1 ページ下部), および 一次分数変換が等角写像であることを既知としてよい．

一次分数変換とリーマン球面の自己同型



次のような立体射影により, 半径 1 の 2 次元球面 S^2 の点 (x_1, x_2, x_3) と複素平面 $\mathbb{C}$ の点 $z = x + iy$ を対応させる．

このとき具体的な対応関係の式は以下のように計算される:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right),$$

$$(x, y) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right). \qquad \cdots (**)$$

北極 N に対応する点を無限遠点と解釈することで, 無限遠点の正当化を行うことができる．この対応により, 球面上の円は複素平面上の円または直線と対応する．(ちょうど北極を通る円が複素平面の直線に対応する.)

では一次分数変換はリーマン球面に対するどのような変換と対応するのであろうか？実はリーマン球面の自己同型というものと対応している．これは例えばリーマン球面の回転変換を含んでいる．ここではこの回転変換について考えてみよう．

リーマン球面上の対点 (複素平面で $\beta, -1/\overline{\beta}$) を軸とする (角度 θ の) 球面の回転に対応する一次分数変換は次のようなものとなる：

$$w = \frac{(e^{i\theta} + |\beta|^2)z + (1 - e^{i\theta})\beta}{(1 - e^{i\theta})\overline{\beta}z + (1 + e^{i\theta}|\beta|^2)} \qquad (1)$$

例えば, $\beta = 0$ のとき, (1) は $w = e^{i\theta}z$ (回転) となる．$\beta = 1, \theta = \pi$ のとき, (1) は $w = 1/z$ (反転) となるが, 北極と南極を入れ替える変換であることから問題 1 の結果が説明される．(南極は複素平面では原点に対応することに注意.)

また, $\beta = 1, \theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, (1) は $w = i\dfrac{z-i}{z+i}$ となり, 上半平面を単位円の内部に, 単位円内部を下半平面にうつす変換となっている (今日の問題 2)．これは, 球面の $x_2 > 0$ の部分 (半球) が回転により南半球にうつることから, 納得できる．$\beta = i, \theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, (1) は $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ となり, 単位円の内部を「実部正の領域」にうつす変換となっている (H001 問題 7)．これは南半球が回転によりどこにうつるかを考えれば, 納得できる．

年末年始の無理数スペシャル

問題 9. (ボーナス問題：e の無理数性) ネピアの数 e が無理数であることを背理法により証明したい．e が有理数だと仮定すると, 互いに素な (正の) 整数 m, n を用いて, $e = \dfrac{m}{n}$ と書ける．一方, $f(x) := e^x$ の $x = 0$ における n 次までのテーラー展開は以下のようになる:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 剰余項 $R_{n+1}(x)$ を, ある定数 θ $(0<\theta<1)$ を用いて表せ.

(2) 上のテーラー展開において $x=1$ を代入したものを考える:

$$f(1)=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1).$$

$n!R_{n+1}(1)$ は正の整数であることを示せ.

(3) $e<3$ を用いて $n!R_{n+1}(1)$ の上限を評価し, $1\leq n!R_{n+1}(1)$ と合わせて可能な n の範囲を求めよ. またこれと $2<e<3$ を見比べ, 矛盾を導け.

問題 10. (ボーナス問題：π の無理数性) 円周率 π が無理数であることを証明しよう. 自然数 n に対し以下のような実関数を定義する. a_k はもちろん整数である.

$$f_n(x):=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}a_kx^k$$

(1) $f_n^{(l)}(0)$ を, l,n,a_l で表し, すべての l,n に対してそれが整数であることを確かめよ. $f_n(1-x)=f_n(x)$ より $f_n^{(l)}(1)$ も整数である.

(2) π^2 が無理数であることを背理法で証明するため $\pi^2=q/p$ となる互いに素な自然数 p,q が存在するものと仮定する.

$$\begin{aligned}G(x) &:= p^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f_n^{(2k)}(x)\\ &= p^n\left\{\pi^{2n}f_n(x)-\pi^{2n-2}f_n^{(2)}(x)+\pi^{2n-4}f_n^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^nf_n^{(2n)}(x)\right\}\end{aligned}$$

に対して, 次式を示せ.

$$\frac{d}{dx}\left\{G'(x)\sin\pi x-\pi G(x)\cos\pi x\right\}=\pi^2q^nf_n(x)\sin\pi x$$

この両辺を $[0,1]$ で積分することで以下の結果が得られる.

$$I:=\pi\int_0^1 q^nf_n(x)\sin\pi x\,dx=G(0)+G(1)\quad\in\mathbb{Z}$$

(3) 一方, $0<x<1$ における $f_n(x)$ の上限・下限を評価し, $0<I<\dfrac{\pi q^n}{n!}$ を示せ.

これより, 十分大きな n に対して $\dfrac{\pi q^n}{n!}<1$ であるが, 定積分 I の整数性と矛盾する. よって π^2 は無理数であること, すなわち π は無理数であることが示された.

問題 11. (ボーナス問題：Euler-Mascheroni の定数) $a_n:=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ で定義される数列の極限値を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}$ は下に有界であること, および単調減少数列であることを示せ. (これにより 数列 $\{a_n\}$ は収束する.)

(2) この極限値 $\gamma:=\lim_{n\to\infty}a_n=0.5772\cdots$ をオイラーの定数, あるいはオイラー・マスケローニ (Euler-Mascheroni) の定数という. オイラーの定数は無理数か？(未解決問題ですので「取扱注意 (?)」)