担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の微分積分 (主に復習)

作成日：October 15, 2022　Updated：October 19, 2022　Version：1.0　実施日：October 20, 2022

問題 1. (目覚まし問題：1 変数関数の連続性)

(1) $x=0$ では $f(x)=0$, $x\neq 0$ では $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ で定義される関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x=0$ において連続であることをイプシロン論法で示せ.

2 変数関数の連続性, 微分可能性

2 変数関数は 1 変数のときと違って、微分する方向がいろいろとあるため微分可能性の概念がやや複雑になる. 簡単に定義をまとめると, 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において,

- x に関して偏微分可能 $\Leftrightarrow$ $y=b$ として得られる x の関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能
- y に関して偏微分可能 $\Leftrightarrow$ $x=a$ として得られる y の関数 $f(a,y)$ が $y=b$ で微分可能
- 全微分可能 $\Leftrightarrow$ ある数 m,n が存在し $\displaystyle\lim_{h,k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-mh-nk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$

全微分可能性が条件として一番強く, 以下のような関係がある：

- 全微分可能 $\Rightarrow$ x と y に関して偏微分可能. (このとき $m=f_x(a,b), n=f_y(a,b)$.)
- 全微分可能 $\Rightarrow$ 連続

この対偶をとると次も言える：

- x または y に関して偏微分可能でない $\Rightarrow$ 全微分可能でない
- 連続でない $\Rightarrow$ 全微分可能でない

問題 2. (2 変数関数の連続性・全微分可能性) 原点以外で次のように与えられている関数 $f(x,y)$ に関して, 原点における連続性および全微分可能性を調べよ. ただし原点での値はすべてゼロであるとする：$f(0,0)=0$.

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$　　(3) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(ヒント：原点への近づき方を考察する必要がある. 原点での振る舞いを観察するには極座標 (r,θ) が有用. いろいろな断面 ($y=$(一定) とか $r=$(一定) とか) を考察することもとても重要.)

問題 3. (2 変数関数の連続性) 2 つの関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が点 (a,b) において連続であるとする. このとき関数の和 $f+g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が点 (a,b) において連続であることをイプシロン論法で示せ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

接平面の方程式

例題 1. (2 変数関数のグラフに対する接平面の方程式) 関数 $z=f(x,y)$ のグラフ（曲面）を考える.

(1) グラフの平面 $y=b$ による切り口に現れる曲線の，$x=a$ における接線 ℓ_x の方程式およびパラメーター表示を求めよ.

(2) 同様に，平面 $x=a$ による切り口に現れる曲線の，$y=b$ における接線 ℓ_y の方程式およびパラメーター表示を求めよ.

(3) ℓ_x と ℓ_y を同時に含む平面の方程式は

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられることを示せ．また，これが $(x,y)=(a,b)$ における $z=f(x,y)$ の接平面になっていることを納得せよ.

【解答】

(1) グラフの平面 $y=b$ による切り口に現れる曲線は $z=f(x,b), y=b$ で与えられる．接線 ℓ_x は平面 $y=b$ を xz 平面と思ったときの，曲線 $z=f(x,b)$ の $x=a$ における接線であるから，方程式として $\ell_x:\ z=f_x(a,b)(x-a)+f(a,b),\ \ y=b$ を得る．方向ベクトルとして $(1,0,f_x(a,b))$ が取れるから，$(a,b,f(a,b))$ を通ることより

パラメーター表示は $\ell_x:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\f(a,b)\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\f_x(a,b)\end{pmatrix}.\quad (t\in\mathbb{R})$

(2) (1) で x と y, a と b の役割を入れ替えればよい.

方程式は　$\ell_y:\ z=f_y(a,b)(y-b)+f(a,b),\ \ x=a.$

パラメーター表示は　$\ell_y:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\f(a,b)\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\f_y(a,b)\end{pmatrix}.\quad (t\in\mathbb{R})$

(3) ℓ_x と ℓ_y を同時に含む平面は，これらの直線の方向ベクトルに垂直な法線ベクトルをもつ．そのようなベクトルとして（たとえば外積を用いて）$(f_x(a,b),f_y(a,b),-1)$ を得る．よって求める平面は $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+(-1)\cdot(z-f(a,b))=0 \Leftrightarrow z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$

問題 4. (2 変数関数のグラフの接平面の方程式) 以下で与えられる 2 変数関数 $z=f(x,y)$ のグラフ上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ.

(1) $f(x,y)=x^2+y^3+5,\ (a,b)=(1,2).$　(2) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2),\ (a,b)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}},\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right).$

問題 5. (3 次元空間内の接平面の方程式)

(1) 球面 S：$x^2+y^2+z^2=R^2$ の点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 楕円球 E：$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{24}=1$ の点 $(1,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ.

問題 6. (2 曲面の交わりの接線) 3 次元空間において，2 曲面 $S_1:\ x^2+y^2+z^2=4$, $S_2:\ x^2+y^2=2x$ の交線 C 上の点 $\mathrm{P}(1,1,\sqrt{2})$ における接線 ℓ のベクトル表示を求めよ. (ただし, 2 曲面 S_1,S_2 の交点 P における接線とは点 P における S_1 の接平面と S_2 の接平面との交線を指す.)

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

2 変数関数の極値問題

点 (a,b) の近くで定義された C^2 級 2 変数関数 $f(x,y)$ の極大，極小を調べるには次のようにする．

(1) まず $f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$ となる点 (a,b) を探す．

(2) 次にこの点でのヘッセ (Hesse) 行列

$$H_f(a,b) := \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

の行列式 $\det H_f(a,b)$ を計算する．このとき

(i) $\det H_f(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば 極大

(ii) $\det H_f(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば 極小

(iii) $\det H_f(a,b) < 0$ ならば 鞍点 (極値ではない)

(iv) $\det H_f(a,b) = 0$ ならば これからは何も分からない．

問題 7. (直観的理解) 原点において $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ をみたす以下の関数 $f(x,y)$ の原点での状況は上記の (i)〜(iv) のどれに属するか？

(1) $-x^2-y^2$　(2) x^2+y^2　(3) x^2-y^2　(4) x^2

問題 8. (2 変数関数の極値) 次の関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-y+7$　(2) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$

今週の宿題 (提出期限は 10 月 23 日 24 時厳守です)

問題 9. (宿題) 原点では $f(x,y)=0$, 原点以外では $f(x,y)=\dfrac{|x|y}{x^2+y^2}$ で定義される関数 $f(x,y)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の原点における連続性および全微分可能性を調べよ．(イプシロン論法を用いなくてもよいが説明はきちんと与えること.)

(2) $f(x,y)$ の点 $\mathrm{A}(1,0)$, 点 $\mathrm{B}(0,1)$ における偏微分可能性を調べよ．

(3) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\mathrm{A}(1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

問題 10. (宿題)

(1) 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$　(ただし $a>b>0$) の極値を求めよ．

(2) 2 つの 1 変数関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続であるとき，合成関数 $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ も連続であることをイプシロン論法で示せ．

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

今週のボーナス問題 (提出期限は 10 月 23 日 24 時厳守です)

問題 11. (ボーナス問題：ゼータ関数とその特殊値)

数学において重要な関数というものはいくつもあるが, 数論において特に重要なものとして, ゼータ関数というものがある.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

s はとりあえずここでは $s > 1$ の実数であるとする. 特殊値 $\zeta(2)$ の値を計算しよう：

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

(1) (ウォーミング・アップ) まず無限和 $\zeta(2)$ が収束することを, 数列

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

の単調増大性と有界性を示すことで証明せよ.

(2) 天下りであるが, 次の 2 変数積分を考える：

$$I = \int\int_D \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$$

$\displaystyle\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $(|t| < 1)$ を利用して, まず $I = \zeta(2)$ を示せ. (項別に積分できることはここでは認めて構わない.)

(3) ここから 2 変数積分 I を別な方法で具体的に計算する. まず変数変換

$$u = \frac{y+x}{2},\ v = \frac{y-x}{2}$$

を施す. この変数変換におけるヤコビアンの大きさ $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ は何か？ また積分領域 D を u, v 平面に図示せよ.

(4) 前問の変数変換により求める積分 I は

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv\right) du$$

となることが分かる. (被積分関数の $v \to -v$ の対称性に注意.) これを示し, v についての積分を実行せよ. (ヒント：$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$ の積分値は？)

(5) 前問の計算により,

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

が得られている (はずである). 右辺第一項で $u = \sin\theta$, 右辺第二項で $u = \cos\theta$ の置換を行い, この積分値を評価せよ. (答えは $\dfrac{\pi^2}{6}$.)