担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

略解 (ジョルダン標準形序論)

作成日：November 06, 2022　Updated：November 17, 2022

問題 1. (目覚ましフィボナッチ)

(1) 与えられた漸化式より $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ が成り立つ．よって $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) E を単位行列として, $|\lambda E - A| = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ を解くと,

$$\lambda = \lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

であり, これが A の固有値である．λ_+ と λ_- に属する固有ベクトルはそれぞれ, (たとえば) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}$ と $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}$ である．(解と係数の関係：$\lambda_+ + \lambda_- = 1, \lambda_+\lambda_- = -1$ に注意.) したがって, $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ ととれば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = B$ となる．

$B^n = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{ 個}} = P^{-1}A^nP$ より

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_+^{n-1} - \lambda_-^{n-1} & \lambda_+^n - \lambda_-^n \\ \lambda_+^n - \lambda_-^n & \lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1} \end{pmatrix}.$$

(3) $\vec{v}_n = A\vec{v}_{n-1} = A^2\vec{v}_{n-2} = \cdots = A^n\vec{v}_0$ の第一成分より,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

なおこの一般項の式をビネ (Binet) の公式という．

[補足 1] A^n を具体的に計算することなく a_n を求める方法もある：まず, $\vec{v}_0$ を固有ベクトル $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ (上記解答のもの) の 1 次結合で表すと, $\vec{v}_0 = (2\sqrt{5})^{-1}\lambda_+\vec{v}_1 - (2\sqrt{5})^{-1}\lambda_-\vec{v}_2$ となることがわかる．よって

$$\vec{v}_n = A^n\vec{v}_0 = A^n((2\sqrt{5})^{-1}\lambda_+\vec{v}_1 - (2\sqrt{5})^{-1}\lambda_-\vec{v}_2) = (2\sqrt{5})^{-1}(\lambda_+\lambda_+^n\vec{v}_1 - \lambda_-\lambda_-^n\vec{v}_2).$$

[補足 2] 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_+ = 1.618\cdots$ を黄金比 (Golden ratio) といい, フィボナッチ数列とともに自然現象 (特に生物学) と不思議な深い関わりがある．解説書も最近たくさん出版されており, 興味ある人は読んでみると面白いと思う．

問題 2. (目覚ましジョルダン)

(1) 固有値 λ に対する固有ベクトルを $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ とすると, $A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2$ より, $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (A\vec{v}_1, A\vec{v}_2) = (\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2) = \lambda(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \cdots (*)$. ここでベクトルの組 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は一次独立であるから, $P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ は逆行列を持つ．$(*)$ の両辺に右から P^{-1} をかけると, $A = \lambda E$.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $k\vec{u}+l\vec{w}=\vec{0}$ の両辺に左から $A-\lambda E$ を作用させると, $k\vec{0}+l(A-\lambda E)\vec{w}=l\vec{u}=\vec{0}$. よって $l=0$. よって $k\vec{u}=\vec{0}$ より $k=0$.

(3) $(A-\lambda E)(\vec{u},\vec{w})=(\vec{0},\vec{u})=(\vec{u},\vec{w})\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

問題 3. $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A^4=O$.
固有多項式は $x^4=O$. また $A\vec{e_1}=\vec{0}$, $A\vec{e_2}=\vec{e}_1$, $A\vec{e_3}=\vec{e}_2$, $A\vec{e_4}=\vec{e}_3$. (つまり $\vec{e}_3=A\vec{e_4}$, $\vec{e}_2=A^2\vec{e_4}$, $\vec{e}_1=A^3\vec{e_4}$ である. これを念頭において問題 7, 8 を考えるとよい.)

問題 4. (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4) を示す. (2) $\Rightarrow$ (1) は明らか. (4) $\Rightarrow$ (3) は固有多項式の因数分解された形から明らか. (3) $\Rightarrow$ (2) はハミルトン・ケーリーの定理から従う. 最後に (1) $\Rightarrow$ (4) を背理法で示す. ベキ零行列 A が 0 でない固有値 λ を持つと仮定する. λ に対応する固有ベクトル $\vec{v}\neq\vec{0}$ を一つ取ると, 任意の自然数 m に対して $A^m\vec{v}=\lambda^m\vec{v}\neq\vec{0}$. これは「$A^k=0$ となるような自然数 k が存在する」という A の条件に矛盾する. 従って, ベキ零行列 A の固有値はすべて 0 である.

問題 5. 正方行列 A に相似な行列 B とは $P^{-1}AP$ (P は正則な正方行列) の形で書ける行列のことであるので, 自然数 k に対して $B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP$ である. したがって $A^k=O$ ならば $B^k=O$ であるので, A がベキ零行列ならば B もまたベキ零行列である.

問題 6. ベキ零行列 A が対角化可能ならば, A の固有値がすべて 0 であることから $P^{-1}AP=O$ となるような正則行列 P が存在する. 従って, $A=POP^{-1}=O$ である.

問題 7. n 次のベキ零行列は常に $A^n=O$ をみたすので $AP=(\vec{0},A^{n-1}\vec{v},\dots,A\vec{v})$ である.
したがって, $N=\begin{pmatrix}0&1&&\text{\Large O}\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\\text{\Large O}&&&0\end{pmatrix}$ とおき, $PN=(\vec{0},A^{n-1}\vec{v},\dots,A\vec{v})$ を示せばよい.
P と N をそれぞれ $P=(p_{i\ell})_{1\le i,\ell\le n}$, $N=(n_{\ell j})_{1\le \ell,j\le n}$ と成分表示する. ここで

$$n_{\ell j}=\begin{cases}0 & (j=0 \text{ または } j\neq\ell+1 \text{ のとき})\\ 1 & (j=\ell+1 \text{ のとき})\end{cases}$$

であることに注意すると, PN の第 (i,j) 成分は

$$\sum_{\ell=1}^{n}p_{i\ell}n_{\ell j}=\begin{cases}0 & (j=0 \text{ のとき})\\ p_{i(j-1)} & (j\neq 0 \text{ のとき})\end{cases}$$

で, これは行列 $(\vec{0},A^{n-1}\vec{v},\dots,A\vec{v})$ の第 (i,j) 成分と一致する. 以上により $AP=PN$ が示された.

E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8. (特別なベキ零行列のジョルダン標準形)

(1) 最小多項式が x^n であるので, $A^{n-1} \neq O$ である. したがって, A^{n-1} のある列は 0 でない成分を持つ. その列を第 k 列とすると, 縦ベクトル $\vec{e}_k$ (第 k 成分が 1, その他の成分が 0 であるような n 項縦ベクトル) に対して $A^{n-1}\vec{e}_k \neq \vec{0}$ である.

(2) 背理法によって証明する. n 個のベクトル $\vec{v}$, $A\vec{v}, \cdots$, $A^{n-1}\vec{v}$ が一次従属であると仮定すると, $c_0\vec{v} + c_1 A\vec{v} + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}\vec{v} = \vec{0}$ となるようなスカラーの組 $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ が存在する. 今, $c_i \neq 0$ であるような最小の i を k としよう. すると,

$$A^{n-1-k}(c_k A^k\vec{v} + c_{k+1} A^{k+1}\vec{v} + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}\vec{v}) = \vec{0}$$

であるが, $A^n = O$ より, 左辺は $c_k A^{n-1}\vec{v}$ に等しい. $c_k \neq 0$ であるので, $A^{n-1}\vec{v} = \vec{0}$ となり, これは $A^{n-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ という仮定に矛盾する (あるいは「$A^{n-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ であるので $c_k = 0$ となり, k の最小性に反する」としてもよい). したがって, $\vec{v}$, $A\vec{v}, \cdots$, $A^{n-1}\vec{v}$ は一次独立である.

問題 9. (1 つの固有値を持つ行列のジョルダン標準形１)

(1) A が対角化可能であると仮定し, 問題 6 同様の議論から矛盾を導く.

(2) $B = A - aE$ (E は n 次の単位行列) はベキ零行列で, その最小多項式は x^n である (各自確かめよ). したがって定理 1 より, 適当な n 次の正則行列 P に対して $P^{-1}BP = N$ (N は問題 7 の解答で定義した記号) が成り立つので, 同じ正則行列 P に対して以下が得られる.

$$P^{-1}AP = P^{-1}(B + aE)P = P^{-1}BP + aP^{-1}P = N + aE = \begin{pmatrix} a & 1 & & \text{\huge 0} \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & a \end{pmatrix}$$

問題 10. (べき零行列のジョルダン標準形)

(1) $A_4 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_4^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_4^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_4^4 = O$.

$A_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_3^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_3^3 = O$.

$A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_2^2 = O$. $A_1 = O$. 以上により，最小多項式は, $\varphi_{A_i}(x) = x^i$.

(2), (3) は黒板で説明

問題 11. (1 つの固有値を持つ行列のジョルダン標準形２) $B = A - aE_n$ で前問に帰着.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 12. (宿題：10 点)

(1) (2 点) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする. $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ を示せばよい.
$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ の両辺に左から $A - \lambda_2 E$ をかけると

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_1 + c_2\vec{0} = \vec{0}.$$

$c_1 \neq c_2, \vec{v}_1 \neq \vec{0}$ より $c_1 = 0$. これより $c_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ が得られるが, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ より $c_2 = 0$

(2) (2 点) $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ とする. $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を示せばよい.
$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ の両辺に左から $A - \lambda_3 E$ をかけると

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_3)\vec{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_3)\vec{v}_2 + c_3\vec{0} = \vec{0}.$$

今 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから, (1) の結果より $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は一次独立, すなわち $c_1(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$, $c_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$. λ_1, λ_2, λ_3 はすべて異なるので $c_1 = c_2 = 0$.
これより $c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ が得られるが, $\vec{v}_3 \neq \vec{0}$ より $c_3 = 0$.

(3) (2 点) $AP = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, A\vec{v}_3) = (\lambda_1\vec{v}_1, \lambda_2\vec{v}_2, \lambda_3\vec{v}_3) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
(2) の結果より, P は逆行列をもつので, この両辺に左から P^{-1} をかけると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

.

(4) (4 点) $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ であるから, A の固有値は $\lambda = 2, 1, -1$ である. $\lambda = 2, 1, -1$ に対する固有ベクトルはそれぞれ以下のように求まる.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ とおくと，(2) の結果より P は逆行列を持ち，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

問題 13. (宿題：10 点)

(1) (2 点) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \cdots (*)$ を帰納法により証明する.

$n = 1$ のとき $(*)$ は明らかに成立. $n = k$ で $(*)$ が成り立つと仮定すると, $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{k+1} =$
$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$. よって
$n = k + 1$ でも $(*)$ が成り立つ. 以上により任意の自然数 n について $(*)$ が成り立つことが示された.

 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) (2 点) 固有多項式は $f_A(x)=|xE-A|=(x-3)(x-1)+1=(x-2)^2$. 次に最小多項式 $\varphi_A(x)$ の次数 l を求める. $l=0$ の場合, 最小多項式の候補は $\varphi_A(x)=1$ であるが $\varphi_A(A)=E\neq O$ より不適. $l=1$ の場合, 最小多項式の候補は $\varphi_A(x)=x-\alpha$ (α は複素数) であるが $\varphi_A(A)=A-\alpha E$ は非対角要素がゼロでないので零行列にならず不適. $l=2$ の場合, ケーリー・ハミルトンの定理より $(A-2E)^2=O$. よって最小多項式は $\varphi_A(x)=(x-2)^2$.

(3) (6 点) 最小多項式の形から問題 7, 9 の結果を適用できる. $A-2E=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ より, $(A-2E)\vec{v}$ が零ベクトルにならないような $\vec{v}$ として $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ がとれる. このとき, $\vec{u}:=(A-2E)\vec{v}$ とすると, $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. 問題 7, 9 より $P=(\vec{u},\vec{v})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$ とおけば P は正則で, $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

よって (1) の結果を使うと, $P^{-1}A^kP=(P^{-1}AP)^k=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k&k\cdot 2^{k-1}\\0&2^k\end{pmatrix}$.

したがって,

$$\begin{aligned}A^k&=P\begin{pmatrix}2^k&k\cdot 2^{k-1}\\0&2^k\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&k\cdot 2^{k-1}\\0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^k+k\cdot 2^{k-1}&k\cdot 2^{k-1}\\-k\cdot 2^{k-1}&2^k-k\cdot 2^{k-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\exp(A)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}2^k+k\cdot 2^{k-1}&k\cdot 2^{k-1}\\-k\cdot 2^{k-1}&2^k-k\cdot 2^{k-1}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e^2+e^2&e^2\\-e^2&e^2-e^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^2&e^2\\-e^2&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$