担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

略解 (ジョルダン標準形, 広義固有空間分解)

作成日：November 06, 2022　Updated：November 21, 2022　Version：1.0

問題 1. (目覚まし対角化) A の固有多項式は $\det(\lambda E - A) = (\lambda-1)(\lambda-a)(\lambda+a)$ なので, $a \neq 0, \pm 1$ のときは固有値がすべて異なり, A は対角化可能である. 以下 $a = 0, \pm 1$ の各場合について重複度 2 の固有値に対する 1 次独立な固有ベクトルの個数を調べ, 対角化可能であるかどうか吟味する.

(i) $a = 1$ の場合を考える. このとき $\lambda = 1$ が重複度 2 の固有値となる.

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

なので, 固有値 1 に対して 1 次独立な 2 つの固有ベクトル

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとることができる. 一方, 固有値 -1 に対する固有ベクトルとして

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

をとることができて, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は一次独立である. ゆえに $a = 1$ の場合 A は 対角化可能である.

(ii) $a = -1$ の場合を考える. このときも $\lambda = 1$ が重複度 2 の固有値となるが,

$$A - E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の階数は 2 なので, 固有値 1 に対して一次独立な固有ベクトルを 2 つとることが出来ない. ゆえに, $a = -1$ の場合 A は対角化可能ではない.

(iii) $a = 0$ の場合を考える. この場合 $\lambda = 0$ が重複度 2 の固有値となるが,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の階数は 2 なので, 固有値 0 に対して一次独立な固有ベクトルを 2 つとることが出来ない. ゆえに, $a = 0$ の場合 A は対角化可能ではない.

以上をまとめると, 求める a は $0, -1$ 以外の任意の実数である.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. (目覚ましジョルダン) 固有方程式はすべて $f_A(x)=(x-2)^4$. 詳しくは黒板で解説. 答えは以下の通り (P は一意ではない)：

(1) $P=(\vec{e}_4, \vec{e}_3+2\vec{e}_4, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1), P^{-1}AP=J(2,4)$ (固有空間の次元は 1, 最小多項式は $\varphi_A(x)=(x-2)^4$)

(2) $P=(\vec{e}_2-\vec{e}_3, 2\vec{e}_4, \vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1), P^{-1}AP=J(2,1)\oplus J(2,3)$ (固有空間の次元は 2, 最小多項式は $\varphi_A(x)=(x-2)^3$)

(3) $P=(\vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_3), P^{-1}AP=J(2,2)\oplus J(2,2)$ (固有空間の次元は 2, 最小多項式は $\varphi_A(x)=(x-2)^2$)

[**補足**] (1), (2) は先週の問題 10 の設定に帰着. (3) は固有空間の次元が 2 であるから, 固有ベクトルが 2 つしか取れない. 一方 $(A-\lambda E)^1\vec{w}$ は固有ベクトルであるから, 先週の問題 10 のように考えると $\vec{v}$ が 1 つしか取れず, $\vec{v}, (A-\lambda E)^1\vec{w}, \vec{w}$ は 4 次元空間を張らない. このような状況では実は w を 2 つ取ることができて, $(A-\lambda E)^1\vec{w}_1, \vec{w}_1, (A-\lambda E)^1\vec{w}_2, \vec{w}_2$ が 4 次元空間を張る. (これを P とおけば上記のジョルダン標準形が得られる.)

問題 3.

(1) $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ は基底であるので, $\mathbb{R}^2$ の任意の元は $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ の一次結合 $c_1\vec{f}_1+c_2\vec{f}_2$ $(c_1, c_2\in\mathbb{R})$ で表される. したがって $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\vec{f}_1+\mathbb{R}\vec{f}_2$.

(2) $\mathbb{R}\vec{f}_1\cap\mathbb{R}\vec{f}_2$ の任意の元 $\vec{x}$ は, 適当な実数 α, β によって $\vec{x}=\alpha\vec{f}_1=\beta\vec{f}_2$ と表される. このとき, $\alpha\vec{f}_1-\beta\vec{f}_2=\vec{0}$ であるが, $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ は一次独立であるので $\alpha=\beta=0$, つまり $\vec{x}=\vec{0}$. したがって $\mathbb{R}\vec{f}_1\cap\mathbb{R}\vec{f}_2=\{\vec{0}\}$ である.

問題 4. 必ずしも成り立たない. **(反例)** $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}\vec{e}_1$, $H=\mathbb{R}\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の標準基底), $L=\mathbb{R}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$ の場合, $V=W\oplus H$, $W\cap L=\{\vec{0}\}$ であるが, $L\not\subset H$ である.

問題 5. 任意の元 $\vec{x}\in W_1\cap W_2$ に対して, $\vec{x}=\vec{0}$ を示す. 実際, $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}=\lambda_1\vec{x}-\lambda_2\vec{x}=A\vec{x}-A\vec{x}=\vec{0}$ であり, $\lambda_1\neq\lambda_2$ より $\vec{x}=\vec{0}$ である. したがって W_1+W_2 は直和である.

問題 6. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) を示す. (1) $\Rightarrow$ (2): $W+H$ の元 $\vec{x}$ について $\vec{x}=\vec{w}+\vec{h}=\vec{w}'+\vec{h}'$ $(\vec{w}, \vec{w}'\in W, \vec{h}, \vec{h}'\in H)$ であるとすると, $\vec{w}-\vec{w}'=\vec{h}'-\vec{h}$ が成り立つ. この等式の左辺は W の元, 右辺は H の元なので両辺はともに $W\cap H$ の元であり, 条件 (1) より両辺 $=\vec{0}$. したがって $\vec{w}=\vec{w}'$, $\vec{h}=\vec{h}'$ となり (2) が成り立つ. (2) $\Rightarrow$ (3): 条件 (2) の '表示の一意性' から従う. (3) $\Rightarrow$ (1): $\vec{x}$ を $W\cap H$ の任意の元とすると, $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ に条件 (3) を適用して $\vec{x}=\vec{0}$. したがって, 条件 (1) が成り立つ.

問題 7. 条件 (1) は, 基底の定義により, 条件

$$\begin{cases} V \text{ の任意の元が } \vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_n \text{ の } (K \text{ 上の}) \text{ 一次結合で表され, かつ} \\ \vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_n \text{ が一次独立である} \end{cases}$$

に他ならない. この条件は, 次の条件

$$\begin{cases} V=K\vec{f}_1+\cdots+K\vec{f}_n, \text{ かつ} \\ \vec{v}_i\in K\vec{f}_i\ (i=1,\ldots,n) \text{ に対して, } \vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_n=\vec{0} \text{ ならば } \vec{v}_i=\vec{0}\ (i=1,\ldots,n), \end{cases}$$

すなわち, 条件 (2) と同値である. したがって, 条件 (1) と条件 (2) は同値である.

担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. W_1 の基底を $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_s\}$, W_2 の基底を $\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_t\}$ とする. W_1+W_2 が直和なので $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_s,\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_t$ は一次独立. $W_1\oplus W_2=\mathbb{C}^n$ なので $s+t=n$ かつ $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_s,\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_t\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である. よって $P=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_s,\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_t)$ (縦ベクトルを横に並べた行列) は n 次の正則行列で, さらに, $A\,\vec{e}_j=\lambda_1\,\vec{e}_j$ $(j=1,\dots,s)$, $A\,\vec{f}_j=\lambda_1\,\vec{f}_j$ $(j=1,\dots,t)$ より

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1\,E_s & O\\ O & \lambda_2\,E_t\end{pmatrix}$$

$(E_s,\,E_t$ は各々, s 次, t 次の単位行列) となる. P が正則なので, A は対角化可能である.

問題 9.

(1) $x^3-6\,x^2+9\,x-4=(x-1)^2(x-4)$.

(2) $(x-1)^2=(x+2)(x-4)+9$ より, $p(x)=1/9$, $q(x)=-(x+2)/9$. (これは一例.)

(3) $A_1+A_2=E$ は文字の恒等式 $p(x)\,(x-1)^2+q(x)\,(x-4)=1$ に行列 A を代入することから従う. $A_1\,A_2=O$ は, A の多項式で表されるような行列同士が交換可能であることと, ケーリー・ハミルトンの定理 $(A-E)^2(A-4E)=O$ からしたがう.

(4) 任意の $\vec{x}\in\mathbb{C}^3$ に対して, $\vec{x}=E\,\vec{x}=A_1\,\vec{x}+A_2\,\vec{x}$ であるので, $\mathbb{C}^3=W_1+W_2$ である. $W_1\cap W_2=\{\vec{0}\}$ を示そう. $\vec{x}$ を $W_1\cap W_2$ の任意の元とすると, 適当な $\vec{v}_1\in\mathbb{C}^3$, $\vec{v}_2\in\mathbb{C}^3$ によって $\vec{x}=A_1\,\vec{v}_1=A_2\,\vec{v}_2$ と表されるので, $\vec{x}=E\,\vec{x}=A_1\,\vec{x}+A_2\,\vec{x}=A_1(A_2\,\vec{v}_2)+A_2(A_1\,\vec{v}_1)=\vec{0}$. よって, $W_1\cap W_2=\{\vec{0}\}$ なので, $\mathbb{C}^3=W_1+W_2=W_1\oplus W_2$.

【注】$W_1\subset\widetilde{W}(4)$, $W_2\subset\widetilde{W}(1)$ はすぐに分かる. 問題 5 と同様の議論より $\widetilde{W}(4)\cap\widetilde{W}(1)=\{\vec{0}\}$. これと $\mathbb{C}^3=W_1\oplus W_2$ より, $W_1=\widetilde{W}(4)$, $W_2=\widetilde{W}(1)$ が分かる.

問題 10. $\vec{x}$ を $\widetilde{W}(\lambda_i)$ の任意の元とすると, 適当な $\ell>0$ に対して $(A-\lambda_i\,E)^\ell\vec{x}=\vec{0}$ であるので, $(A-\lambda_i\,E)^\ell A\,\vec{x}=A(A-\lambda_i\,E)^\ell\vec{x}=\vec{0}$, すなわち, $A\,\vec{x}\in\widetilde{W}(\lambda_i)$. したがって $A(\widetilde{W}(\lambda_i))\subset\widetilde{W}(\lambda_i)$ である.

問題 11. $A\,\vec{e}_j\in W_1$ $(j=1,\dots,s)$, $A\,\vec{f}_j\in W_2$ $(j=1,\dots,t)$ なので

$$\begin{aligned}A\,\vec{e}_j&=b_{1j}\,\vec{e}_1+\cdots+b_{sj}\,\vec{e}_s && (j=1,\dots,s),\\ A\,\vec{f}_j&=c_{1j}\,\vec{f}_1+\cdots+c_{tj}\,\vec{f}_t && (j=1,\dots,t)\end{aligned}$$

$(b_{ij},c_{ij}\in\mathbb{C})$ と表せる. したがって $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le s}$, $C=(c_{ij})_{1\le i,j\le t}$ とおくと,

$$AP=P\begin{pmatrix}B & O\\ O & C\end{pmatrix}$$

となる. したがって $P^{-1}AP$ は題意の形の行列である.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 12. (ジョルダン標準化) 固有多項式は $f_A(x) = x^3(x-3)$. 固有値 3 の重複度は 1 であるので. 固有空間 $W(3)$ と広義固有空間 $\widetilde{W}(3)$ は一致する. $(A-3E)\vec{v} = \vec{0}$ より固有ベクトルが求まり

$$W(3) = \widetilde{W}(3) = \langle \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

固有値 0 の固有空間は, rank $(A-0E)$ の階数が 3 より, 1 次元である. よってジョルダン標準形は $J(3,1) \oplus J(0,3)$ であり, 最小多項式は固有多項式と一致する.

一方, 固有値 0 の広義固有空間は Ker A^3 に等しい. (問題 12 直前のコメント参照)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 0 & -9 \\ -10 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 0 & -27 \\ -27 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

より, $\widetilde{W}(0) = \mathrm{Ker}\ A^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 - x_4 = 0\}$.

$A^2\vec{w} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{w} \in \mathrm{Ker}\ A^3$ を満たすベクトルとして $\vec{w} = \vec{e}_2$ がとれる. このとき, $A\vec{w} = \vec{e}_3$, $A^2\vec{w} = (1, 1, -2, 1)^t$. 上記のジョルダン標準形に対して, P はこれを以下のように並べたものとして得られる: $P = (\vec{v}, A^2\vec{w}, A\vec{w}, \vec{w})$.

[コメント] $A^2\vec{w}, A\vec{w}, \vec{w}$ が広義固有空間 $\widetilde{W}(0) = \mathrm{Ker}\ A^3$ を張ってますので, $\vec{w} \in \mathrm{Ker}\ A^3$ (あるいは $\vec{u} := A^2\vec{w} \in \mathrm{Ker}\ A$) が条件として必要です. (謹んでお詫び申し上げます...)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 13. (宿題：10 点)

固有多項式は $f_A(x)=(x-2)^4$ である．固有空間の次元を求めるため，$A-2E$ を基本変形すると

$$A-2E\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-2&1\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

固有値 2 の固有空間は $\mathrm{Ker}(A-2E)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{C}^4\mid x_2=0,2x_3-x_4=0\}$ であり，2 次元である．一方

$$A-2E=\begin{pmatrix}0&-2&-4&2\\0&0&-2&1\\0&-1&-2&1\\0&-2&-4&2\end{pmatrix},\quad (A-2E)^2=\begin{pmatrix}0&0&4&-2\\0&0&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&4&-2\end{pmatrix},\quad (A-2E)^3=O,$$

より，最小多項式は $\varphi_A(x)=(x-2)^3$．したがって (H004 問題 10 の設定と等しく) ジョルダン標準形は $J(2,1)\oplus J(2,3)$ である．

$(A-2E)^2\vec{w}\neq\vec{0}$ を満たすベクトルとして $\vec{w}=\vec{e}_4$ がとれる．このとき，$(A-2E)\vec{w}=(2,1,1,2)^t$，$(A-2E)^2\vec{w}=(-2,0,-1,-2)^t$．最後のベクトル $(A-2E)^2\vec{w}$ は $A-2E$ の固有ベクトルであり，これとは独立な固有ベクトルとして，$\vec{v}=\vec{e}_1$ がとれる．(すなわち $\mathrm{Ker}(A-2E)=\langle\vec{v},(A-2E)^2\vec{w}\rangle$.) P はこれを以下のように並べたものとして得られる:

$$P=(\vec{v},A^2\vec{w},A\vec{w},\vec{w})=\begin{pmatrix}1&-2&2&0\\0&0&1&0\\0&-1&1&0\\0&-2&2&1\end{pmatrix}.$$ (すなわち $P^{-1}AP=J(2,1)\oplus J(2,3)$.)

問題 14. (宿題：10 点)

(1) (1 点) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-8&5\end{pmatrix}$.

(2) (6 点) 固有多項式は $f_A(x)=(x-1)(x-2)^2$．固有値 1 の重複度は 1 であるので．固有空間 $W(1)$ と広義固有空間 $\widetilde{W}(1)$ は一致する．$(A-E)\vec{v}=\vec{0}$ より固有ベクトルが求まり，

$$W(1)=\widetilde{W}(1)=\langle\vec{v}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

固有値 2 の固有空間は，rank $(A-2E)$ の階数が 2 より，1 次元である．よってジョルダン標準形は $J(1,1)\oplus J(2,2)$ である．

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

一方, 固有値 2 の広義固有空間は Ker $(A-2E)^2$ に等しい. (問題 12 直前のコメント参照)

$$(A-2E)^2=\begin{pmatrix}4&-4&1\\4&-4&1\\4&-4&1\end{pmatrix},$$

より, $\widetilde{W}(2)=\mathrm{Ker}\ (A-2E)^2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{C}^4\mid 4x_1-4x_2+x_3=0\}$. $(A-2E)\vec{w}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{w}\in\mathrm{Ker}\ (A-2E)^2$ を満たすベクトルとして $\vec{w}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ がとれる. このとき, $(A-2E)\vec{w}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2-4\vec{e}_3$. 上記のジョルダン標準形に対して, P はこれを以下のように並べたものとして得られる: $P=(\vec{v},A\vec{w},\vec{w})=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-2&1\\1&-4&0\end{pmatrix}$.

[コメント] 固有空間 $W(2)$ =Ker $(A-2E)$ の固有ベクトル $\vec{u}$ を 1 つ求めてから $\vec{u}=A\vec{w}$ を満たす $\vec{w}$ を決めた方が本問では楽かもしれない.

(3) (2 点) $P^{-1}AP=J(1,1)\oplus J(2,2)$ より, $P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP=(J(1,1)\oplus J(2,2))^n$.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}4&-4&1\\1&-1&0\\-2&3&-1\end{pmatrix},\quad (J(1,1)\oplus J(2,2))^n\overset{\text{H004 問題 13}}{=}\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix},$$

より,

$$\begin{aligned}A^n&=P(J(1,1)\oplus J(2,2))^nP^{-1}\\&=\begin{pmatrix}4+(n-3)2^n&-4+(8-3n)2^{n-1}&1+(n-2)2^{n-1}\\4+(n-2)2^{n+1}&-4+(5-3n)2^n&1+(n-1)2^n\\4+(n-1)2^{n+2}&-4+(2-3n)2^{n+1}&1+n2^{n+1}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

(4) (1 点) $\vec{v}_{n+1}=A^n\vec{v}_0$ の第 1 成分より $a_n=6+(2n-5)2^n$.

問題 15. (ボーナス問題：10 点)

(1) (a) (2 点) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ であるから,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)$$

を示せばよい. $\omega^3=1,\omega^2+\omega+1=0$ に注意すると, $(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2+(\omega^2+\omega)\alpha\beta+(\omega^2+\omega)\beta\gamma+\omega^2(\omega^2+1)\gamma\alpha=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$.

(b) (2 点) (1) の恒等式において, $\alpha=x$ とおくと,

$$(x+\beta+\gamma)(x+\omega\beta+\omega^2\gamma)(x+\omega^2\beta+\omega\gamma)=x^3-3\beta\gamma x+\beta^3+\gamma^3.$$

これが $f(x)=x^3+3px+4q$ に等しいので $\beta^3+\gamma^3=4q$, $\beta\gamma=-p$.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(c) (2 点) $\beta^3\gamma^3 = -p^3$ であるから, β^3 と γ^3 は t についての 2 次方程式 $t^2-4qt-p^3=0$ の解である.

(2) (a) (2 点) 与式の右辺を展開して整理すると,

$$f(x) = x^4 - 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2 + 8\alpha\beta\gamma x + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 4(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2).$$

これが $f(x) = x^4+px^2+qx+r$ に等しいので $p = -2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, $q = 8\alpha\beta\gamma$, $r = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 4(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$.

(b) (2 点) 前問の結果より，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -(1/2)p$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2 = q^2/64$, $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = (1/4)\{(p^2/4)-r\}$ が得られる．一方，$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ を解として持つ 3 次方程式は,

$$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2) = 0,$$

である．左辺を展開し，上記の関係式を代入すると，求める方程式は以下の通りとなる．

$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4} - r\right)x - \frac{q^2}{64} = 0.$$

[**コメント**] 他にもさまざまな解法が知られている. 興味がある人は自分でいろいろと調べてみるとよい. 例えば以下の本にいくつかの例が詳しく紹介されている：

- [今野] 今野一宏「代数方程式のはなし」(内田老鶴圃)
- [永田・吉田] 永田雅宜, 吉田憲一「代数学入門」(培風館)
- [一松] 一松 信「複素数と複素数平面」(森北出版)

なお著者の永田さん (ごく最近お亡くなりになられました) は名大理学部数学科を卒業され, 不変式論, 可換環論の分野で著しい成果を挙げられた大数学者です. 永田さんのドキュメンタリーがインターネットで配信されており，お薦めです (約 30 分です)：

- サイエンスチャンネル 科学の殿堂 (5)

  「数学の巨人 永田雅宜 〜ひたむきに歩き続けた人生〜」

  https://scienceportal.jst.go.jp/gateway/sciencechannel/i050607005/