担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ジョルダン標準形, 広義固有空間分解 (2022 年 11 月 17 日)

作成日：November 06, 2022　Updated：November 16, 2022　Version：1.0　実施日：November 17, 2022

問題 1. (目覚まし対角化) 次の行列が対角化可能であるような実数 a をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

問題 2. (目覚ましジョルダン) 次の行列 A に対し, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような行列 P および, $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

なお, 複素数 λ と自然数 m に対して, 次のような m 次正方行列 $J(\lambda, m)$ を λ に対する m 次ジョルダン細胞, ジョルダン・ブロックなどと呼ぶ.

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}$$

直和

定義 1. K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. K 上の線形空間 V の線形部分空間 W, H についてその和 $W+H$ を次で定義する.

$$W + H = \{\vec{w} + \vec{h} \in V \mid \vec{w} \in W,\ \vec{h} \in H\}.$$

$W+H$ は再び V の線形部分空間となる. 更に, 次の条件を満たすとき, この和を直和とよび, $W \oplus H$ と表す：

$$W \cap H = \{\vec{0}\}.$$

以下, K 上の線形空間を単に線形空間, 線形部分空間を単に部分空間とよぶ.
([**注**] $W+H$ と和集合 $W \cup H$ を混同してはいけない.)

$\mathbb{R}^2$ の標準基底を $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ とし, $\vec{e}_i$ で生成される部分空間を $\mathbb{R}\,\vec{e}_i$ で表すと, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,\vec{e}_1 \oplus \mathbb{R}\,\vec{e}_2$ である.

問題 3. $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とする. このとき, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,\vec{f}_1 \oplus \mathbb{R}\,\vec{f}_2$ であることを, 次の 2 つのことをチェックすることにより示せ.

(1) $\mathbb{R}^2$ は $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ で張られている, すなわち, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,\vec{f}_1 + \mathbb{R}\,\vec{f}_2$.

(2) 上の和は直和である, すなわち, $\mathbb{R}\,\vec{f}_1 \cap \mathbb{R}\,\vec{f}_2 = \{\vec{0}\}$.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 線形空間 V が $V = W \oplus H$ のように部分空間の直和で表せるとし, V の部分空間 L が $W \cap L = \{\vec{0}\}$ を満たしていたとする. このとき $L \subset H$ は常に成り立つか? 必ずしも成り立たないのであれば反例を挙げよ.

問題 5. 行列 A が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持ったとする. $W_1, W_2 \subset K^n$ をそれぞれ固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間とする. このとき, 和 $W_1 + W_2$ は直和であることを示せ.

3 つ以上の部分空間に対して直和の概念を定義するために, まず次の問題を考えよう.

問題 6. 線形空間 V の 2 つの部分空間 W, H に対し, 次の 3 つの条件が互いに同値であることを示せ.

(1) $W \cap H = \{\vec{0}\}$ である, つまり $W + H$ は直和である.

(2) 任意の $W + H$ の元 $\vec{x}$ に対して, $\vec{x} = \vec{w} + \vec{h}$ $(\vec{w} \in W,\ \vec{h} \in H)$ という表し方が一通りだけである.

(3) $\vec{w} \in W,\ \vec{h} \in H$ に対して, $\vec{w} + \vec{h} = \vec{0}$ ならば $\vec{w} = \vec{0}$ かつ $\vec{h} = \vec{0}$ である.

定義 2. K 上の線形空間 V の K 線形部分空間 V_i の和 $V_1 + \cdots + V_r$ が次の同値な条件のいずれかを満たすとき, この和を直和とよび, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ と記す.

(1) 任意の $V_1 + \cdots + V_r$ のベクトル $\vec{x}$ に対して $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_r$ $(\vec{v}_i \in V_i,\ i = 1, \ldots, r)$ という表し方が一通りだけである.

(2) $\vec{v}_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ に対して, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_r = \vec{0}$ ならば $\vec{v}_i = \vec{0}$ $(i = 1, \ldots, r)$ である.

問題 7. V を K 上の n 次元線形空間とするとき, 次の 2 つの条件は同値であることを示せ：

(1) $\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_n \in V$ は V の基底をなす.　　(2) $V = K\vec{f}_1 \oplus \cdots \oplus K\vec{f}_n$

直和分解と対角化

以下, 線形空間は $\mathbb{C}$ 上とし, 行列はすべて複素行列とする.

問題 8. ちょうど 2 つの異なる固有値 λ_1, λ_2 のみをもつ n 次正方行列 A を考える. λ_1, λ_2 に対応する固有空間をそれぞれ $W_1, W_2 \subset \mathbb{C}^n$ とする. 問題 5 より和 $W_1 + W_2$ は直和である. $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^n$ のとき行列 A は対角化可能であることを示せ.

n 次正方行列が対角化可能であることと, n 個の一次独立な固有ベクトルを持つことは同値であるが, これを言いかえると次のようになる：

定理 1. n 次複素正方行列 A の固有値 λ の固有空間を

$$W(\lambda) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

とおく. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を互いに異なる A のすべての固有値とするとき,

$$A \text{が対角化可能} \Leftrightarrow \mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r).$$

対角化可能ではない行列に対してはこのような $\mathbb{C}^n$ の固有空間分解は得られない. しかし, 固有空間の概念を拡張した広義固有空間の概念を導入すると同様な分解が得られる.

広義固有空間分解

定理 2. n 次正方行列 A の固有値 λ の広義固有空間を

$$\widetilde{W}(\lambda) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \exists \ell > 0, (A - \lambda E)^\ell \vec{x} = \vec{0}\}$$

とおく. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を互いに異なる A のすべての固有値とするとき, つねに

$$\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r)$$

が成り立つ. これを n 次正方行列 A に関する $\mathbb{C}^n$ の広義固有空間分解と呼ぶ.

この定理の証明には多項式論が使われる. 次の問題を解くと参考になるかもしれない.

問題 9. 次の 3×3 行列 A について以下の問いに答えよ：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) 多項式 $(x-1)^2$ と $x-4$ に対して, 以下の恒等式を満たす多項式 $p(x), q(x)$ を求めよ.

$$p(x)\,(x-1)^2 + q(x)\,(x-4) = 1$$

(3) 行列 A を各多項式に代入して $A_1 = p(A)\,(A-E)^2$, $A_2 = q(A)\,(A-4E)$ とおくと, $A_1 + A_2 = E$, $A_1 A_2 = O$ が成り立つことを示せ.

(4) $W_1 = A_1(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{C}^3$, $W_2 = A_2(\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{C}^3$ とおくと $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$. が成り立つことを示せ. (実は $W_1 = \widetilde{W}(4)$, $W_2 = \widetilde{W}(1)$ である. 解答の【注】参照.)

問題 10. n 次正方行列 A の広義固有空間分解 $\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r)$ に対して $A(\widetilde{W}(\lambda_i)) \subset \widetilde{W}(\lambda_i)$ が成り立つこと, すなわち, 各固有値の広義固有空間は A 不変な部分空間であることを示せ.

次の問題は広義固有空間分解が基底変換による行列の簡略化 (=ジョルダン標準形の理論) において重要であること示唆している：

問題 11. A を n 次正方行列とする. $\mathbb{C}^n$ が部分空間 W_1, W_2 によって $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2$ と表されて, かつ

$$A(W_1) \subset W_1, \qquad A(W_2) \subset W_2$$

が成り立っているとする. $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s\}$ を W_1 の基底, $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_t\}$ を W_2 の基底とし (このとき, $s + t = n$ かつ $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_t\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である), n 次正則行列 P を $P = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_s, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_t)$ で定めると, $P^{-1}AP$ は以下の形になることを示せ.

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

最小多項式は固有多項式を割り切る．最小多項式が $\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r}$ であるとき, 広義固有空間は以下のように書ける：

$$\widetilde{W}(\lambda_i) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda_i E)^{m_i}\vec{x} = \vec{0}\}$$

問題 12. (ジョルダン標準化) 次の行列 A に対し, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような行列 P および, $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

今週の宿題・ボーナス問題 (提出期限はともに 11 月 20 日 (日) です)

問題 13. (宿題) 次の行列 A に対し, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような行列 P および, $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

問題 14. (宿題) 次の漸化式を考える：

$$a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2$$

(1) $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ を用いて漸化式を $\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n$ の形に表すとき行列 A を求めよ.

(2) A のジョルダン標準形を求めよ.

(3) A^n を求めよ. (必要であれば H004 宿題 13(1) の結果を用いてよい.)

(4) これを利用して一般項 a_n を求めよ.

問題 15. (ボーナス問題：高次方程式の解法)

n 次方程式の一般解の研究には長い歴史があり, 現代数学の発展にも深く関係している. 複素数係数の n 次方程式は一般に

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \\ &\quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0) \end{aligned}$$

と表されるが, 両辺を a_0 で割ることで最高次の係数を 1 にすることができ, また, $x \mapsto x - \dfrac{1}{n}\dfrac{a_1}{a_0}$ の置き換えで x^{n-1} の係数を 0 にすることができる. したがって以後

$$f(x) = x^n + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

の形のものを考えることにしよう.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(1) 次の形の 3 次方程式を考える.

$$f(x) = x^3 + 3px + 4q = 0, \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

(a) 下準備として以下の恒等式を示せ. (ただし, ω は 1 の 3 乗根のうち虚部が正のものを表す.)

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma)$$

(b) 3 次式 $f(x)$ が以下のように因数分解できたと仮定する.

$$f(x) = (x + \beta + \gamma)(x + \omega\beta + \omega^2\gamma)(x + \omega^2\beta + \omega\gamma)$$

x の各べきの係数を比較することで, $\beta^3 + \gamma^3$ および $\beta\gamma$ を p, q を用いて表せ.

(c) β^3 と γ^3 はある 2 次方程式の解である. その 2 次方程式を書き下せ.

以上のようにして, 3 次方程式を解く問題が 2 次方程式を解く問題に帰着され, 2 次方程式の解の 3 乗根をとることで β, γ が求まり, $x = -\beta - \gamma, -\omega\beta - \omega^2\gamma, -\omega^2\beta - \omega\gamma$ として 3 次方程式の解が得られる.

(2) 次の形の 4 次方程式を考える.

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0, \quad (p, q, r \in \mathbb{C})$$

(a) 前問同様, $f(x)$ が以下のように因数分解できたと仮定して, p, q, r を α, β, γ の式として具体的に書き下せ.

$$f(x) = (x + \alpha + \beta + \gamma)(x + \alpha - \beta - \gamma)(x - \alpha + \beta - \gamma)(x - \alpha - \beta + \gamma)$$

(b) 3 次方程式の解と係数の関係を考察することで, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ が ある 3 次方程式の解であることが分かる. その 3 次方程式を (p, q, r を用いて) 書き下せ.

こうして, 4 次方程式を解く問題が 3 次方程式を解く問題に帰着され, 前問の解法を利用して 4 次方程式の解が求まる.