担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ローラン展開・留数定理 (略解)

作成日：October 24, 2022　Updated：November 6, 2022　Version：1.0

問題 1. (目覚まし積分評価) (1) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ において $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$ より $0 < e^{-t\sin x} \le e^{-t\frac{2}{\pi}x}$. よって,

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\sin x}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\frac{2}{\pi}x}dx = -\frac{\pi}{2t}(e^{-t}-1).$$

はさみうちの原理より, $\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\sin x}dx = \lim_{t\to\infty}\frac{-\pi}{2t}(e^{-t}-1) = 0$

(2) $f(x) = e^{-t\sin x}$ とおく. $f(\pi - x) = f(x)$ であるから, $f(x)$ のグラフは $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称である. よって, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-t\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\sin x}dx \xrightarrow{t\to\infty} 0.$

問題 2. (円周積分路での複素線積分)

(1) C 上の点は $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ $(0 < \theta < 2\pi)$ とおける. $dz = ie^{i\theta}d\theta$ より,

$$I = \int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} id\theta = \int_0^{2\pi}(i\cos(n+1)\theta - \sin(n+1)\theta)\,d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n\neq -1 \end{cases}$$

まとめると, $I = 2\pi i\delta_{n,-1}$ ([**コメント**] ε によらないことにも注意.)

(2) $I = 2\pi i e^a$ (分子の e^z を $z = a$ のまわりでテイラー展開し, 展開各項に前問 (1) の結果を適用. $e^z = e^{a+(z-a)}$ に注意.)

問題 3. (留数定理の実積分への応用 1) $z = e^{i\theta}$ とおくと $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$ より $d\theta = -iz^{-1}\,dz$. 一方, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ であるので,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a + b\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}dz.$$

2 次方程式 $bz^2 + 2az + b = 0$ の 2 つの実数解 $\alpha = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $\beta = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ のうち単位円内部に含まれるのは β のみである. 被積分関数を $z = \beta$ のまわりでローラン展開すると (例題 2(2) の部分分数化を施すことで)

$$\frac{\beta}{b^2(\alpha-\beta)^2}\frac{1}{(z-\beta)^2} + \frac{\alpha+\beta}{b^2(\alpha-\beta)^3}\frac{1}{z-\beta} + ((z-\beta)\text{ の 0 次以上の項}).$$

したがって留数定理より,

$$I = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}dz = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\frac{\alpha+\beta}{b^2(\alpha-\beta)^3} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

[**別解**] 例題 3 の結果の両辺を a で微分する.

問題 4. (留数定理の実積分への応用 2) 黒板で解説します.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. (留数定理の実積分への応用 3)

(1) $f(z) = (z^2 - z + 2)/(z^4 + 10z^2 + 9) = (z^2 - z + 2)/(z^2+1)(z^2+9)$ とおき, 図 2 の積分路 C (一周) で $f(z)$ を積分する. 留数定理より, $R \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i\big(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3i} f(z)\big)\\ &= 2\pi i\left(\lim_{z\to i}(z-i)f(z) + \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{1-i}{16i} + \frac{-3i-7}{-48i}\right) = \frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

一方, $\displaystyle\int_{\mathrm{AB}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$ で, R が十分大きいとき,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2e^{2i\theta} - Re^{i\theta} + 2}{R^4e^{4i\theta} + 10R^2e^{2i\theta} + 9} iRe^{i\theta}d\theta\right| \quad (z = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi)\\ &\le R\int_0^{\pi}\left|\frac{R^2e^{2i\theta} - Re^{i\theta} + 2}{R^4e^{4i\theta} + 10R^2e^{2i\theta} + 9} ie^{i\theta}\right| d\theta\\ &= R\int_0^{\pi}\left|\frac{R^2 - Re^{-i\theta} + 2e^{-2i\theta}}{R^4 + 10R^2e^{-2i\theta} + 9e^{-4i\theta}}\right| d\theta\\ &\le R\int_0^{\pi} \frac{R^2+R+2}{R^4-10R^2-9}\,d\theta = \frac{\pi R(R^2+R+2)}{R^4-10R^2-9}.\end{aligned}$$

したがって $R\to\infty$ として, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx = \frac{5\pi}{12}.$

(2) $f(z) := 1/(z^n+1)$ とおき, 図 3 のような積分路 C を考える.
留数定理より, $R > 1$ のとき,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{\frac{\pi i}{n}}} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{n}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{n}}}{z^n+1} \overset{\text{ロピタル}}{=} -\frac{2\pi i}{n e^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}} = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

一方,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{OA}} f(z)\,dz &= \int_0^R \frac{1}{x^n+1}\,dx,\\ \int_{\mathrm{BO}} f(z)\,dz &= \int_R^0 \frac{1}{r^n e^{\frac{2\pi i}{n}\times n} + 1} e^{\frac{2\pi i}{n}}\,dr, \quad (z = re^{\frac{2\pi i}{n}},\ 0 \le r \le R \text{ とおいた.})\\ &= -e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R \frac{1}{r^n+1}\,dr,\\ \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{i\theta}}{R^ne^{ni\theta}+1}\,d\theta\right| \quad \left(z = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{2\pi}{n},\ R > 1\right)\\ &\le \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left|\frac{iRe^{i\theta}}{R^ne^{ni\theta}+1}\right| d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left|\frac{R}{R^n + e^{-ni\theta}}\right| d\theta \le \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n-1}\,d\theta\\ &= \frac{2\pi R}{n(R^n-1)}.\end{aligned}$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

したがって $R\to\infty$ として $(1-e^{\frac{2\pi i}{n}})\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}\,dx = -\frac{2\pi i}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}$,

すなわち, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}\,dx = -\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{2i}{e^{\frac{\pi i}{n}}-e^{-\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$.

(3) $f(z)=e^{iz}/z(e^z+e^{-z})$ を図 2 の積分路で積分する. $f(z)$ は $z=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$ (n は自然数) において位数 1 の極を持つ. 留数定理より $\varepsilon\to 0, R\to\infty$ のとき

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Res}_{z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} f(z)\\
&= 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{z\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\left(z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i\right)\frac{e^{iz}}{z(e^z+e^{-z})}\\
&= 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{z\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\frac{e^{iz}}{z}\cdot\frac{1}{e^z-e^{-z}}\\
&= 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\cdot\frac{1}{2i(-1)^n} = -i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

実軸上の積分経路については

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{AO}_-} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{O}_+\mathrm{B}} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{z(e^x+e^{-x})}\,dx\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x(e^x+e^{-x})}\,dx\\
&= \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x(e^x+e^{-x})}\,dx = 2i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x(e^x+e^{-x})}\,dx.
\end{aligned}$$

C_ε の部分については, $z=\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ とおくことで

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(e^z+e^{-z})}\,dz = \int_{\pi}^{0}\frac{i\,e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{e^{\varepsilon e^{i\theta}}+e^{-\varepsilon e^{i\theta}}}\,d\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\frac{\pi i}{2}.$$

C_R の部分については, $z=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ とおくことで

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z(e^z+e^{-z})}dz\right| &\le \int_0^\pi\left|\frac{ie^{Re^{i\theta}}}{e^{Re^{i\theta}}+e^{-Re^{i\theta}}}\right|d\theta = \int_0^\pi\frac{e^{-Re^{\sin\theta}}}{|e^{Re^{i\theta}}+e^{-Re^{i\theta}}|}\,d\theta\\
&\le \int_0^\pi\frac{e^{-Re^{\sin\theta}}}{e^{R\cos\theta}(1-e^{-2R\cos\theta})}\,d\theta \le \int_0^\pi e^{-Re^{\sin\theta}}\,d\theta \le \pi\,e^{-R}.
\end{aligned}$$

以上により, $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ とすると,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(e^x+e^{-x})}\,dx &= 2\int_0^\infty\frac{\sin x}{x(e^x+e^{-x})}dx\\
&= \frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}}{n+\frac{1}{2}}\\
&= \frac{\pi}{2}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{-\frac{\pi}{2}})^{(2n+1)}}{2n+1}\\
&= \frac{\pi}{2}-2\arctan e^{-\frac{\pi}{2}} = \arctan e^{\frac{\pi}{2}}-\arctan e^{-\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

問題 6. (宿題：20 点)

(1) (10 点) $z = e^{i\theta}$ とおくと $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$ より $d\theta = -iz^{-1}\,dz$. 一方, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z-z^{-1})/(2i)$ であるので,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = \frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}dz.$$

2次方程式 $bz^2+2az+b=0$ の2つの実数解を $\alpha = \dfrac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $\beta = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ と表す. 上式最右の表式において被積分関数 $f(z)$ の単位円内に含まれる特異点は, 2 位の極 $z=0$ と 1 位の極 $z=\beta$ (cf. 例題 3) である. 留数は以下のように計算される：

$$\mathrm{Res}_{z=0}f(z) = \frac{d}{dz}\frac{(z^2-1)^2}{bz^2+2az+b}\bigg|_{z=0} = -\frac{2a}{b^2},\quad \mathrm{Res}_{z=\beta}f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{bz^2(z-\alpha)}\bigg|_{z=\beta} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}.$$

したがって留数定理より,

$$I = \frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}dz = \frac{i}{2}\cdot 2\pi i\left(-\frac{2a}{b^2}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right) = \frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

(2) (10 点) $f(z) = z^2/(z^2+a^2)^3$ とおき, 問題に与えられた図 2 の積分路 C (一周) で $f(z)$ を積分する. R が十分大きいとき, $f(z)$ は C 内において $z=ai$ で 1 位の極を持つ. よって留数定理より,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}_{z=ai}\,f(z) = 2\pi i\,\frac{1}{2!}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-ai)^3f(z)\right) = \frac{\pi}{8a^3}.$$

一方, 線分 AB に沿っての線積分は, $z = x\in\mathbb{R}$, $(-R\le x\le R)$ として,

$$\int_{\mathrm{AB}} f(z)\,dz \;=\; 2\int_0^R \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx.$$

また半円弧 C_R に沿っての線積分は, $z = Re^{i\theta}$, $(0\le\theta\le\pi)$ として,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+a^2)^3}iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi\left|\frac{R^2e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+a^2)^3}iRe^{i\theta}\right|d\theta \\ &= \int_0^\pi\frac{R^2}{|R^2-a^2|^3}Rd\theta = \frac{\pi R^3}{|R^2-a^2|^3}.\end{aligned}$$

したがって $R\to\infty$ として, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{\pi}{16a^3}$.

問題 7. (ボーナス問題：12 点)

(1) (6 点) $f(z) = \dfrac{1}{z^2\tan\pi z} = \dfrac{\cos\pi z}{z^2}\dfrac{1}{\sin\pi z}$.

まず $z=0$ のまわりで展開する. $\sin\pi z = (\pi z) - \dfrac{(\pi z)^3}{3!} + \dfrac{(\pi z)^5}{5!} - \cdots = \pi z\left(1-\dfrac{(\pi z)^2}{3!}+\dfrac{(\pi z)^4}{5!}-\cdots\right)$

より, $f(z) = \dfrac{\cos\pi z}{z^2}\dfrac{1}{\pi z\left(1-\left(\dfrac{(\pi z)^2}{3!}-\dfrac{(\pi z)^4}{5!}+\cdots\right)\right)}$

$$= \frac{\cos\pi z}{z^2}\frac{1}{\pi z}\left(1+\left(\frac{(\pi z)^2}{3!}-\frac{(\pi z)^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{(\pi z)^2}{3!}-\frac{(\pi z)^4}{5!}+\cdots\right)^2+\cdots\right).$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ここで, $\cos \pi z = 1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} - \cdots$ より, $f(z) = \underbrace{\frac{1}{\pi z^3} - \frac{\pi}{3z}}_{\text{主要部}} + (z$ の 0 次以上).

よって $z = 0$ での極の位数は 3, 留数は $-\pi/3$.
$z = n (\neq 0)$ のまわりでは,

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z-n+n)^2} = \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1+\frac{z-n}{n}}\right]^2 = \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{z-n}{n} + \left(\frac{z-n}{n}\right)^2 - \cdots\right]^2,$$

$\cos \pi z = \cos\{\pi(z-n) + \pi n\} = \cos \pi(z-n) \cos \pi n - \sin \pi(z-n) \sin \pi n = (-1)^n \cos \pi(z-n) = (-1)^n \left(1 - \frac{\pi^2 (z-n)^2}{2!} + \frac{\pi^4 (z-n)^4}{4!} - \cdots\right)$,

$\sin \pi z = \sin\{\pi(z-n) + \pi n\} = \sin \pi(z-n) \cos \pi n + \cos \pi(z-n) \sin \pi n = (-1)^n \sin \pi(z-n) = (-1)^n \left(\pi(z-n) - \frac{\pi^3 (z-n)^3}{3!} + \cdots\right) = (-1)^n \pi(z-n)\left(1 - \frac{\pi^2 (z-n)^2}{3!} + \cdots\right)$.

($1/(1-t) = 1 + t + t^2 + \cdots$ を念頭において) $f(z)$ を展開すると, $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \underbrace{\frac{1}{\pi n^2 (z-n)}}_{\text{主要部}} + ((z-n)$ の 0 次以上). よって $z = n$ での極の位数は 1, 留数は $1/(\pi n^2)$.

(2) (6 点) 積分路の正方形の 4 頂点を A: $(N+1/2)(1-i)$, B: $(N+1/2)(1+i)$, C: $(N+1/2)(-1+i)$, D: $(N+1/2)(-1-i)$ とする.

線分 AB 上では $z = (N+1/2) + it$ $(-N-1/2 < t < N+1/2)$ として,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathrm{AB}} f(z)dz\right| &\leq \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \left|\frac{1}{(N+\frac{1}{2}+it)^2}\right| \left|\frac{e^{i\pi(N+1/2+it)} + e^{-i\pi(N+1/2+it)}}{e^{i\pi(N+1/2+it)} - e^{-i\pi(N+1/2+it)}}\right| dt \\ &\leq \frac{1}{(N+\frac{1}{2})^2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \left|\frac{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}{e^{-\pi t} + e^{\pi t}}\right| dt \leq \frac{1}{(N+\frac{1}{2})^2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} 1dt \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

2 行目で $\exp(2i\pi(N+1/2)) = -1$ を用いた.

線分 BC 上では $z = t + i(N+1/2)$ $(-N-1/2 < t < N+1/2)$ として,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathrm{BC}} f(z)dz\right| &\leq \int_{N+1/2}^{-N-1/2} \left|\frac{1}{(t+i(N+\frac{1}{2}))^2}\right| \left|\frac{e^{i\pi(t+i(N+1/2))} + e^{-i\pi(t+i(N+1/2))}}{e^{i\pi(t+i(N+1/2))} - e^{-i\pi(t+i(N+1/2))}}\right| dt \\ &\leq \frac{1}{(N+\frac{1}{2})^2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \left|\frac{1 + e^{\pi(2N+1)} e^{-2i\pi t}}{1 - e^{\pi(2N+1)} e^{-2i\pi t}}\right| dt \\ &\leq \frac{1}{(N+\frac{1}{2})^2} \int_{-N-1/2}^{N+1/2} \left|\frac{1 + e^{\pi(2N+1)}}{1 - e^{\pi(2N+1)}}\right| dt = \frac{2N+1}{(N+\frac{1}{2})^2} \left|\frac{1 + e^{\pi(2N+1)}}{1 - e^{\pi(2N+1)}}\right| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

同様に線分 CD, DA に沿った線積分も $N \to \infty$ で 0 になることが示される.

(1) より C 内の留数の総和は $-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ である. よって留数定理より, $N \to \infty$ において $0 = -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.