担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

# 内積, エルミート行列 (略解)

作成日：December 10, 2022　Updated：December 19, 2022

**問題 1. (目覚まし直交基底)** $\vec{v}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3$ の両辺と $\vec{e}_k$ との内積をとる. $(k=1,2,3)$

(1) $c_k=\dfrac{\langle \vec{e}_k|\vec{v}\rangle}{\langle \vec{e}_k|\vec{e}_k\rangle}$　　(2) $c_k=\langle \vec{e}_k|\vec{v}\rangle$

**問題 2. (2 次のエルミート行列)**

(1) $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b-ic \\ b+ic & d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})\ \middle|\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ と書けることに注意. $W$ の任意の元 は, たとえば以下の 4 つの行列の線形結合で一意に表される. (よってこの 4 つの行列が $W$ の基底であり，実次元は 4.)：

$$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) $i=1,2,3$ として, $\mathrm{Tr}\,\sigma_i=0,\ \sigma_1\sigma_2=i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3=i\sigma_3,\ \sigma_3\sigma_1=i\sigma_2$ などより.

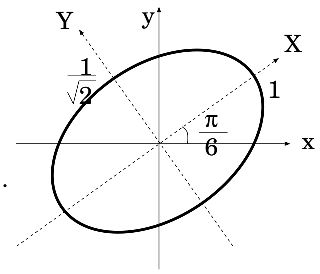
**問題 3. (実対称行列の対角化と 2 次曲線の標準化)**

(1) $E$ を単位行列とすると, $|\lambda E-A|=(\lambda-4)(\lambda-8)=0$ より, $A$ の固有値は $\lambda=4,8$. $\lambda=4$ に属する固有ベクトルは $(4E-A)\vec{v}_1=0$ を解いて, $\vec{v}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ (正規化を行った). 同様に, $\lambda=8$ に属する固有ベクトルは $\vec{v}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ ととれる. (2) の結果より, $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ は正規直交基底である. よって, $P:=(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ とおくと, $P$ は直交行列であり, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

(2) まず 2 次曲線の式の左辺は以下のように (実対称行列を用いて) 書き換えられることに注意する: $5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2=(x,y)\underbrace{\begin{pmatrix}5 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 7\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. ここで $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とおくと, $5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x,y)PP^{-1}APP^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\overset{{}^t({}^tP)=P}{=}{}^t\left({}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)P^{-1}AP\,P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\overset{{}^tP=P^{-1}}{=}{}^t\left(P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)P^{-1}AP\,P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(X,Y)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=4X^2+8Y^2=4$. したがって, $(X,Y)$ 座標でみると, もとの曲線 C は楕円として記述される. 一方,

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6)\\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6)\end{pmatrix}$$

より, $P$ は角度 $\pi/6$ の回転行列である. 曲線 C の概形は右図.



担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**[注意]** 回転の向きに注意しよう．例えば実際，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応しているわけだが，図と合っている．

**[補足]** 直交行列による変換は標準的な内積 (特にベクトルの長さ) を不変に保つため，回転行列か折り返し行列 (あるいはそれらの合成) となる．したがって (1) のように固有ベクトルを正規化して $P$ を直交行列にしておけば，幾何学的意味が捉えやすくなるのである．

**問題 4.** **(2 次曲面の概形)**

(1) (a) は (キ) 平面，(b) は (ア)，(c) は (イ)，(d) は (ウ)，(e) は (キ) 円柱，(f) は (エ)

$z = k$ (一定)，$x = l$ (一定) などの断面を観察するのが重要．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．$A$ は実対称行列である．

$E$ を単位行列とすると，$\det(\lambda E - A) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$ より，$A$ の固有値は $\lambda = -1, 1$. $\lambda = -1$ に属する固有ベクトルは，$(-E-A)\vec{v}_1 = 0$ を解いて，$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (正規化を行った)．$\lambda = 1$(重解) に属する固有ベクトルは，行列 $E - A$ の階数が 1 であることから，$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と 2 つとれる．

$P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ とおくと $P$ は直交行列であり，${}^tP \cdot P = P \cdot {}^tP = E$ が成り立つ．(すなわち，$P^{-1} = {}^tP$.) よってこのとき，$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，曲面 S の式は，

$$\begin{aligned} 2xz + y^2 &= (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)PP^{-1}APP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (X,Y,Z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{aligned}$$

と表される．よって $(X,Y,Z)$ 座標でみると，曲面 S は一葉双曲面：$-X^2+Y^2+Z^2 = 1$ として記述される．$P$ は $zx$ 平面での $\pi/4$ 回転を表すので，$(x,y,z)$ 座標で記述した曲面 S の形も一葉双曲面：(イ)．

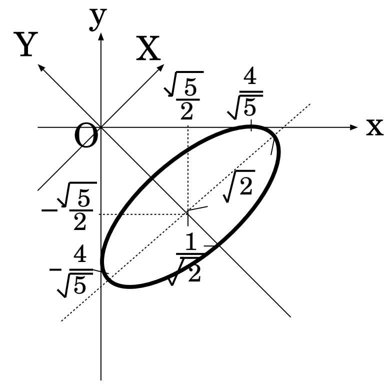
担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 5. (宿題：12 点)**

(1) (6 点) $E$ を単位行列とすると, $|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda-8) = 0$ より, $A$ の固有値は $\lambda = 2, 8$. $\lambda = 2$ に属する固有ベクトルは $(2E - A)\vec{v}_1 = 0$ を解いて, $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (正規化を行った). 同様に, $\lambda = 8$ に属する固有ベクトルは $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ととれる. $P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ とおくと, $P$ は角度 $\frac{\pi}{4}$ の回転を表す直交行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{pmatrix}$ であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$.

(2) (6 点) $(X, Y) = (x, y)P$ とおくと,
$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{5}(x-y) + 16 = 0$
$\Leftrightarrow\ (1/2)X^2 + 2(Y + \sqrt{10}/2)^2 = 1$.
グラフの概形は右図.

($x$ 軸, $y$ 軸と接していることは元の式にそれぞれ $y = 0, x = 0$ を代入すれば分かる.)




**問題 6. (宿題：8 点)**

(1) (2 点) $\langle x^m | x^n \rangle = \int_0^\infty e^{-x} x^{m+n} dx \overset{\text{部分積分}}{=} +(m+n)\int_0^\infty e^{-x}x^{m+n-1}dx = \cdots = (m+n)(m+n-1)\cdots 1 \int_0^\infty e^{-x}dx = (m+n)!$.

(2) (6 点) $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ とおく. (以下答えのみ)

$L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle p_0|p_0\rangle}} \cdot p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot 1$. $\tilde{L}_1(x) := p_1(x) - \langle p_1|L_0\rangle \vec{L}_0 = x - 1$,
$L_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{L}_1|\tilde{L}_1\rangle}}\tilde{L}_1 = x - 1$. $\tilde{L}_2(x) := p_2(x) - \langle p_2|L_0\rangle L_0(x) - \langle p_2|L_1\rangle L_1(x) = x^2 - 4x + 2$, $L_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{L}_2|\tilde{L}_2\rangle}}\tilde{L}_2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$.

**問題 7. (ボーナス問題：6 点)** 例題 3 と同様の手順により以下が求まる：

展開係数：$a_n = \begin{cases} \pi\delta_{n0} & (n : 偶数) \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & (n : 奇数) \end{cases}$, $\quad b_n = 0$.

フーリエ級数：$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \cdots\right)$.

この式に $x = 0$ を代入すると, $f(0) = 0$ より, 以下の等式が得られる：

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

なおこの等式は, $\zeta(2) = \pi^2/6$ と等価である. ($\zeta(2)$ の無限和表示を $n$ が偶数の部分と奇数の部分に分ける.)