担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

開集合・閉集合, 距離空間 (2022年11月24日)

作成日：November 17, 2022　Updated：November 24, 2022　実施日：November 24, 2022

開集合・閉集合

定義 1. $X = \mathbb{R}^n$ とおく. X の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ の間の距離を次で定義する：

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

また点 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ の ε 近傍を次で定義する：

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

このとき, 部分集合 $A \subset X$ は次の条件を満たすとき開集合であるという.

- 任意の $a \in A$ に対し, ある正の数 ε が存在して, $B(a, \varepsilon) \subset A$ が成り立つ.

空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合だと約束し, 開集合とみなす.
また, 部分集合 $F \subset X$ はその補集合 F^c が開集合であるとき閉集合であるという.

問題 1. (開集合の判定) $X = \mathbb{R}$ とおく. 次の各部分集合 A は X の開集合かどうか判定せよ.

(1) $A = (a, b),\ a < b.$

(2) $A = [0, 1)$

(3) $A = \mathbb{Q}$

(4) $O_n = (\frac{1}{n}, 1)$ とおいたとき $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$

(5) $O_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ とおいたとき $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$

問題 2. (閉集合の判定) $X = \mathbb{R}^2$ とおく. 次の各部分集合 A は X の閉集合かどうか判定せよ.

(1) $A = \{(x, y) \in X \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

(2) $A = \{(x, y) \in X \mid y = 0, 0 < x < 1\}$

(3) $A = \{x \in X \mid d(0, x) = 1\}$

(4) $F_n = \{x \in X \mid \frac{1}{n} \leq d(0, x) \leq 1\}$ とおいたとき $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

(5) $F_n = \{x \in X \mid 1 - \frac{1}{n} \leq d(0, x) \leq 1\}$ とおいたとき $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

内点, 触点, 内部, 閉包

定義 2. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし, $a \in \mathbb{R}^n$ とする.

- ある ε 近傍 $B(a;\varepsilon)$ が存在して $B(a;\varepsilon) \subset A$ となるとき, a を A の内点と呼ぶ. A の内点全体の集合を A° と書き, A の内部とよぶ. A° は開集合である.
- 任意の ε 近傍 $B(a;\varepsilon)$ に対して $B(a;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となるとき, a を A の触点と呼ぶ. A の触点全体の集合を $\overline{A}$ と書き, A の閉包とよぶ. $\overline{A}$ は閉集合である.

問題 3. (閉包・内部) 問題 1,2 の各集合 A の内部 A° および閉包 $\overline{A}$ を求めよ. (証明は不要.)

距離関数, 距離空間

定義 3. X を集合とする. 関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が与えられ, 次の 3 つの条件を満たすとする：

(1) (**正定値性**) $\forall x, y \in X$ に対し, $d(x,y) \geq 0$. また, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) (**対称性**) $\forall x, y \in X$ に対し, $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) (**三角不等式**) $\forall x, y, z \in X$ に対し, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

このとき d を X 上の距離関数といい, (X,d) (あるいは単に X) を距離空間という.

問題 4. (距離関数) 以下の関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto d(x,y)$ が距離関数であるかどうか調べよ. (ただし $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$.)

(1) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

(2) $\widetilde{d}_2(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$

問題 5. (距離空間) (X,d) を距離空間とする. このとき X 上の 2 点 x, y に対し,

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

で関数 d' を定義すると, (X,d') は再び距離空間となることを示したい. 正定値性 $d(x,y) \geq 0$ (等号成立は $x = y$ のときのみ) と対称性 $d'(x,y) = d'(y,x)$ は自明であるから, 三角不等式を示す. ((1), (2) が解けなくても, (3) だけ解いて構わない.)

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ を利用して, $u \leq s + t$ となる 0 以上の実数 u, s, t に対し, $\dfrac{u}{1+u} \leq \dfrac{s+t}{1+s+t}$ が成り立つことを示せ.

(2) 0 以上の実数 s, t に対し, $\dfrac{s+t}{1+s+t} \leq \dfrac{s}{1+s} + \dfrac{t}{1+t}$ を示せ.

(3) (1), (2) の結果を用いて三角不等式 $d'(x,y) + d'(y,z) \geq d'(x,z)$ を示せ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

連続写像

定義 4. (連続写像の $\varepsilon-\delta$ 論法的定義) 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が点 $a\in\mathbb{R}^n$ において連続であるとは次が成り立つことである.

$$^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists\delta>0,\quad \text{s.t.}\quad f(B(a,\delta))\subset B(f(a),\varepsilon)$$

定理 1. $X=\mathbb{R}^n,\ Y=\mathbb{R}^m$ とおく．写像 $f:X\to Y$ が X の各点において連続であることと，次のおのおのは同値である.

- Y の任意の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ は開集合である.
- Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ は閉集合である.

同値であるのでこちらを定義にすることができる. このように定義を抽象的に与えた恩恵を以下でみる. (初等関数が連続関数であることは用いてよい.)

問題 6. (連続写像) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ が閉集合であることを示せ.

問題 7. (連続写像) $X=\mathbb{R}^l,Y=\mathbb{R}^m,Z=\mathbb{R}^n$ とする. $f:X\to Y,g:Y\to Z$ がともに連続写像ならば，$g\circ f$ も連続写像であることを示せ.

定義 5. (線形代数群) $M(n,\mathbb{R})$ を実数係数の n 次正方行列のなす集合とする. この部分集合 $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$ をそれぞれ次で定義する.

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R}) &:= \{g\in M(n,\mathbb{R})\mid \det g\neq 0\} \\ SL(n,\mathbb{R}) &:= \{g\in M(n,\mathbb{R})\mid \det g=1\} \end{aligned}$$

$M(n,\mathbb{R})$ は成分を対応させることによって自然に $\mathbb{R}^{n^2}$ と 1 対 1 に対応させることができる．この対応によって $M(n,\mathbb{R})$ 上に開集合を定義する.

問題 8. (線形代数群) $M(n,\mathbb{R})$ の部分集合 $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$ はそれぞれ $M(n,\mathbb{R})$ の開集合か閉集合か判定せよ. (ヒント：det は $\mathbb{R}$ への連続写像であることを使う.)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題 (提出期限は 11 月 27 日 (日) です)

問題 9. (宿題) $X=\mathbb{R}$ とおく．次の各部分集合 A は X の開集合かどうか, 閉集合かどうか判定せよ (こちらは証明を与えよ)．また A の内部 A° および閉包 $\overline{A}$ をそれぞれ求めよ (こちらは答えのみでよい.)

(1) $O_n=(0,1-\dfrac{1}{n})$ とおいたとき $A=\displaystyle\bigcup_{n=2}^{\infty}O_n$

(2) $O_n=(0,1+\dfrac{1}{n})$ とおいたとき $A=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$

問題 10. (宿題)

(1) f,g を閉区間 $I=[0,1]$ で定義された実数値連続関数とする．以下の関数 d が距離関数であることを示せ: $d(f,g)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-g(x)|dx.$

(2) 問題 4 (1) の距離関数 d_1 に関して, 原点からの距離が 1 であるような点 $p=(p,q)$ の軌跡を図示せよ．

[**来週 12 月 1 日 (木) の中間試験について**]

- 9 時半から 11 時半の 120 分．ノートや配布プリントは持ち込み不可です．(スマホなど通信機能のある時計類も持ち込み不可．飲料は持ち込み可)
- 試験範囲は, 10 月 13 日 (H001), 10 月 20 日 (H002), 10 月 27 日 (H003), 11 月 10 日 (H004), 11 月 17 日 (H005), 10 月 24 日 (H006) 実施の 6 回分です．(ただしボーナス問題は試験範囲外.)
- **当日受験できない方, 受験できなくなった方はできるだけ早く担当教員に連絡をしてください．**(追試などの対応措置をとります.) 感染症対策や防寒対策などは各自しっかりと取るようお願いします．当日体調が優れない場合は遠慮なく欠席してください．
- なお 11 月 29 日 (火) は木曜日の振替授業日ですが, オンラインで「中間試験予想問題模擬試験」を行います．その問題と解答・解説については 11 月 26・27 日頃に作成してリソースに掲載する予定です．ですので 29 日は大学にお越しいただく必要もありませんし, その時間の予定を空けていただく必要もありません．各自 (お好きな時間にお好きな場所で) 解いてください (そして各自採点してください)．ちゃんと取り組んだ答案であれば採点結果に関わらずこの日の平常点の満点を付けます．詳細はまた「お知らせ」に掲載します．