担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

# 2 変数関数の微分積分 (略解)

作成日：October 15, 2022　Updated：October 24, 2022　Version：1.0

**問題 1. (1 変数関数の連続性)**

正の数 $\varepsilon$ を任意に与える．このとき正の数 $\delta$ を $\delta=\varepsilon$ としてとると，

$$|x-0|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(0)|=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x-0|\,|1|<\delta=\varepsilon.$$

よって関数 $f(x)$ は $x=0$ において連続である．

**問題 2. (2 変数関数の連続性・微分可能性)**

(1) 連続性について調べる．極座標表示 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ を用いる．$(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)$ を $r$ と $\theta$ で表すと

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

で，右辺は $\sin 2\theta\neq 0$ のとき $r\to 0$ としても $0=f(0,0)$ に収束しない．したがって $f(x,y)$ は 原点において連続ではなく，全微分可能でもない．

(2) 全微分可能性について調べる．

$$\begin{aligned} f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k &= \frac{h^2k^2}{h^2+k^2} \\ &= o(\sqrt{h^2+k^2}) \quad (\sqrt{h^2+k^2}\to 0). \end{aligned}$$

より $f(x,y)$ は原点で全微分可能であり，連続でもある．(最後のオーダーの評価は $h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ として $r\to 0$ の極限を取れば分かる.)

(3) 連続性について調べる．$(x,y)=(t^2,t)$ とすると，

$$f(x,y)=\frac{1}{2}$$

で，右辺は $t\to 0$ としても $0=f(0,0)$ に収束しない．したがって $f(x,y)$ は 原点において連続ではなく，全微分可能でもない．

**[コメント]** 偏微分可能性については，(1)〜(3) いずれも

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=0,$$

より，$f(x,y)$ は原点で $x$ についても $y$ についても偏微分可能．($y=0,\ x=0$ の断面でグラフを観察すれば明らか.) 偏微分可能でない場合は，$h,k$ が正から 0 に近く場合と負からゼロに近く場合で答えが異なる ($y=0,\ x=0$ の断面でグラフを観察すれば明らか)．なお (2) に関して，$f_x(x,y), f_y(x,y)$ は原点で連続でないので $f(x,y)$ は $C^1$ 級ではなく「$f$ が $C^1$ 級 $\Rightarrow$ $f$ は全微分可能」を適用できない．

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 3. (2 変数関数の連続性)** 正の数 $\varepsilon$ を任意に与える．$\vec{x} = (x, y), \vec{a} = (a, b)$ とおく．関数 $f$ は点 $\vec{a}$ において連続であるから，正の数 $\varepsilon/2$ に対して正の数 $\delta_1$ が存在して

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_1 \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon/2.$$

関数 $g$ は点 $\vec{a}$ において連続であるから，正の数 $\varepsilon/2$ に対して正の数 $\delta_2$ が存在して

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_2 \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon/2.$$

ここで $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ として正の数 $\delta$ を定めると，

$$\begin{aligned}|\vec{x} - \vec{a}| < \delta \Rightarrow |(f+g)(\vec{x}) - (f+g)(\vec{a})| &= |f(\vec{x}) + g(\vec{x}) - (f(\vec{a}) + g(\vec{a}))| \\ &= |f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - (g(\vec{x}) - g(\vec{a}))| \\ &\leq |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| + |(g(\vec{x}) - g(\vec{a}))| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

よって関数の和 $f + g$ は点 $\vec{a}$ において連続である．

**問題 4. (接平面)**

(1) $f(x, y) = x^2 + y^3$ とおくと，$f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 3y^2$ なので，求める接平面の方程式は $z = 2(x-1) + 12(y-2) + 14 \Leftrightarrow 2x + 12y - z = 12$.

(2) $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$ とおくと，$f_x(x, y) = 2\,x\cos(x^2+y^2)$, $f_y(x, y) = 2\,y\cos(x^2+y^2)$ なので

$$f_x\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}, \quad f_y\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$

したがって求める接平面の方程式は以下で与えられる．

$$z = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(x - \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(y - \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{6}}x + \sqrt{\frac{\pi}{6}}y - z = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**問題 5. (3 次元空間内の接平面の方程式)**

(1) 原点を O とする．球面の性質から，求める平面の法線ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x_0, y_0, z_0)$ である．よって求める方程式は，$x_0x + y_0y + z_0z = R^2$.

(2) 与えられた楕円球の方程式を $z = f(x, y)$ の形に書き直すと，$z = \sqrt{24 - 12x^2 - 2y^2}$ または $z = -\sqrt{24 - 12x^2 - 2y^2}$ であるが，今考えている点の $z$ 座標は正なので，曲面 $z = \sqrt{24 - 12x^2 - 2y^2}$ の点 (1,2,2) における接平面を求めればよい．そこで $f(x, y) = \sqrt{24 - 12x^2 - 2y^2}$ とおくと，

$$f_x(x, y) = \frac{-12x}{\sqrt{24 - 12x^2 - 2y^2}}, \qquad f_y(x, y) = \frac{-2y}{\sqrt{24 - 12x^2 - 2y^2}}.$$

よって，接平面の方程式は $z = -6(x-1) - 2(y-2) + 2 \Leftrightarrow 6x + 2y + z = 12$.

[**別解**] 与式の楕円球が，球面 S:$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ と，一定方向に拡大・縮小を施す座標変換 $(x, y, z) = (\sqrt{2}X, 2\sqrt{3}Y, 2\sqrt{6}Z)$ で結ばれていることに注意する．楕円球上の点 $(x, y, z) = (1, 2, 2)$ は，S 上の点 $\mathrm{P}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$ と対応する．点 P における S の接平面の式は，$(1/\sqrt{2})X + (1/\sqrt{3})Y + (1/\sqrt{6})Z = 1$. これに座標変換の式を代入することで，求める接平面の式が得られる．

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 6. (2 曲面の交わりの接線)**

求める直線 $\ell$ は, 点 P における $S_1$ の接平面 $\pi_1$ とも $S_2$ の接平面 $\pi_2$ とも平行である. $\pi_1, \pi_2$ の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ とおくと, 直線 $\ell$ の方向ベクトル $\vec{\ell}$ は $\vec{\ell} \perp \vec{n}_1, \vec{\ell} \perp \vec{n}_2$ を満たし, 以下のように求まる：

$$\vec{\ell} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって求める直線のベクトル表示は, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.　$(t \in \mathbb{R})$

**問題 7. (直観的理解)**

| $f(x,y)$ | (1) $-x^2-y^2$ | (2) $x^2+y^2$ | (3) $x^2-y^2$ | (4) $x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_{xx}(0,0)$ | $-2$ | $2$ | $2$ | $2$ |
| $f_{yy}(0,0)$ | $-2$ | $2$ | $-2$ | $0$ |
| $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\det H_f(0,0)$ | $4$ | $4$ | $-4$ | $0$ |
| 状況 | (i) | (ii) | (iii) | (iv) |
| 極値か？ | 極大 | 極小 | 極値ではない (鞍点) | 極値ではない |
| 概形 (各自描いてね) | | | | |

**問題 8. (2 変数関数の極値)**

(1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - y + 7$, $f_x(x,y) = 2x - y + 2$, $f_y(x,y) = -x + 2y - 1$.
$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くと, $(x,y) = (-1,0)$.

すべての点 $(x,y)$ において, $f_{xx}(x,y) = 2 > 0, \det H_f(x,y) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ であるから, 点 $(-1,0)$ においても, $f_{xx} > 0, \det H_f > 0$ が成り立つ. したがって, 関数 $f(x,y)$ は点 $(-1,0)$ で極小値 6 をとる.

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + 2xy + y^2$, $f_x(x,y) = 3x^2 + 2x + 2y$, $f_y(x,y) = 3y^2 + 2x + 2y$.
$f_x = f_y = 0$ を解くと, $(x,y) = (0,0), (-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

$\det H_f(0,0) = 0$ より, 原点に関しては詳しく調べる必要がある. すべての $x$ に対して $f(x,-x) = 0$ であるから関数 $f(x,y)$ は $y = -x$ 上の点 (原点を含む) では極値をとらない.

点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ に関しては, $f_{xx}(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = -6 < 0, \det H_f(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = (-6) \cdot (-6) - 2^2 = 32 > 0$ であるから関数 $f(x,y)$ は点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ で極大値 $\frac{64}{27}$ をとる.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 9. (宿題：8 点)**

(1) (4 点) 連続性について調べる. 極座標表示 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いる. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ を $r$ と $\theta$ で表すと

$$f(x,y) = \frac{|x|\,y}{x^2+y^2} = |\cos\theta|\sin\theta$$

で, 右辺は $\theta \neq n\pi/2$ $(n \in \mathbb{Z})$ のとき $r \to 0$ としても $0 = f(0, 0)$ に収束しない. したがって $f(x, y)$ は 原点において連続ではなく, 全微分可能でもない.

(2) (2 点) $\dfrac{f(h+1,0)-f(1,0)}{h} = \dfrac{0-0}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$, $\dfrac{f(1,0+k)-f(1,0)}{k} = \dfrac{1}{1+k^2} \xrightarrow{k\to 0} 1$.

よって点 A$(1, 0)$ においては $x$ に関しても $y$ に関しても偏微分可能である.

$\dfrac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h} = \dfrac{|h|}{h}\dfrac{1}{h^2+1} = \dfrac{\mathrm{sign}(h)}{h^2+1} \xrightarrow{h\to\pm 0} \pm 1$ (複号同順).

$\dfrac{f(0,1+k)-f(0,1)}{k} = \dfrac{0-0}{k} \xrightarrow{k\to 0} 0$.

よって点 B$(0, 1)$ においては $x$ に関しては偏微分可能でないが $y$ に関しては偏微分可能である.

(3) (2 点) $y - z = 0$

**問題 10. (宿題：12 点)**

(1) (6 点) 臨界点の候補は, $f_x = 0, f_y = 0$ より, $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

$\det H_f(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 4(a-3ax^2-by^2)(b-3by^2-ax^2)e^{-2(x^2+y^2)}$.

$f_{xx}(x,y) = 2(1-x^2)(a-ax^2-by^2) - 4ax^2$.

$(x, y) = (0, 0)$ のとき, $\det H_f = 4ab > 0$, $f_{xx} = 2a > 0$ より, 極小値 0 をとる.

$(x, y) = (\pm 1, 0)$ のとき, $\det H_f = 8a(a-b)e^{-2} > 0$, $f_{xx} = -4a < 0$ より, 極大値 $a/e$ をとる.

$(x, y) = (0, \pm 1)$ のとき, $\det H_f = 8b(b-a)e^{-2} < 0$ より, 極値をとらない.

(2) (6 点) 正の数 $\varepsilon$ を任意に与える.

関数 $g$ は連続であるから, 任意の点 $b \in \mathbb{R}$ において (正の数 $\varepsilon$ に対して) ある正の数 $\delta'$ が存在して

$$|y-b| < \delta' \;\Rightarrow\; |g(y)-g(b)| < \varepsilon. \cdots (*)$$

関数 $f$ は連続であるから, 任意の点 $a \in \mathbb{R}$ において (正の数 $\delta'$ に対して) ある正の数 $\delta$ が存在して

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \delta'. \cdots (**)$$

$(*)$, $(**)$ より,

$$|x-a| < \delta \overset{(**)}{\Rightarrow} |f(x)-f(a)| < \delta' \overset{(*)}{\Rightarrow} |g(f(x))-g(f(a))| < \varepsilon.$$

以上により, 任意の正の数 $\varepsilon$ と任意の点 $a \in \mathbb{R}$ について, $|x-a| < \delta \Rightarrow |g\circ f(x) - g\circ f(a)| < \varepsilon$ が示された. よって合成関数 $g \circ f$ は連続である.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 11. (ボーナス問題：ゼータ関数と特殊値：16 点)**

(1) (4 点) まず，数列 $\{a_n\}$ が単調増加数列であることは以下のように示される．

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

次に数列 $\{a_n\}$ が上に有界であることを示す．

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ とおくと $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ より，関数 $f(x)$ は $x>0$ で減少関数である．よって区間 $[k-1,k]$ で $\dfrac{1}{k^2}\leq\dfrac{1}{x^2}$ であるから，

$$\frac{1}{k^2}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^2}dx\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx.$$

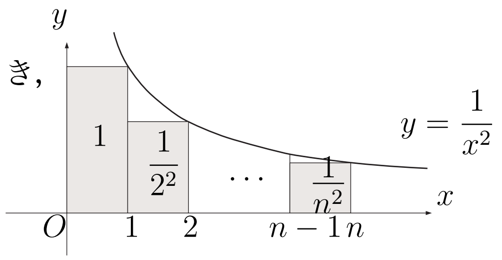
両辺 $k=2$ から $k=n$ まで和をとると

$$\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx=\int_{1}^{n}\frac{1}{x^2}dx<\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty}=1.$$

よって，$a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1+1=2$ (有限値)．これで数列 $\{a_n\}$ が上に有界であることが示された．

以上により数列 $\{a_n\}$ は収束することが示された．(証明終)

[**コメント 1**] $a_n$ は右図の斜線部分の面積に等しい．




[**コメント 2**] 上への有界性については，$n>2$ のとき，

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

であることを利用して示すこともできる．

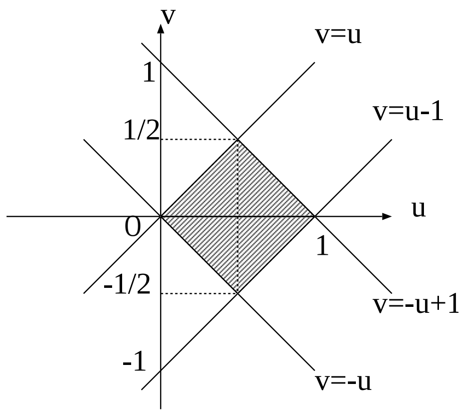
(2) (2 点) $I=\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 dy\, y^n\int_0^1 x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2).$$

(3) (2 点) $J(u,v)=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2$．また，

$0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$
$\Leftrightarrow 0\leq u-v\leq 1, 0\leq u+v\leq 1$
$\Leftrightarrow u-1\leq v\leq u, -u\leq v\leq -u+1.$

よって，$u,v$ 平面での積分領域は右図の斜線部分．(境界線上の点を含む.)



(4) (4 点) 前問の変数変換により,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} du \int_{-u}^{u} \frac{1}{1-u^2+v^2}|J(u,v)|dv + \int_{\frac{1}{2}}^{1} du \int_{u-1}^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}|J(u,v)|dv \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_{0}^{u} \frac{1}{1-u^2+v^2}|J(u,v)|dv + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} du \int_{0}^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}|J(u,v)|dv \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_{0}^{u} \frac{1}{1-u^2+v^2}dv + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} du \int_{0}^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}dv \end{aligned}$$

第 2 行目の式変形では，被積分関数が $v$ に関して偶関数であることを用いた．
$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ より,

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

(5) (4 点) 前問最後の式において，右辺第一項で $u=\sin\theta$, 右辺第二項で $u=\cos\theta$ の置換を行うと,

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\theta} \arctan\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta d\theta - 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{\sin\theta} \arctan\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)\sin\theta d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta)\, d\theta + 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

こうして有名な等式 $\displaystyle\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ が証明された．

なお無限和の部分は次のように無限積の形に書き換えることができる (ヒント：素因数分解の一意性)：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\cdots.$$

したがって

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1}$$

という関係式が得られるが, これはとても不思議な式である．左辺は素数全体に関する積であり, 整数論と関連する．右辺は円周率を含み, 幾何学的な情報を含んでいる．したがって等式 (1) は, 整数論と幾何学を結ぶ深遠な関係を示唆していると考えられる．(ちなみにこの関係式は 1735 年に天才数学者オイラーによって証明された.)