担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

条件付き極値問題 (略解)

作成日：December 5, 2022　Updated：December 14, 2022

問題 1.

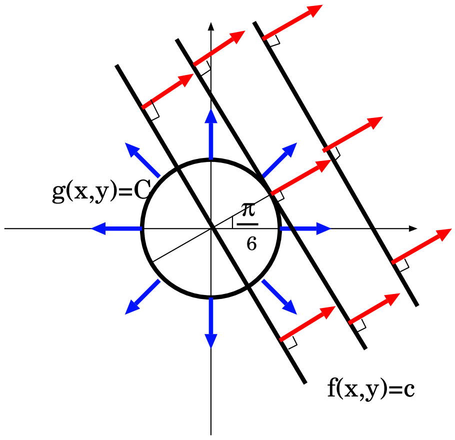
(1) $f_y(x,y)=b$　(2) a は任意, $b\neq 0$　(3) $y=(-a/b)\,x$

問題 2. $f_y(x,y)=2y$ なので, $f_y(-1,0)=0$, $f_y(1,0)=0$.

問題 3.

(1) $y-b=g_x(a)(x-a)$, $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$.　(2) $a^3x+b^3y=1$

問題 4.



(1) 右図の赤色のベクトルが $f(x,y)=c$ の勾配ベクトル $(\mathrm{grad}\ f)(a,b)=(\sqrt{3},1)$ である.

(2) 右図の青色のベクトルが $g(x,y)=C$ の勾配ベクトル $(\mathrm{grad}\ f)(a,b)=2(a,b)$ である.

(3) 等高線と勾配ベクトルは確かに直交している. (厳密には接線の法線ベクトルが勾配ベクトルであることから分かる.)

問題 5.

(1) $f(\cos t,\sin t)=\sqrt{3}\cos t+\sin t=2\sin\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2) f は $t=\dfrac{\pi}{6}$ すなわち $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ のとき極大値 2 を, $t=\dfrac{7\pi}{6}$ すなわち $(x,y)=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ のとき極小値 -2 をとる.

問題 6. $g(x,y)=0$ という条件の下で $f(x,y)$ が極大または極小をとるとき, 2 曲線 $f(x,y)=c$, $g(x,y)=0$ は接するので 2 曲線の勾配ベクトルは平行となる. $f(x,y)=c$ の勾配ベクトル $(\sqrt{3},1)$ は x 軸と角度 $\dfrac{\pi}{6}$ をなすので, 単位円 $(g(x,y)=0)$ 上の点 $\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\cos\dfrac{7\pi}{6},\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ で極大または極小をとることが予想される.

問題 7.

(1) $F(x,y,z,\lambda)=xy+yz+zx-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ とおく. $F_x=y+z-2\lambda x$, $F_y=z+x-2\lambda y$, $F_z=x+y-2\lambda z$ より連立方程式, $F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ を解くと, $(x,y,z,\lambda)=(\pm1/\sqrt{3},\pm1/\sqrt{3},\pm1/\sqrt{3},1)$ (複号同順, このとき $f=1$), または, $(x,y,z,\lambda)=(\alpha,\beta,-\alpha-\beta,-1/2)$ (α,β は $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1/2$ を満たす実数, このとき $f=-1/2$). 次に, 関数 f は連続であり, 与えられた条件 $x^2+y^2+z^2=1$ (有界閉集合) の下で有界である. したがって $x=y=z=\pm1/\sqrt{3}$ のとき最大値 1 をとる.

【別解】平方完成を使う. $(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geq 0$. したがって $1\geq xy+yz+zx$ であり, 求める最大値は 1. (等号成立は $x=y=z=\pm1/\sqrt{3}$ のとき.)

(2) $f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, $g(x,y,z)=ax+by+cz+d$, $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおく．$\sqrt{f}$ が求める距離である．$F_x=2(x-x_0)-a\lambda=0, F_y=2(y-y_0)-b\lambda=0, F_z=2(z-z_0)-c\lambda=0$. $aF_x+bF_y+cF_z=0$ より $\lambda=-\dfrac{2(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$ が得られる．

一方，$\lim_{|\vec{x}|\to\infty} f(x,y,z)=\infty$, $f(x,y,z)\geq 0$ より，関数 f は最小値を持ち，その値は $\left(\dfrac{a\lambda}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b\lambda}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\lambda}{2}\right)^2=\dfrac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{a^2+b^2+c^2}$. したがって求める距離は $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(3) A は実対称行列であり，A の固有値を $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, $(\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3)$ とすると，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0\\0&\alpha_2&0\\0&0&\alpha_3\end{pmatrix}$$

を満たす直交行列 P が存在する (来週証明する予定). $F(x,y,z,\lambda)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$, $(x,y,z)P=(X,Y,Z)$ とおくと

$$\begin{aligned}F(x,y,z,\lambda)&=(x,y,z)\begin{pmatrix}a&d&f\\d&b&e\\f&e&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\lambda((x,y,z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-1)\\&=(X,Y,Z)\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0\\0&\alpha_2&0\\0&0&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-\lambda((X,Y,Z)\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}-1)\\&=\alpha_1X^2+\alpha_2Y^2+\alpha_3Z^2-\lambda(X^2+Y^2+Z^2-1)=:G(X,Y,Z,\lambda).\end{aligned}$$

あとは $G(X,Y,Z,\lambda)$ について (1) と同様の議論を行えばよい (条件は $X^2+Y^2+Z^2=1$ であることに注意).

$G_X=G_Y=G_Z=G_\lambda=0$ を解くと, (i) $(X,Y,Z,\lambda)=(\pm1,0,0,\alpha_1)$ のとき $Q=\alpha_1$, (ii) $(X,Y,Z,\lambda)=(0,\pm1,0,\alpha_2)$ のとき $Q=\alpha_2$, (iii) $(X,Y,Z,\lambda)=(0,0,\pm1,\alpha_3)$ のとき $Q=\alpha_3$. 与えられた条件 $X^2+Y^2+Z^2=1$ (有界閉集合) の下，連続関数 $Q=\alpha_1X^2+\alpha_2Y^2+\alpha_3Z^2$ は有界であり，最大値・最小値を持つ．よって上記の 3 つのうち (i) が最大値, (iii) が最小値を与える．

担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. **(宿題：8 点)**

(1) (3 点) $f_z(a,b,c) = 1 \neq 0$ であり, 陰関数の定理より以下が成り立つ.

$$(g_x(a,b), g_y(a,b)) = \left(-\frac{f_x(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}, -\frac{f_y(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}\right), \quad (c = g(a,b)).$$

これを与えられた接平面の方程式に代入すると以下が得られる.

$$\begin{aligned} & z - c = -\frac{f_x(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}(x-a) - \frac{f_y(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}(y-b) \\ \Leftrightarrow \quad & f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0. \end{aligned}$$

(2) (5 点) 点 (a,b,c) は S 上の点であるから $a^2+ab+b^2+c^2 = 1 \cdots (*)$. 点 (a,b,c) における接平面の方程式は (1) より, $(2a+b)(x-a)+(2b+a)(y-b)+2c(z-c) = 0 \Leftrightarrow (2a+b)x+(2b+a)y+2cz = 2$ ($(*)$ を用いた). この接平面が xy 平面と垂直に交わるのは, 2 つの平面の法線ベクトルが直交するとき. すなわち, $(2a+b, 2b+a, 2c)\cdot(0,0,1) = 0$. よって $c = 0$. これと $(*)$ を合わせると, 求める (a,b,c) は, $c = 0$ かつ $a^2+ab+b^2 = 1$ を満たす点全体.

問題 9. **(宿題：12 点)**

(1) (8 点) $F(x,y,z,\lambda) = x^l y^m z^n - \lambda(x+y+z-a)$ とおく. $F_x = lx^{l-1}y^m z^n - \lambda$, $F_y = mx^l y^{m-1} z^n - \lambda$, $F_z = nx^l y^m z^{n-1} - \lambda$ なので $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ を解くと $xyz = 0$ かつ $\lambda = 0$ (このとき $f = 0$), または,

$$(x,y,z,\lambda) = \left(\frac{al}{l+m+n}, \frac{am}{l+m+n}, \frac{an}{l+m+n}, \left(\frac{a}{l+m+n}\right)^{l+m+n-1} l^l m^m n^n\right)$$

$$f = \left(\frac{a}{l+m+n}\right)^{l+m+n} l^l m^m n^n.$$

与えられた定義域 D は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であり, 関数 f は連続であるので 有界である. また, D の境界 ($x = 0$ または $y = 0$ または $z = 0$) において $f(x,y,z) = 0$ であるから, 関数 f は以下のとき最大値をとる.

$$(x,y,z) = \left(\frac{al}{l+m+n}, \frac{am}{l+m+n}, \frac{an}{l+m+n}\right)$$

(2) (4 点) 条件 $x+2y+3z = 18$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, の下, $f = xyz$ の最大値を求めればよいが, これは (1) において, $l = m = n = 1, a = 18$ とし, $y \mapsto 2y$, $z \mapsto 3z$ と置き換えた問題に等しい. よって,

$$(x, 2y, 3z) = \left(\frac{18}{3}, \frac{18}{3}, \frac{18}{3}\right)$$

のとき最大値をとる.

したがって P さんは, コアラのマーチを 6 個, たけのこの里 (あるいはきのこの山) を 3 個, 筒入りアポロを 2 個買えば幸福度マックスである.

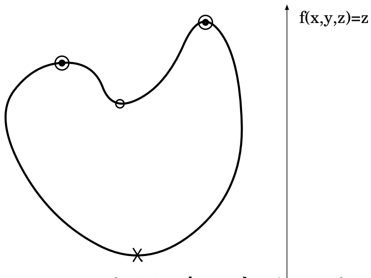
担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10. (ボーナス問題：8 点)

(1) (2 点) $F(x,y,z,\lambda) := z - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ として未定乗数法で最大値・最小値を求めればよい．北極点 $N(0,0,1)$ が極大 (最大) 値を与え，南極点 $S(0,0,-1)$ が極小 (最小) 値を与える．これら 2 点が臨界点である．(以下図中の臨界点の記号として，$\odot$：指数 2 の臨界点，$\circ$：指数 1 の臨界点，$\times$：指数 0 の臨界点，とする．)

(2) (1 点) 臨界点における指数の定義より，北極点 $N(0,0,1)$ における指数は 2，南極点 $S(0,0,-1)$ 指数は 0 であるから，$\chi = 1-0+1 = 2$.

(3) (1 点) 例えば球面を右図のように変形しても $\chi = 1-1+2 = 2$ と χ の値は変わらない．臨界点は χ の値を変えないように対になって生成，消滅するからである．



(4) (1 点) 例えば正四面体だと $v_0 - v_1 + v_2 = 4-6+4 = 2$. これに辺を書き加えても，点，辺，面の数も変化しちょうど $v_0 - v_1 + v_2 = 2$ の値を不変に保っていることが観察される．(各自数えて観察してみよう．)

(5) (3 点) 図 1 より $\chi = 1-2+1 = 0$. これを例えば図 2 のように変形しても $\chi = 2-4+2 = 0$ と χ は不変．またトーラスを多面体として書き表し，$v_0 - v_1 + v_2$ の値をまじめに数えるとやはり 0 となる．(ただし 5 円玉のように穴のあいた面は描いてはいけない．) 辺を書き加える考察は球面のときと同じ．

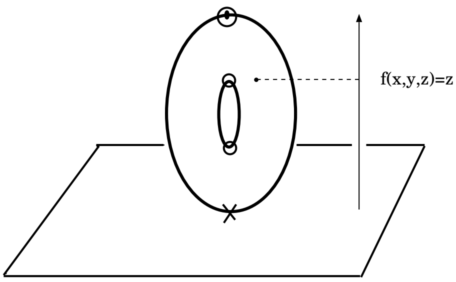


図 1: トーラスと臨界点

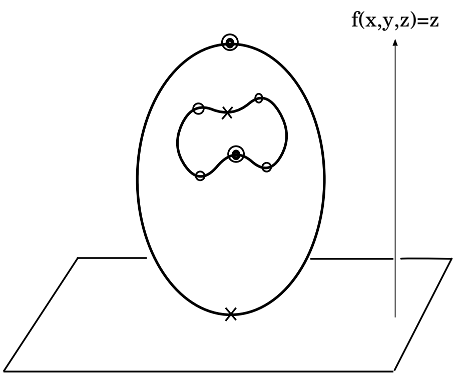


図 2: トーラスの連続変形例