担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

開集合・閉集合, 距離空間 (略解)

作成日：November 20, 2022　Updated：November 27, 2022

問題 1. (開集合の判定)

(1) 開集合である. 任意の $x \in (a,b)$ に対して $0 < \varepsilon < \min\{x-a, b-x\}$ となる ε がとれる. このとき, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$, ゆえに開集合である.

(2) 開集合ではない. もし開集合であるとすると, $0 \in [0,1)$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset [0,1)$ とできる. ところが, $a = -\dfrac{\varepsilon}{2}$ とおくと, $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ではあるが $a \notin [0,1)$ となり矛盾.

(3) 開集合ではない. $\sqrt{2}$ が有理数ではないことを使って示す. もし開集合であるとすると, $0 \in \mathbb{Q}$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$ とできる. ところが, アルキメデスの原理より $\dfrac{\sqrt{2}}{N} \in B(0,\varepsilon)$ となる自然数 N がとれるが, これは有理数ではないので矛盾.

(4) 開集合である. $a \in A$ に対して a を含む O_n をとる. O_n は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(a,\varepsilon) \subset O_n$ とできる. $O_n \subset A$ であるから $B(a,\varepsilon) \subset A$.

(5) 開集合ではない. まず 0 は全ての O_n に含まれるから $0 \in A$. もし開集合であるとすると, $0 \in A$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(0,\varepsilon) \subset A$ とできる. ところがここで $\dfrac{\varepsilon}{m} \in B(0,\varepsilon)$ となる自然数 m がとれるが, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{m}$ となる自然数 n に対しては $\dfrac{\varepsilon}{m} \notin O_n$ となり矛盾.

問題 2. (閉集合の判定)

(1) 閉集合である. A^c の点 x を任意にとる. $x \notin A$ であるので $\min_{a\in A}|x-a| > \varepsilon > 0$ となる ε がとれて, $B(x,\varepsilon) \in A^c$ がいえる. すなわち A^c は開集合であり, A は閉集合である.

(2) 閉集合ではない. もし閉集合であるとすると, $0 \in A^c$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(0,\varepsilon) \subset A^c$, 則ち, $B(0,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ とできる. ところが, $(\frac{1}{2}\min\{\varepsilon, 1\}, 0) \in B(0,\varepsilon) \cap A$ が存在するので矛盾.

(3) 閉集合である. A^c の点 x を任意にとる. このとき $0 < \varepsilon < |d(x,0) - 1|$ を満たす ε がとれて, $B(x,\varepsilon) \subset A^c$ が成り立つ.

(4) 閉集合ではない. 任意の F_n は原点 0 を含まない. よって $0 \in A^c$. ここで原点のある ε 近傍が A^c に含まれたとする. $0 \neq b \in B(0,\varepsilon)$ をとると $d(b,0) \neq 0$ であるから十分大きな N に対しては $\dfrac{1}{N} < d(b,0)$ となる. よって $b \in F_N \subset A$ となり矛盾.

(5) 閉集合である. $x \in A^c$ を任意にとる. このとき, ある F_n に対しては $x \notin F_n$ が成り立つ. よって $d(x,0) < 1 - \dfrac{1}{n}$ または $1 < d(x,0)$. $d(x,0) < 1 - \dfrac{1}{n}$ のときは $\varepsilon = 1 - \dfrac{1}{n} - d(x,0)$ とおくと, $B(x,\varepsilon) \subset F_n^c$. $1 < d(x,0)$ のときは $\varepsilon = d(x,0) - 1$ とおくと, $B(x,\varepsilon) \subset F_n^c$.

問題 3. (閉包・内部)

問題 1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
内部 A°	A	$(0,1)$	$\emptyset$	$(0,1)$	$\emptyset$
閉包 $\overline{A}$	$[a,b]$	$[0,1]$	$\mathbb{R}$	$[0,1]$	$\{0\}$

問題 2	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
内部 A°	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<d(0,x)<1\}$	$\emptyset$
閉包 $\overline{A}$	A	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0, 0\le x\le 1\}$	A	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d(0,x)\le 1\}$	A

問題 4. (距離関数) 正定値性と対称性は定義より明らか. 三角不等式が成り立つかどうか確認する. $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ とする.

(1) 距離関数である.

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= |x_1-z_1|+|x_2-z_2| \\ &= |x_1-y_1+y_1-z_1|+|x_2-y_2+y_2-z_2| \\ &\le |x_1-y_1|+|y_1-z_1|+|x_2-y_2|+|y_2-z_2| \\ &= (|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)+(|y_1-z_1|+|y_2-z_2|) \\ &= d_1(x,y)+d_1(y,z). \end{aligned}$$

(2) 距離関数ではない. 実際 $p=(0,0), q=(\frac{1}{2},0), r=(1,0)$ に対して, $\widetilde{d}_2(p,r)=1$, $\widetilde{d}_2(p,q)=\widetilde{d}_2(q,r)=\frac{1}{4}$ であるから, $\widetilde{d}_2(p,r)>\widetilde{d}_2(p,q)+\widetilde{d}_2(q,r)$.

問題 5. (距離空間)

(1) $x\ge 0$ において, $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}\ge 0$ より, 関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ は単調増加である. よって, $u\le s+t$ となる 0 以上の実数 u,s,t に対し, $f(u)=\dfrac{u}{1+u}\le f(s+t)=\dfrac{s+t}{1+s+t}$.

(2) 0 以上の実数 s,t に対し, $\dfrac{s}{1+s}+\dfrac{t}{1+t}-\dfrac{s+t}{1+s+t}=\dfrac{st(s+t+2)}{(1+s)(1+t)(1+s+t)}\ge 0$.

(3) $d(x,y)$ は距離関数であるから, $x,y,z\in X$ に対して, $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)\ge 0$ が成り立つ. $s:=d(x,y), t:=d(y,z), u:=d(x,z)$ とおくと, (1), (2) の結果より,

$$\begin{aligned} d'(x,y)+d'(y,z) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}=\frac{s}{1+s}+\frac{t}{1+t} \\ &\ge \frac{s+t}{1+s+t}\ge\frac{u}{1+u}=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}=d'(x,z). \end{aligned}$$

問題 6. (連続写像) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ を考えると, これは明らかに連続関数である. よって $S=f^{-1}(\{1\})$ は閉集合である.

問題 7. (連続写像) 任意の Z の開集合 O に対して, g が連続であることより $g^{-1}(O)$ は開集合であり, f が連続であることより, $f^{-1}(g^{-1}(O))$ も開集合である. よって $(g\circ f)^{-1}(O)=f^{-1}(g^{-1}(O))$ は開集合となる. したがって連続写像の定義より, $g\circ f$ は連続写像である.

問題 8. (線形代数群) $\det: M(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ は多項式なので, 連続関数である. ここで, $GL(n,\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $SL(n,\mathbb{R})=\det^{-1}(\{1\})$ と表されるので, $GL(n,\mathbb{R})$ は開集合, $SL(n,\mathbb{R})$ は閉集合であることがわかる.

担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. (宿題：12 点) (開集合 2 点、閉集合 2 点、内部 1 点、閉包 1 点)

番号	部分集合 A	開集合か	閉集合か	内部 A°	閉包 $\bar{A}$
(1)	$\bigcup_{n=2}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n})$	YES	NO	$(0,1)$ (A も正解とする)	$[0,1]$
(2)	$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\frac{1}{n})$	NO	NO	$(0,1)$	$[0,1]$

(1) 開集合である. $a \in A$ に対して a を含む O_n をとる. O_n は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(a,\varepsilon) \subset O_n$ とできる． $O_n \subset A$ であるから $B(a,\varepsilon) \subset A$.

閉集合でない．もし閉集合であるとすると，$0 \in A^c$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(0,\varepsilon) \subset A^c$, すなわち，$B(0,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ とできる．ところが, $(\frac{1}{2}\min\{\varepsilon,1\},0) \in B(0,\varepsilon) \cap A$ が存在するので矛盾.

(2) 開集合でない．まず 1 は全ての O_n に含まれるから $1 \in A$. もし開集合であるとすると，$1 \in A$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(1,\varepsilon) \subset A$ とできる．このとき $1+\frac{\varepsilon}{2} \in B(1,\varepsilon)$ であるが，アルキメデスの原理より，正の数 $\varepsilon, 2$ に対して $n\varepsilon > 2$ ($\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$) を満たす自然数 n が存在する．よって $1+\frac{\varepsilon}{2} \notin O_n$ となり矛盾.

閉集合でない．もし閉集合であるとすると，$0 \in A^c$ に対してある $\varepsilon > 0$ がとれて $B(0,\varepsilon) \subset A^c$, すなわち，$B(0,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ とできる．ところが, $(\frac{1}{2}\min\{\varepsilon,1\},0) \in B(0,\varepsilon) \cap A$ が存在するので矛盾．((1) と同じで愚問でした...)

問題 10. (宿題：8 点)

(1) (4 点) 閉区間 $I = [0,1]$ で定義された実数値連続関数全体を $\mathcal{F}$ と書く.

任意の $f,g \in \mathcal{F}$ に対して, $|f(x)-g(x)| \geq 0$ より, $d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \geq 0$ が成り立つ. また, $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g \cdots (*)$ より正定値性が成り立つ.

任意の $f,g \in \mathcal{F}$ に対して, $d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx = \int_0^1 |g(x)-f(x)|dx = d(g,f)$ より, 対称性が成り立つ.

任意の $f,g,h \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \int_0^1 |f(x)-h(x)|dx = \int_0^1 |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|dx \\ &\leq \int_0^1 (|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|)dx = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx + \int_0^1 |g(x)-h(x)|dx \\ &= d(f,g)+d(g,h) \end{aligned}$$

より, 三角不等式も成り立つ. よって関数 d は距離関数である.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

[**コメント**] 正定値性の $(*)$ に関して, $d(f,g)=0 \Rightarrow f=g$ は自明ではありませんが, 本問では問わないことにします. 証明は例えば以下の通りです.

対偶命題の $f \neq g \Rightarrow d(f,g)>0$ を示す. $h(x):=|f(x)-g(x)|$ とおく. $h(x)\geq 0$ である. $f\neq g$ とすると, $h(a)>0$ となる $a\in[0,1]$ が存在する. このとき $h(a)-\varepsilon>0$ を満たす正の数 ε がとれる. 一方, 関数 h は点 a において連続であるから, (この) 正の数 ε に対しある正の数 δ が存在して, $|x-a|<\delta \Rightarrow |h(x)-h(a)|<\varepsilon$. ここで, $|h(x)-h(a)|<\varepsilon \Leftrightarrow h(a)-\varepsilon<h(x)<h(a)+\varepsilon$ より, $|x-a|<\delta$ を満たす x に対して, $0<h(a)-\varepsilon<h(x)$ が成り立つ. よって, $d(f,g)=\int_0^1 h(x)dx > 2\delta(h(a)-\varepsilon)>0$.

(2) (4 点) 求める軌跡を与える方程式は $|p|+|q|=1\cdots(*)$. この方程式は, 変換 $p\to -p$, $q\to -q$ に対して不変であるから, 第 1 象限だけ考えればよい. $p>0, q>0$ のとき $(*)$ は $p+q=1$ となる. したがって求める軌跡は次図のようになる.