担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ジョルダン標準形序論 (2022年11月10日)

作成日：November 06, 2022　Updated：November 17, 2022　実施日：November 10, 2022

以下すべて体 $\mathbb{C}$ 上で考える. E を単位行列の記号とする.

問題 1. (目覚ましフィボナッチ) 以下で定義される数列 $\{a_n\}$ をフィボナッチ数列という.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1$$

(1) $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ を用いて漸化式を $\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n$ の形に表すとき行列 A を求めよ.

(2) A^n を求めよ.

(3) これを利用して一般項 a_n を求めよ.

問題 2. (目覚ましジョルダン) A を 2×2 正方行列とし, 固有値として重解 λ を持つとする.

(1) 固有値 λ に対する固有ベクトルが独立に 2 つあるとすると, A は単位行列の定数倍となることを示せ.

(2) 固有値 λ に対する固有ベクトルが 1 つだけあるとし, それを $\vec{u}$ と表す. このとき $(A-\lambda E)\vec{w} = \vec{u}$ を満たす (ゼロベクトルではない) ベクトル $\vec{w}$ が存在する. $\vec{u}$ と $\vec{w}$ は一次独立であることを示せ. (すなわち $k\vec{u} + l\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow k = l = 0$.)

(3) $P = (\vec{u}, \vec{w})$ とおくと, (2) より P は正則行列. このとき以下が成り立つことを示せ.

$$(A-\lambda E)P = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

ベキ零行列

定義 1. n 次正方行列 A がベキ零行列であるとは, ある自然数 k に対して $A^k = O$ (O は $n\times n$ の零行列) となるときをいう. 定義により零行列はベキ零行列である.

問題 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ がべき零行列であることを示し, 固有多項式を求めよ.
また縦ベクトル $\vec{e}_k$ (第 k 成分が 1, その他の成分が 0 であるような n 項縦ベクトル) に対して, $A\vec{e}_k$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ を求めよ.

問題 4. n 次正方行列 A に対し, 次の 4 つの条件が互いに同値であることを示せ.

(1) A がベキ零行列である.
(2) $A^n = O$ である.
(3) A の固有多項式が x^n である.
(4) A の固有値がすべて 0 である.

(たとえば, (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4) を示す.)

問題 5. ベキ零行列 A に相似な行列はベキ零行列であることを示せ.

問題 6. ベキ零行列 A が対角化可能ならば $A = O$ であることを示せ.

問題 6 の結果の対偶を取ると, 以下の事実が分かる：

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

零行列でないベキ零行列は対角化可能ではない.

問題 7. A を n 次のベキ零行列, $\vec{v}$ を n 項縦ベクトル (= n 項列ベクトル) とする. n 個の n 項縦ベクトル $A^{n-1}\vec{v}, \cdots, A\vec{v}, \vec{v}$ を横に並べた行列 $(A^{n-1}\vec{v}, \ldots, A\vec{v}, \vec{v})$ を P とおくと, 以下が成り立つことを示せ.

$$AP = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge O} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge O} & & & 0 \end{pmatrix}$$

定義 2. n 次正方行列 A に対して, $f_A(x) := \det(xE - A)$ を A の固有多項式という. また $f(A) = O$ を満たす多項式の中で次数が最小かつ最高次の係数が 1 のものを A の最小多項式といい, $\varphi_A(x)$ と表す. (なお $f_A(A) = O$ をケーリー・ハミルトンの定理という.)

問題 8. (特別なベキ零行列のジョルダン標準形)
次に, 最小多項式が $\varphi_A(x) = x^n$ であるような n 次正方行列 A に対して, 命題

> 「n 項縦ベクトル $\vec{v}$ をうまく取ってくると, n 個のベクトル $\vec{v}, A\vec{v}, \cdots, A^{n-1}\vec{v}$ が一次独立になるようにできる.」

を証明しよう. 「最小多項式が x^n である」という条件は「$A^{n-1} \neq O$ かつ $A^n = O$」という条件と同値であることに注意せよ.

(1) $A^{n-1}\vec{v}$ が零ベクトルにならないような縦ベクトル $\vec{v}$ が存在することを示せ.

(2) $A^{n-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ であるような縦ベクトル $\vec{v}$ に対して, n 個の縦ベクトル $\vec{v}, A\vec{v}, \cdots, A^{n-1}\vec{v}$ が一次独立であることを示せ.

問題 7, 問題 8 から次のことがわかる. ($P := (A^{n-1}\vec{v}, A^{n-2}\vec{v}, \cdots, \vec{v})$ として)

定理 1. n 次正方行列 A の最小多項式が x^n ならば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge O} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge O} & & & 0 \end{pmatrix}$$

となるような n 次の正則行列 P が存在する. (右辺の行列を A のジョルダン標準形と呼ぶ.)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. (1 つの固有値を持つ行列のジョルダン標準形 1) n を 2 以上の自然数とし, n 次正方行列 A の最小多項式が $(x-a)^n$ であるとする. また, E を n 次の単位行列とする. このとき

(1) A は対角化可能でないことを示せ.

(2) 次式を満たすような n 次の正則行列 P が存在することを示せ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 & & O \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & a \end{pmatrix}$$

右辺の行列を A のジョルダン標準形と呼ぶ.

(ヒント：$B = A - aE$ とおき, 問題 8 の結果を利用.)

問題 10. (べき零行列のジョルダン標準形) 最後に 最小多項式が $\varphi_A(x) = x^k$, $(1 \leq k < n)$ であるような n 次正方行列について考えよう. (「最小多項式が x^k である」という条件は「$A^{k-1} \neq O$ かつ $A^k = O$」という条件と同値である.) ここではさらに固有空間の次元が $n-k+1$ と仮定する.

以下の 4×4 べき零行列 A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ について以下の問いに答えよ. 固有多項式はすべて $f_{A_i}(x) = x^4$ である.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = O.$$

(1) A_i の最小多項式 $\varphi_{A_i}(x)$ を求めよ.

(2) 最小多項式が $\varphi_A(x) = x^k$ であるようなべき零行列 A に対して, $A^{k-1}\vec{w}$ が零ベクトルにならないような縦ベクトル $\vec{w}$ が存在する. このとき $A^{k-1}\vec{w}$ は固有値ゼロの固有ベクトルとなるが, (仮定より) これとは別の一次独立な $n-k$ 個の固有ベクトル $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-k)$ が存在して, $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{n-k}, A^{k-1}\vec{w}, \cdots, A\vec{w}, \vec{w}$ を一次独立にとることができる. この事実を上記の 4 行列について確かめよ. なお, 問題 2 では, 固有ベクトル $A^{k-1}\vec{w}$ を $\vec{u}$ と書いた. (ここでの $\vec{v}_i$ は存在しない)

(3) 上記の事実を認めると, 最小多項式が $\varphi_A(x) = x^k$ であるようなべき零行列 A に対して, $P = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{n-k}, A^{k-1}\vec{w}, \cdots, A\vec{w}, \vec{w})$ とおくと, (O_m を m 次の零行列として)

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cccc} O_{n-k} & & O & & \\ \hline & 0 & 1 & & O \\ & & 0 & \ddots & \\ O & & & \ddots & 1 \\ & O & & & 0 \end{array}\right)$$

が成り立つことを示せ. 右辺の行列をべき零行列 A のジョルダン標準形と呼ぶ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 11. (1 つの固有値を持つ行列のジョルダン標準形 2) n 次正方行列 A の最小多項式が $\varphi_A(x) = (x-a)^k$, $(1 \leq k < n)$ であるとする．さらに固有空間の次元が $n-k+1$ と仮定する．このとき次式を満たすような n 次の正則行列 P が存在することを示せ．右辺の行列を A のジョルダン標準形と呼ぶ．(E_n は n 次の単位行列.)

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cccc} aE_{n-k} & & O & & \\ \hline & a & 1 & & O \\ & & a & \ddots & \\ O & & & \ddots & 1 \\ & O & & & a \end{array}\right)$$

今週の宿題 (提出期限は 11 月 13 日 (日) です)

問題 12. (宿題) 3×3 行列 A が相異なる 3 つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を持つとし，それぞれに属する固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ をとる．

(1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ は一次独立であることを示せ．

(3) $P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ とおくと，$P^{-1}AP$ は対角行列となることを示せ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに属する固有ベクトルを全て求め A を対角化せよ．

問題 13. (宿題) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) すべての自然数 n に対して，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(2) A の固有多項式 $f_A(x)$ および最小多項式 $\varphi_A(x)$ を求めよ．

(3) A^n (n は自然数) を求めよ．また，$\exp(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ を求めよ．