担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ローラン展開と留数定理 (2022年10月27日)

作成日：October 24, 2022　Updated：October 27, 2022　Version：1.0　　実施日：October 27, 2022

準備と復習

問題 1.（目覚まし積分評価） $t>0$ とする．以下を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\sin x}dx=0$　　(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-t\sin x}dx=0$

問題 2.（円周積分路での複素線積分） $n\in\mathbb{Z},\ a\in\mathbb{C},\ \varepsilon>0$ とする．積分路を $C=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|=\varepsilon\}$．としたとき，次の複素線積分を (コーシーの積分定理・積分公式を用いずに) 求めよ．(積分路の向きは「反時計まわり」とする.)

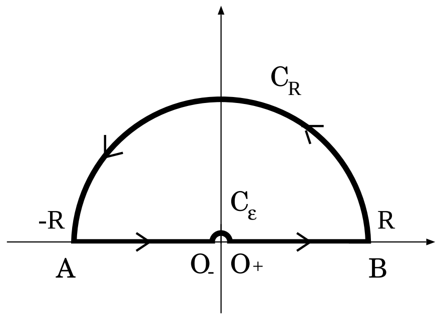
(1) $\displaystyle I=\int_C (z-a)^n dz$　(2) $\displaystyle I=\int_C \frac{e^z}{z-a}dz$　(e^z を $z=a$ のまわりでテイラー展開)

例題 1. (コーシーの積分定理の実積分への応用)

右下図に与えられた周回積分路 C =AB+C_ε+CD+C_R に沿った複素関数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ の線積分を利用して実積分の値 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ．ただし C_ε, C_R はそれぞれ半径 ε, R の半円弧．例題 1 の結果は既知としてよい．(ヒント：それぞれの区間の線積分を評価し，$R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ の極限をとる．曲線の向きに注意.)

【解答】 $f(z)$ を図 1 に与えられた積分路 C で積分する．$f(z)$ は C の内部で正則だから，コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C f(z)dz=0$.

図 1: 積分路 1



半円弧 C_ε 上では，$z=\varepsilon e^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$ とおくと，

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = -i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}}d\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -i\pi.$$

半円弧 C_R 上では，$z=Re^{i\theta}$, $0<\theta<\pi$ とおくと，

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}\right|d\theta = \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta \xrightarrow{R\to\infty(\text{問題 }1)} 0.$$

以上の結果より，$\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ の極限で

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x}dx - i\pi + \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx + 0 = 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx - i\pi = 0.$$

よって $\displaystyle I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ローラン展開と留数

定理 1. (ローラン展開) $f(z)$ を $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z-a|<R\}$ で正則な関数とする．このとき，$f(z)$ は 閉部分領域 $r_1\le|z-a|\le r_2$ $(0<r_1<r_2\le R)$ で以下の (一様収束する) 級数に展開できる．

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\,(z-a)^{-n}\quad\left(a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-a|=\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)$$

係数 a_n は一意に定まり，括弧内の式で与えられる．これを $f(z)$ の $z=a$ における**ローラン展開**という．右辺の第 2 項 (負べきの項) を $f(z)$ の $z=a$ における**主要部**と言い，主要部が有限個の項からなるとき，

$$a_{-k}\neq 0,\quad a_n=0\ (\forall n\le -k-1)$$

となる k を $f(z)$ の $z=a$ における**極の位数**とよぶ (または，関数 $f(z)$ は $z=a$ において**位数 k の極**を持つとも言う)．ローラン展開における係数 a_{-1} を $f(z)$ の $z=a$ における**留数**といい，$\mathrm{Res}_{z=a}\,f(z)$ と書く．

例題 2. 次の関数 $f(z)$ の 与えられた点 $[z=a]$ での極の位数と留数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{z^2(z+1)}$ $[z=0]$　(2) $\dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ $[z=\alpha\ (\neq\beta)]$　(3) $\dfrac{\sin z}{1-\cos z}$ $[z=0]$

【解答】 等比級数の関係式 $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots$ を念頭におく．

(1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}(1-z+z^2-z^3+\cdots)=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+1-z+\cdots$. 極の位数は 2, 留数は -1.

(2) $\alpha\neq\beta$ のとき (与式) $=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{z-\alpha}-\dfrac{1}{z-\beta}\right)$. 極の位数は 1, 留数は $(\alpha-\beta)^{-1}$.

(3) $1-\cos z=z^2/2!-z^4/4!+\cdots=(z^2/2!)\,(1-z^2/4!+\cdots)$. よって $\dfrac{\sin z}{1-\cos z}=$
$\left(\dfrac{2!}{z^2}\right)\left(1+\left(\dfrac{z^2}{4!}-\cdots\right)+\left(\dfrac{z^2}{4!}-\cdots\right)^2+\cdots\right)\sin z=\dfrac{2}{z}+(z$ に関して 0 次以上).
よって極の位数は 1, 留数は 2.

留数定理を使った実積分の計算

定理 2. (留数定理) D を単連結な領域とし，$f(z)$ を $D\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$ で正則な関数とする．C を D 内の 区分的になめらかな閉曲線で内部に $\{a_1,\ldots,a_n\}$ を含むものとする．このとき以下が成り立つ：

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_{z=a_i}\,f(z).$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

定理 3. (留数)　ローラン展開における係数 c_{-1} を $f(z)$ の $z=a$ における留数といい, $\mathrm{Res}_{z=a} f(z)$ と書く. $f(z)$ が $z=a$ で位数 k の極を持つとき, 以下が成り立つ.

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\big((z-a)^k f(z)\big).$$

特に, $f(z)$ が $z=a$ で位数 1 の極を持つとき, 以下が成り立つ.

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \big((z-a)f(z)\big).$$

例題 3.　$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta}\, d\theta$ の値を求めよ $(a>b>0)$. (ヒント：$z=e^{i\theta}$ と変数変換し, 問題の積分を単位円周上の複素積分として表すと留数定理が適用できる)

【解答】 $z=e^{i\theta}$ とおくと $dz = ie^{i\theta}\, d\theta$ より $d\theta = -iz^{-1}\, dz$. 一方, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ であるので,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta}\, d\theta = -2i\int_{|z|=1} \frac{1}{bz^2+2az+b} dz.$$

2 次方程式 $bz^2+2az+b=0$ の 2 つの実数解 $\alpha = \dfrac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $\beta = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ のうち単位円内部に含まれるのは β のみである. したがって留数定理より, $I=$

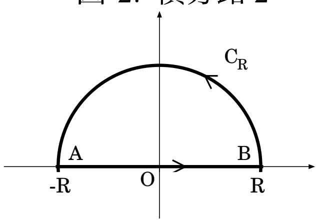
$$-2i\int_{|z|=1} \frac{1}{bz^2+2az+b} dz = -2i\cdot 2\pi i\ \mathrm{Res}_{z=\beta}\frac{1}{b(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{4\pi}{b}\cdot\frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

例題 4.　次の実積分の値を求めよ $(a>b>0)$：

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\, dx.$$

(ヒント: $f(z) = \dfrac{e^{ibz}}{z^2+a^2}$ を右図の積分路で積分せよ.)

図 2: 積分路 2



【解答】 $f(z) = \dfrac{e^{ibz}}{z^2+a^2}$ とおき, 図に与えられた周回積分路 C で $f(z)$ を積分する. C の内部において $f(z)$ は $z=ai$ で一位の極を持つ (例題 2 (2)). その点における留数は $\dfrac{1}{2ai}e^{-ab}$ と計算される. 線分 AB に沿った線積分は　$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ として

$$\int_{\mathrm{AB}} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos bx + i\sin bx}{x^2+a^2}dx = 2\int_0^R \frac{\cos bx}{x^2+a^2}dx$$

C_R に沿った線積分は, ($0\le\theta\le\pi$ の範囲で $e^{-bR\sin\theta}\le 1$ に注意すると)

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \frac{Re^{-bR\sin\theta}}{R^2-a^2}d\theta \le \int_0^\pi \frac{R}{R^2-a^2}d\theta = \frac{\pi R}{R^2-a^2}.$$

以上の結果に留数定理を適用し $R\to\infty$ とすると, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}$ が得られる.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (留数定理の実積分への応用 1) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}\,d\theta$ の値を求めよ $(a > b > 0)$.

問題 4. (留数定理の実積分への応用 2) 例題 1 の実積分を留数定理を用いて求めよ. (C_ε の半円弧を上半平面内ではなく下半平面内にとる (黒板で図示します).)

問題 5. (留数定理の実積分への応用 3)

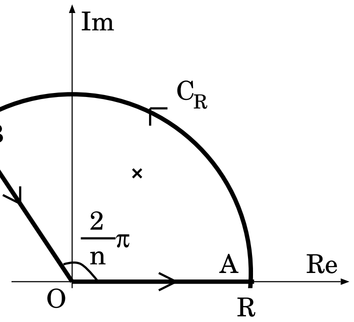
次の実積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$ (ヒント: $f(z) = \dfrac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$ を図 2 の積分路で積分せよ)

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^n+1}\,dx$, ($n$ は 2 以上の自然数) ($f(z) = \dfrac{1}{z^n+1}$ を図 3 の積分路で積分せよ)

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(e^x+e^{-x})}\,dx$ (ヒント: $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(e^z+e^{-z})}$ を図 1 の積分路で積分せよ)

図 3: 積分路 3



今週の宿題・ボーナス問題 (締切はどちらも☆ 11 月 6 日 (日) ☆です))

問題 6. (宿題) $a > b > 0$ とする. 次の実積分の値を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta$

(2) $J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx$ (例えば前ページ図 2 の積分路で考えればよい.)

問題 7. (ボーナス問題：ゼータ関数の特殊値再訪)

$\zeta(s) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ をリーマンのゼータ関数という.

複素平面上の 4 点 $(N+1/2)(\pm 1 \pm i)$ を頂点とする正方形を考え, その周 C に沿って反時計周りに $f(z) = \dfrac{1}{z^2\tan\pi z}$ を線積分することで $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を証明したい.

$f(z)$ の分母の零点は $z = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ であることに注意.

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2\tan\pi z}$ を点 $z = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ のまわりでローラン展開して主要部を求め, その点での極の位数と留数の値を求めよ. ($n = 0$ のときと $n \neq 0$ のときに分ける.)

(2) $N \to \infty$ で周回積分がゼロになることを示し, 留数定理より $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ を示せ.