担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

# 条件付き極値問題 (2022 年 12 月 8 日)

作成日：December 5, 2022　Updated：December 7, 2022　実施日：December 8, 2012

## 陰関数定理 I

以下の 2 問は，陰関数の定理を感覚的に理解するためのものである．

**問題 1. (目覚まし陰関数定理)** $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=a\,x+b\,y$ ($a,b$ は実数定数) を考える．

(1) $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) 方程式 $f(x,y)=0$ が $y$ について解ける ($y=g(x)$ の形で書ける) ための $a,b$ の条件を求めよ．

(3) $a,b$ が上の条件を満たすとき, 方程式 $f(x,y)=0$ を $y$ について解け.

一般に $f(x,y)=0$ で定義される $\mathbb{R}^2$ の図形は $x$ の 1 つの関数 $y=g(x)$ のグラフにはなっていない．例えば, $f(x,y)=x^2+y^2-1$ の場合, 方程式 $f(x,y)=0$ が定める円 $C$ を考える．$f(x,y)=0$ を $y$ に関して解くと

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

となるので, 円 $C$ は 2 つの関数のグラフの和集合になっている．また, 2 点 $(-1,0),(1,0)$ の開近傍においては, 円 $C$ はいかなる $x$ の関数のグラフにもなり得ない．

**問題 2. (目覚まし陰関数定理)** 関数 $f(x,y)=x^2+y^2-1$ に対して $(x,y)=(-1,0),(1,0)$ における $f_y$ を求めよ．

**陰関数定理** $C^1$ 級関数 $f(x,y)$ に対して, 方程式 $f(x,y)=0$ は

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$$

のとき, $(a,b)$ の十分小さい近傍 $U$ 上で $y$ に関して解ける．すなわち, ある関数 $y=g(x)$ が存在して, $f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=g(x)$. またこのとき, $g(x)$ も $C^1$ 級で,

$$g_x(x)=-\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}.$$

**問題 3. (陰関数の定理と接線の方程式)**

(1) $f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=g(x)$ で表される曲線上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ における接線の方程式を $g$ の言葉で表し, 陰関数の定理を用いて $f$ の言葉で書き直せ．($f_y(a,b)\neq 0$ とする.)

(2) (1) で示された $f$ を用いた接線の式は, 実は一般に曲線上の任意の点で成立する．
$x^4+y^4=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ における接線の方程式を求めよ．

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

### 条件つき極値問題, ラグランジュの未定乗数法

以下の 3 問は, ラグランジュの未定乗数法を感覚的に理解するためのものである.

**問題 4.** 次を実行せよ.

(1) $f(x,y) = \sqrt{3}x + y$ とする. $xy$ 平面において, 等高線 $f(x,y) = c$ ($c$ は定数) をなるべく沢山描け. また, なるべく多くの点 $(a,b)$ に対して, $(a,b)$ を始点とする勾配ベクトル $(\mathrm{grad}\ f)(a,b) := (f_x(a,b), f_y(a,b))$ を描け.

(2) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ について (1) と同様のことをせよ.

(3) (1), (2) の各々の場合に, 等高線と勾配ベクトルが直交していることを観察せよ.

**問題 5.**

$$\begin{cases} f(x,y) = \sqrt{3}x + y, \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

とする. $g(x,y) = 0$ という条件のもとで, 関数 $f(x,y)$ の極値を次のように求めよ.

(1) 条件 $g(x,y) = 0$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ を定め, これは $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ とパラメータ表示できる. これを用いて, 点 $(x(t), y(t))$ における関数 $f$ の値を $t$ の関数で表せ.

(2) 上のことから, 条件 $g(x,y) = 0$ のもとでの $f(x,y)$ の極大値, 極小値を求めよ.

**問題 6.** 問題 5 で求めた極値をとる座標 $(a,b)$ において, 2 つのベクトル $(\mathrm{grad}\, f)(a,b)$ と $(\mathrm{grad}\, g)(a,b)$ は平行であることを確認せよ. また, 問題 4 より問題 5 の答えが想像できるか?

**(ラグランジュの未定乗数法)** 2 つの関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が与えられたとする. $f(x,y)$ が条件 $g(x,y) = 0$ のもとで点 $(a,b)$ で極値をとり, かつ $(\mathrm{grad}\ g)(a,b) \neq \vec{0}$ であるならば, 2 つのベクトル $(\mathrm{grad}\ f)(a,b)$ と $(\mathrm{grad}\ g)(a,b)$ は平行である. すなわち, ある実数 $\lambda$ が存在して

$$(f_x(a,b), f_y(a,b)) = \lambda\,(g_x(a,b), g_y(a,b)) \tag{$*$}$$

が成り立つ.

したがって, 条件付き極値問題を考えるときは, まず $(*)$ と $g(a,b) = 0$ の連立方程式を $(a,b,\lambda)$ について解き, 次に, 点 $(a,b)$ で $f(x,y)$ が極大か, 極小か, どちらでもないかを吟味すればよい. まとめると, 次のようになる:

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

条件 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ の下で, 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の極値を求めるには,

(1) 別の変数 $\lambda$ を用意して以下のようにおく.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda\, g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(2) 連立方程式,

$$F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0 \ \ (i = 1, \dots, n)、\quad F_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0$$

を $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$ について解く. ($F_{x_i} = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ が条件 $(*)$ の $n$ 変数版に相当する. $F_\lambda = 0$ は, 条件 $g = 0$ に他ならない.)

(3) (2) の連立方程式の解 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で $f$ が極大か, 極小か, どちらでもないかを判定する. 具体的には, (2) の解が孤立点かどうか, $f$ の値が条件 $g = 0$ の下で有界かどうかを確認する. 例えば, 条件 $g = 0$ が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合を与え, $f$ が連続, かつ (2) の連立方程式の解が 2 つ

$$(x_1, \dots, x_n, \lambda) = (a_1, \dots, a_n, \lambda_1),\ (b_1, \dots, b_n, \lambda_2)$$

しかないとする. このとき, $f$ の値は有界なので, $f(a_1, \dots, a_n)$ と $f(b_1, \dots, b_n)$ のうち, 大きい方が極大値, 小さい方が極小値である.

ここからさらに最大値, 最小値の問題を考える場合には, 次のようにすればよい：

条件 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (と境界条件) の下で, 関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の最大値, 最小値を求めるには,

(4) 最大値 (最小値) を求めるときは, 与えられた条件の下で $f$ の値が上に有界 (下に有界) であることを確認する. (例えば $f$ が連続で $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ が有界閉集合なら, $f$ の値は必ず有界である.)

(5) 上記 (2) の連立方程式の解 $(x_1, \dots, x_n)$ での $f$ の値と境界 (あれば) での $f$ の値を比較する.

**例題 1.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき $f(x, y, z) = x + y + 2z$ の最大値・最小値を求めよ.

**【解答】** $F(x, y, z, \lambda) = (x + y + 2z) - \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ とおく. $F_x = 1 - 2\lambda x, F_y = 1 - 2\lambda y, F_z = 2 - 2\lambda z$ であるので, 連立方程式, $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ を解くと, $(x, y, z, \lambda) = (\pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6}, \pm 2/\sqrt{6}, \pm\sqrt{6}/2)$(複号同順).

一方, 関数 $f$ は連続であり, 与えられた条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合を与えるので, $f$ は最大値・最小値を持つ. すなわち, $(x, y, z) = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ で最大値 $\sqrt{6}$, $(x, y, z) = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ で最小値 $-\sqrt{6}$ をとる.

**問題 7. (条件つき極値問題, 最大値・最小値の問題)**

(1) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき, $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ の最大値を求めよ.

(2) (点と平面の距離) ラグランジュの未定乗数法を用いて, 平面 $\pi$: $ax+by+cz+d=0$ と点 $P(x_0,y_0,z_0)$ の距離を表す公式を求めよ.

(3) (2 次形式への応用) 2 次形式 $Q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx$ の単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上の最大値 (最小値) は, 対応する実対称行列

$$A=\begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$$

の最大固有値 (最小固有値) に等しいことを示せ. (実対称行列は直交行列を用いて対角化できることを認めてよい. また簡単のため 3 つの固有値は $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$ を満たすとしてよい.)

## 今週の宿題・中間復習問題・ボーナス問題 (提出期限はすべて 12 月 11 日です)

**問題 8. (中間復習問題)** 中間試験で解けなかった問題を配点 5 点分解け. (最大 5 点分として中間試験の得点に加えます. 3 点分解いたなら 3 点加算します. 5 点分以上解いても構いませんが, 最大 5 点分しか加算されません.)

陰関数の定理は多変数の場合にも同様で, 以下の様になる. これを踏まえて次の問題に答えよ.

**陰関数定理 I の多変数版**

$C^1$ 級関数 $f(x_1,\ldots,x_n,y)$ の定める $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の図形 $S$ を

$$S=\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid f(x_1,\ldots,x_n,y)=0\}$$

とする. $S$ 上の点 P (つまり $f(\mathrm{P})=0$) において

$$f_y(\mathrm{P})\neq 0$$

であるとき, $S$ は P の十分小さい開近傍 $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$ で, ある関数 $y=g(x_1,\ldots,x_n)$ のグラフになっている (言い換えると, 方程式 $f(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ が $U$ の範囲では $y$ について解ける). さらに, $f(x_1,\ldots,x_n,y)$ が $C^r$ 級 ($r\geq 1$) ならば $g(x_1,\ldots,x_n)$ も $C^r$ 級で,

$$\mathrm{grad}\, g := (g_{x_1},\ldots,g_{x_n}) = -\frac{1}{f_y}(f_{x_1},\ldots,f_{x_n}).$$

担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 9. (宿題)**

(1) H002 例題 1 で，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $z = g(x,y)$ の点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ における接平面の方程式が以下のように与えられることを示した：

$$z - c = g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b).$$

$f(x,y,z) = z - g(x,y)$ とおき, 陰関数の定理を適用することで, 接平面の方程式が $f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c) = 0$ となることを示せ.

(2) (1) で示された $f$ を用いた接平面の式は, 実は一般に曲面上の任意の点で成立する.

方程式 $x^2 + xy + y^2 + z^2 - 1 = 0$ が定める図形 $S \subset \mathbb{R}^3$ の, 点 $(a,b,c) \in S$ における接平面を求めよ. また, その接平面が $xy$ 平面と垂直に交わるような点 $(a,b,c)$ をすべて求めよ.

**問題 10. (宿題：効用関数)**

(1) $x, y, z \geq 0$, $x + y + z = a$ (定数) のとき, $f(x,y,z) = x^l y^m z^n$ を最大にする $x, y, z$ の値を求めよ. ($l, m, n$ は正の定数. 条件式が定義する領域の境界における $f$ の値も求めよ.)

(2) 甘いものが大好きな P さんが 18 ドル持っていて, 1 ドルのコアラのマーチを $x$ 個, 2 ドルのたけのこの里を $y$ 個, 3 ドルの筒入りアポロを $z$ 個買おうと思っている. この買い物で P さんが最も幸せを感じるのは積 $xyz$ が最大になるときであるとする。このとき P さんはコアラのマーチ, たけのこの里, 筒入りアポロをそれぞれいくつ買うべきか. (買い物などでどれだけの満足が得られるかを表す関数のことを効用関数と呼ぶ. なお, たけのこの里はきのこの山に置き換えても構わない.)

**問題 11. (ボーナス問題：モース関数)**

条件 $x^2+y^2+z^2=1$ の下での $f(x,y,z)=z$ の極値問題を考えよう．これは現代幾何学の話題 (特にトポロジー) と深い関連がある．

関数 $f$ は, 2 次元球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 上の関数 $f:\ S^2\to\mathbb{R}$ と考えることができ, 特にその $z$ 座標の値を示す関数であるから, 高さ関数と呼ばれる．

(1) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき $f(x,y,z)=z$ の極値を求めよ．

$f_x=0, f_y=0$ となる球面上の点を臨界点と呼ぶ．臨界点を 2 次元球面に図示せよ．

(2) 各臨界点における指数 (index) を以下のように定義する．

$z$ の正の方向に図形を水につけていったときに球面の表面に出来る水の流れが図 1 のように特異な振る舞いをするところで指数を図 1 の通り定義する．(水の音が「ぴちゃっ」と鳴るところの指数が 2, 「とっぷん」と鳴るところが指数 1, 「こぽっ」と鳴るところが指数 0 である.) この特異な点はちょうど $f(x,y,z)$ の臨界点に対応する．指数 $k$ の臨界点の個数を $m_k$ と書くとき, 次の量を計算せよ．

$$\chi(S^2)=m_0-m_1+m_2$$

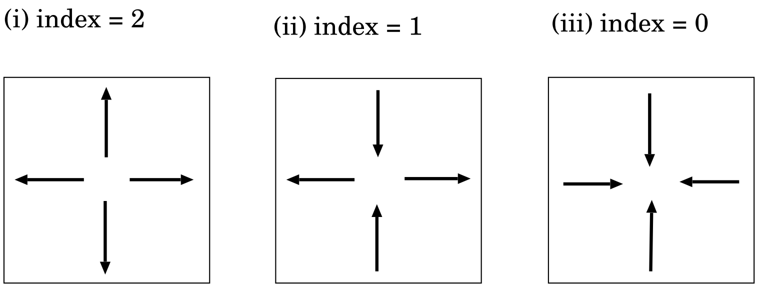


図 1: 臨界点における指数の定義

(3) 球面がゴム膜からできているとし, それを (破らないように) 適当に連続変形したとき, いかなる変形を行おうとも $\chi(S^2)$ の値は変わらないことをいくつかの例で図示して説明せよ．

(4) (ゴム膜) 球面は適当に連続変形すると多面体になる．多面体の頂点の数を $v_0$, 辺の数を $v_1$, 面の数を $v_2$ とおき, $v_0-v_1+v_2$ をいくつかの正多面体に対して計算せよ．これが $\chi(S^2)$ に等しいことを確認し, 点や辺をさらに手で増やしても $\chi(S^2)$ の値は不変であることを図で説明せよ．(点を増やした場合は，多面体となるように辺で近接頂点と結ばなければならない.)

(5) 2 次元トーラス (ドーナツの表面) の上の関数 $f(x,y,z)=z$ に関しても (2)〜(4) と同様の考察を行い, $\chi=v_0-v_1+v_2=m_0-m_1+m_2$ が成り立つことを示せ．(実は $\chi(T^2)=0$.) またこの値はトーラスの連続変形で変わらないことを図で説明せよ．(ドーナツは立てて考察するとよい．なお (4) の考察を行う際, トーラス上に描かれた各多角形はすべて 1 点に可縮なものとすること (穴の空いた多角形は禁止). )