担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

2 年前期の復習 (略解)

作成日：October 12, 2022　Updated：October 19, 2022

問題 1. (1 変数関数の微分)

(1) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$　(2) $\dfrac{1}{1+x^2}$　(3) $\dfrac{-1}{1-x}$

(4) $\dfrac{1}{x\log x}$　(5) $a^x \log a$　(6) $x^x(\log x + 1)$

[コメント] (2) まず欲しいのは $\dfrac{dy}{dx}$. $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ の両辺を x で微分する. すなわち両辺に $\dfrac{d}{dx}$ を作用させる. 左辺は y の式だから $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d}{dy}$ と変形して作用させる.
(5)&(6) べきが複雑なものは対数をとるのが常道. なお (5) については, 恒等式 $a = e^{\log a}$ を用いると $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ に帰着.

問題 2. (テイラー展開の一意性)

(1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 +$(4 次以上).

(2) $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} -$(4 次以上). ((2) を 両辺積分.)

(3) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} -$(4 次以上). ($\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 -$(3 次以上) を両辺積分.)

(4) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 -$(5 次以上).

(5) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} -$(6 次以上). ((4) を 両辺積分.)

[コメント] テイラー展開の剰余項を除いた部分の一般式はきれいな形をしている. この部分は具体的表式を忘れても以下のように簡単に再現できる. 例えば、$x = 0$ まわりでのテイラー展開を 5 次まで求めたいとしよう. 展開係数を以下のようにおく：

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + R_6 x^6.$$

a_0 を求めたければ両辺 $x = 0$ を代入すればよい：$f(0) = a_0$.
a_1 を求めたければ両辺 x で 1 回微分してから $x = 0$ を代入すればよい：$f'(0) = 1 \cdot a_1$.
a_2 を求めたければ両辺 x で 2 回微分してから $x = 0$ を代入すればよい：$f^{(2)}(0) = 2! \cdot a_2$.
a_3 を求めたければ両辺 x で 3 回微分してから $x = 0$ を代入すればよい：$f^{(3)}(0) = 3! \cdot a_3$.
a_n を求めたければ両辺 x で n 回微分してから $x = 0$ を代入すればよい：$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$.
非自明なのは剰余項の形である. なお無限テイラー展開の場合は収束性の問題がからむ.

問題 3. (1 変数関数の極限)　この手の問題は複雑な関数部分をテイラー展開するのが基本である. ランダウの記号を用いると (書くのに時間がかからず) 便利.

(1) $$\frac{e^x + \log(1-x) - 1}{x - \arctan x} = \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - 1}{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}.$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) $$\frac{2x+\log(1-x)-\log(1+x)}{2x-e^x+e^{-x}}$$
$$=\frac{2x+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{2x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)+\left(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}$$
$$=\frac{-\frac{2}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}\xrightarrow{x\to 0}2.$$

(3) $\log(3/2)$

問題 4. (質量とエネルギーの等価性) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$ より, $x=\dfrac{v}{c}$ として,
$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+o((v/c)^2)\right)=mc^2+\frac{1}{2}mv^2+o((v/c)^2).$$
右辺第 2 項は, 物体の (非相対論的) 運動エネルギーである. 右辺第 1 項は, v によらない物体固有のエネルギー (静止エネルギーという) であり, 質量とエネルギーの等価性を表している.

問題 5. (オイラーの公式)

(1) 各自で是非行ってください. (黒板で実演します)

(2) e^{z+w} に, $z=i\theta$, $w=i\varphi$ $(\theta,\varphi\in\mathbb{R})$ を代入すると, $e^{i(\theta+\varphi)}=\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)$ が得られる. 一方, e^ze^w に, $z=i\theta$, $w=i\varphi$ $(\theta,\varphi\in\mathbb{R})$ を代入すると
$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\varphi}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\&=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi+i(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi).\end{aligned}$$
$e^{i(\theta+\varphi)}=e^{i\theta}e^{i\varphi}$ の実部, 虚部を見比べることで三角関数の加法定理が得られる.

(3) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta.$

問題 6. (オイラーの公式とその応用)

(1) $A=z+z^2+\cdots+z^n$ と $zA=z^2+z^3+\cdots+z^{n+1}$ の辺々を引くと, $(1-z)A=z-z^{n+1}$. $z\neq 1$ より, $A=\dfrac{z-z^{n+1}}{1-z}$. **[コメント]** (とてもささやかなことですが) 等比数列の和の公式というのは覚えないように！項数を数えるときに間違ってしまうものです (人間だものの法則). 左の導出を頭の中で常に行いましょう. そうすると分子は「(初項)−(末項)×(公比)」あるいは「(初項)−(末項の次の項)」です. (項数を数える必要はありません.) 分母の形も分かりますよね.

(2) 以下の有限和を計算し, 実部, 虚部を比較すると答えが得られる.
$$\begin{aligned}C+iS&=e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{(n+1)i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta}(1-e^{ni\theta})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}})}=e^{\frac{i\theta}{2}}\frac{e^{\frac{ni\theta}{2}}(e^{-\frac{ni\theta}{2}}-e^{\frac{ni\theta}{2}})}{e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}}\\&=e^{\frac{(n+1)i\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\left(\cos\frac{(n+1)\theta}{2}+i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(3) 前問の結果より,

- $C=0$ を満たす θ は, $\sin\dfrac{n\theta}{2}=0$, $\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}=0$ より,
  $\theta=\dfrac{2\pi}{n}k\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, $\dfrac{2\pi}{n+1}\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\ (l=0,1,2,\cdots,n)$.
- $S=0$ を満たす θ は, $\sin\dfrac{n\theta}{2}=0$, $\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}=0$ より,
  $\theta=\dfrac{2\pi}{n}k\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, $\dfrac{2\pi}{n+1}l\ (l=1,2,\cdots,n)$.

問題 7. (複素数と図形)

$w=\dfrac{1+z}{1-z}$ を z について解くと $z=\dfrac{w-1}{w+1}$. ($w=-1$ は与式を満たさない.)
これが単位円の内部 $|z|<1$ にあるので, $|w-1|<|w+1|$. これは w 平面において点 -1 からの距離が点 1 からの距離より大きい点全体を表す. ((2) の結果と照らし合わせると) これは 2 点 $(-1), 1$ の垂直 2 等分線で分けられる領域のうち点 1 を含む側である. すなわち求める領域は $f(D)=\{w\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\ w>0\}$. (図示は各自お願い.)

[**別解**] (以下のように実部・虚部に分けて解いてもよい.) $z=x+iy, w=u+iv$ とおくと, $z=\dfrac{w-1}{w+1}=\dfrac{(u^2+v^2-1)+2iv}{(u+1)^2+v^2}$. これが単位円の内部 $|z|<1$ にあるので, $\dfrac{(u^2+v^2-1)^2+4v^2}{\{(u+1)^2+v^2\}^2}<1$. これより $u>0$ が得られる.

[**コメント**] 軌跡・領域を求めるときの鉄則は「分からないもの (w の関係式) を分かるもの (z の関係式) に代入せよ！」です.

問題 8. (コーシーの積分公式の応用：部分分数化)

(1) $(*)$ の両辺に $z^3-1\ (=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2))$ を掛けると,

$$1=A(z-\omega)(z-\omega^2)+B(z-1)(z-\omega^2)+C(z-1)(z-\omega).$$

この式に, $z=1,\omega,\omega^2$ を代入すると, $A=\dfrac{1}{3}, B=\dfrac{1}{3\omega^2}, C=\dfrac{1}{3\omega}$ が得られる.

[**コメント**] $z=1,\omega,\omega^2$ を代入する際, 右辺の $(z-\omega)(z-\omega^2)$ などを展開しないことがポイントです. (そうすれば, 例えば $z=1$ を代入した際, 右辺第 2・3 項が 0 になることがただちにわかります.)

(2) (1) の結果を与式に代入すると,

$$I=\frac{1}{3}\int_C\frac{z^2}{z-1}dz+\frac{1}{3\omega^2}\int_C\frac{z^2}{z-\omega}dz+\frac{1}{3\omega}\int_C\frac{z^2}{z-\omega^2}dz$$

となる. 複素平面の点 $z=1,\omega,\omega^2$ はすべて閉曲線 C の内部に存在する.

したがってコーシーの積分公式より,

$$I=\frac{1}{3}\cdot 2\pi i 1^2+\frac{1}{3\omega^2}\cdot 2\pi i\omega^2+\frac{1}{3\omega}\cdot 2\pi i(\omega^2)^2=2\pi i.$$

担当教員：浜中 真志 研究室：理学部 A 館 327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 9. (コーシーの積分定理の実積分への応用)

(1) $f(z) = e^{-z^2}$ とおき, 図の積分路 C で積分する. $f(z)$ は C の内部で正則だから, コーシーの積分定理より $I_C = \displaystyle\int_C f(z)dz = 0.$

(2) AB 上では $z = x, \ -R < x < R$ として,

$$\int_{\mathrm{AB}} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} I_{\mathrm{AB}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

(3) BC 上では, $z = R + is, \ 0 < s < k$ として,

$$\left|\int_{\mathrm{BC}} f(z)dz\right| \ \leq \ \int_0^k |e^{-(R+is)^2}|ds = e^{-R^2}\int_0^k e^{s^2}ds \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

よって $I_{\mathrm{BC}} = 0$. 同様に $I_{\mathrm{DA}} = 0$ も示される.

(4) CD 上では, $z = ik + t, \ -R < t < R$ として,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{CD}} f(z)dz &= \int_R^{-R} e^{-(ik+t)^2}dt = -\int_{-R}^{R} e^{-(t^2-k^2)}e^{-2ikt}dt \\ &= -e^{k^2}\int_{-R}^{R} e^{-t^2}(\cos 2kt - i\sin 2kt)dt \\ &= \int_0^R e^{-t^2}\cos 2kt dt \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} I_{\mathrm{CD}} = -2e^{k^2}J.\end{aligned}$$

$I_C = I_{\mathrm{AB}} + I_{\mathrm{BC}} + I_{\mathrm{CD}} + I_{\mathrm{DA}} = 0$ より, $R \to \infty$ の極限で以下が得られる.

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2kx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-k^2}.$$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10. (宿題：10 点)

(1) (2 点) 与式の第 2 項は公比 $-t^2$ の等比数列の和であるから,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{1+t^2} - (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-t^2)^n) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \\ &= \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \end{aligned}$$

(2) (3 点) もとの式とまとめた式を 0 から x $(0 < x \leq 1)$ まで積分すると,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} - (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-t^2)^n) \right) dt \\ &= \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right), \\ (\text{右辺}) &= \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

よって両辺の絶対値をとると,

$$\begin{aligned} \left| \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \right| &= \left| \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^x \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \right| dt \\ &< \int_0^x \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{1} \right| dt \\ &= \int_0^x t^{2n+2}\, dt \\ &= \frac{1}{2n+3} x^{2n+3}. \end{aligned}$$

(3) (1 点) $f(x) = \arctan x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} x^{2m+1}$

(4) (2 点) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を (4) の両辺に代入すると,

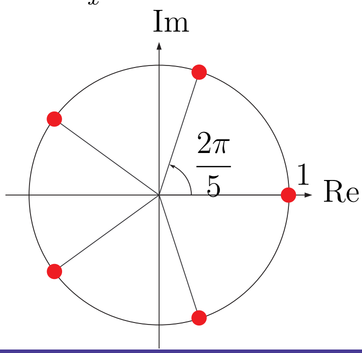
$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}.$$

[コメント] 前問で得られた無限和表示は $x = 1$ でも成り立つことが (2) の証明より分かります．ですので $x = 1$ を代入すると $\pi/4$ の無限和表示が正しい式として得られます．

(5) (2 点) $\displaystyle \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \arctan x} = \frac{(1 + x^2 + o(x^2)) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} \xrightarrow{x \to 0} \frac{3}{2}$

問題 11. (宿題：10 点)

(1) (2 点) $z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと,
$z^5 = 1$ より, $r^5 e^{5i\theta} = e^{2\pi i k}$, $(k \in \mathbb{Z})$.
これより, $r = 1$, $\theta = (2\pi/5)k$ が得られる.
したがって求める複素数は, $0 \leq \theta < 2\pi$
に注意すると, $z = e^{i\frac{2\pi}{5}k}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$.
複素平面に図示すると, 右図のようになる.



担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) (3 点) $\omega \neq 1$ より, $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$. (←与式左辺を右から読んで公比 ω の等比数列の和と解釈した.) この両辺を $\omega^2\ (\neq 0)$ で割ると, $\omega^2+\omega+1+\omega^{-1}+\omega^{-2} = 0$, よって, $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega+\omega^{-1})-1=0$. したがって求める値は, 2 次方程式 $t^2+t-1=0$ の解である. $\omega+\omega^{-1}>0$ に注意すると, $\omega+\omega^{-1} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(3) (2 点) $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \mathrm{Re}\,\omega = \dfrac{\omega+\overline{\omega}}{2} = \dfrac{\omega+\omega^{-1}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(4) (3 点) $w = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと, $w^2 = \bar{w}^3$ より, $r^2e^{2i\theta} = r^3e^{-3i\theta}$, すなわち, $r^2(re^{-5i\theta}-1)=0$. よって, $r=0$ または $re^{-5i\theta} = 1 = 1\cdot e^{2\pi ik}$, $k \in \mathbb{Z}$. 以上より, 求める答えは, $w = 0, 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$. (図示は, 前ページ図の解 5 点 (赤い点) と原点)

[**コメント**] $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を用いると大変になります. (なお w と ω を区別して書けるように各自工夫してくださいね.)

問題 12. (ボーナス問題：13 点)

(1) (2 点) $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1$.

(2) (3 点) 部分積分により, $J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$ が示され, 与式 (漸化式) が導かれる.

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}J_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}J_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}J_0 \\ J_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}J_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}J_{2n-3} = \cdots = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}J_1. \end{aligned}$$

(3) (2 点) $0 < x < \pi/2$ のとき $0 < \sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x < 1$ に注意すると,

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx}_{=0} < \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x dx}_{=J_{2n+1}} < \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx}_{=J_{2n}} < \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x dx}_{=J_{2n-1}} < \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx}_{=\pi/2}.$$

両辺 J_{2n+1} で割り $n\to\infty$ の極限をとると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1$, すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}} = 1$.

(4) (2 点) $\sqrt{n}J_{2n+1}\sqrt{\dfrac{J_{2n}}{J_{2n+1}}} = \sqrt{nJ_{2n+1}J_{2n}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4+(2/n)}}$. 両辺 $n\to\infty$ の極限をとる.

(5) 詳細は例えば 高木貞治「解析概論」(岩波書店) などを参照.

(a) (1 点) 単純計算. $\sin^{2n}x = (1-t^2)^n$ に注意.

(b) (1 点) 単純計算. $\sin^{2n}x = (1+t^2)^{-n}$ に注意.

(c) (2 点) 被積分関数に関して $(1-t^2)^n < e^{-nt^2} = (e^{-t^2})^n < (1+t^2)^{-n}$ より.