担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

2 年前期の復習 (2022 年 10 月 13 日)

作成日：October 12, 2022　Updated：October 15, 2022　実施日：October 13, 2022

1 変数実関数

問題 1. (目覚まし問題：1 変数関数の微分) 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\tan x$　(2) $\arctan x$　(3) $\log(1-x)$

(4) $\log\log x$　(5) a^x $(a>0)$　(6) x^x

[**ロピタルの定理**] $f(x), g(x)$ は点 a の近くで定義されていて, 微分可能とする. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ で, $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

この定理は $a=\pm\infty$ のときも, 片側極限や $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形のときにも同様に成り立つ.

[**有限テイラー展開**] 関数 $f(x)$ が開区間 I において n 回微分可能とする. I の点 a を固定すると, 各 $x\in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する. この右辺を, $x=a$ における有限テイラー展開という. 特に $a=0$ のとき, 有限テイラー展開は有限マクローリン展開とも呼ばれる:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

問題 2. (テイラー展開の一意性) 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を求めよ. (x の 3 次ぐらいまででよい. 解答例：$e^x = 1 + x + (1/2!)x^2 + (1/3!)x^3 +$(4 次以上).)

(1) $\frac{1}{1-x}$　(2) $\log(1-x)$　(3) $\log(1+x)$　(4) $\frac{1}{1+x^2}$　(5) $\arctan x$

問題 3. (1 変数関数の極限) 次の極限をテイラー展開を用いて求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \log(1-x) - 1}{x - \arctan x}$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{2x + \log\frac{1-x}{1+x}}{2x - e^x + e^{-x}}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x - 2^x}{x}$

問題 4. (質量とエネルギーの等価性) アインシュタインの相対性理論によれば, ある物体が速さ v で等速直線運動しているとき, そのエネルギーは

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

で与えられる. ただし c は光速, m は物体の静止質量を表し, 共に v によらない定数である. 速さ v が光速 c に比べて十分小さいとき, エネルギー E を v の 2 次までテーラー展開し, 各項の物理的意味を解釈せよ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

複素数, 複素平面

問題 5. (オイラーの公式)

(1) $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ に $z = i\theta$ を代入し, オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ が成り立つことを確認せよ. (5 次まででよい)

(2) 指数関数の指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ に, $z = i\theta$, $w = i\varphi$ $(\theta, \varphi \in \mathbb{R})$ を代入し, 三角関数の加法定理を導け.

(3) ド・モアブル (de Moivre) の公式を, 指数法則を用いて示せ.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \qquad n \in \mathbb{N}$$

問題 6. (オイラーの公式とその応用) オイラーの公式を用いて $0 < \theta < 2\pi$ の範囲で $C = 0$ および $S = 0$ を満たす θ をすべて求めてみよう (C, S の定義は以下の通り):

$$C = \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta, \quad S = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta,$$

(1) z を $z \neq 1$ となる複素数とする. 等比数列の和 $A = z + z^2 + \cdots + z^n$ の公式を導け.

(2) C, S を式変形し, 各々を, $\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ に比例し, かつ虚数単位 i をあらわに含まない形に表せ. (ヒント: $C + iS$ を考え, オイラーの公式を用いよ.)

(3) $0 < \theta < 2\pi$ の範囲で $C = 0$ および $S = 0$ を満たす θ をすべて求めよ.

問題 7. (複素数と図形) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ によって, z 平面上の単位円の内部 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ は w 平面にどのようにうつされるか. 変換前の領域 D と変換後の領域 $D' = f(D)$ を図示せよ.

コーシーの積分定理・積分公式

> **定理 1.** D を複素平面内の領域とし, その境界を $C = \partial D$ とする. (C は区分的になめらかな有向曲線とし, その向きは D の内部が進行方向の左手となるように定められているとする.) $f(z)$ が $D \cup \partial D$ を含む領域で正則な関数のとき, 以下が成り立つ.
>
> - **[コーシーの積分定理]** $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$
> - **[コーシーの積分公式]** $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a) \quad a \in D$

問題 8. (コーシーの積分公式の応用：部分分数化) 1 の 3 乗根のうち虚部が正のものを ω と表す. 積分路を $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 7\}$. としたとき, 次の複素線積分の値をコーシーの積分公式を用いて求めよう (積分路の向きは反時計まわりとする):

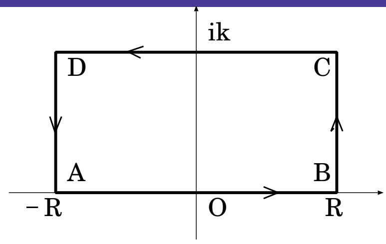
$$I = \int_C \frac{z^2}{z^3 - 1}dz.$$

(1) 以下の部分分数展開を考える. 展開係数 A, B, C を求めよ.

$$\frac{1}{z^3 - 1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\omega} + \frac{C}{z-\omega^2} \cdots (*).$$

(2) これを利用して，積分値 I を求めよ.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp



問題 9. (コーシーの積分定理の実積分への応用)
右図に与えられた周回積分路 C =AB+BC+CD+DA に沿った複素関数 $f(z) = e^{-z^2}$ の線積分を利用して実積分の値 $J = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2kx dx\ (k>0)$ を求めよう.

ガウス積分の値 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ は既知としてよい (cf. 今週のボーナス問題).

(1) $I_C := \int_C f(z)dz$ の値はいくらか？(答えのみでよい)

(2) $I_{\mathrm{AB}} := \lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{AB}} f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $I_{\mathrm{BC}} := \lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{BC}} f(z)dz$ の値がゼロになることを示せ. (同様に $I_{\mathrm{DA}} := \lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{DA}} f(z)dz$ の値もゼロになる.)

(4) $I_{\mathrm{CD}} := \lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{CD}} f(z)dz$ の値を J を用いて表し, 以上の結果と合わせて与えられた実積分 J を求めよ.

今週の宿題 (提出期限は 10 月 16 日 (日)24 時厳守です！。NUCT の課題ページから提出)

問題 10. (宿題：無限テイラー展開) $f(x) = \arctan x$ の $x=0$ まわりでの無限テイラー展開を求めよう. そのために以下の関数を考える.

$$f(t) := \frac{1}{1+t^2} - (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-t^2)^n).$$

(1) まず, この式の第 2 項を等比数列の有限和として計算し, 以下を示せ: $f(t) = \dfrac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$

(2) もとの式と (1) でまとめた式を 0 から x $(0 < x \leq 1)$ まで積分し,

$$\left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| < \frac{1}{2n+3}x^{2n+3}$$

を示せ. (ヒント：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ に注意.)

(3) 両辺, $n\to\infty$ 極限を取ることで, $f(x) = \arctan x$ の $x=0$ まわりでの無限テイラー展開を求めよ.

(4) 次の等式を示せ.

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}.$$

(5) 次の極限を求めよ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x\arctan x}$

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 11. (宿題：1 の 5 乗根)

(1) $z^5 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求め, 複素平面に図示せよ.

(2) (1) の解の中で $\mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0$ の領域にあるものを ω と表す. $\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1 = 0$ を示せ. これを用いて, $t := \omega + \omega^{-1}$ が満たす 2 次方程式を導出し, t の値を求めよ.

(3) $\cos(2\pi/5)$ の値を求めよ.

(4) $w^2 = \overline{w}^3$ を満たす複素数 w をすべて求め, 複素平面に図示せよ.

今週のボーナス問題 (提出期限は 10 月 16 日 24 時厳守です！)

問題 12. (ボーナス問題：Wallis の公式とその応用) $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) J_0, J_1 の値を求めよ.

(2) 部分積分により $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}\ (n \geq 2)$ を示し, 一般項 J_{2n}, J_{2n+1} を求めよ.

(3) 前問の結果より以下が成り立つことが分かる:$\dfrac{\pi}{2}\dfrac{J_{2n+1}}{J_{2n}} = \dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\dfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\dfrac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

$0 < J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1} < 1$ を示し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}} = 1$ を示せ. (注: $\dfrac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$.)

以上により, 以下の公式が導かれた. (ただし $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right).$$

これをウォリス (Wallis) の公式という. (円周率 π の無限積表示の一つ.)

(4) ウォリスの公式にはさまざまな応用がある. まず, $J_{2n+1}J_{2n}$ を簡潔に表し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}J_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ. (ヒント：$\sqrt{n}J_{2n+1}\sqrt{\dfrac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$ を簡潔に表し, (2) の結果とあわせる.)

(5) 以上の結果を用いてガウス積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めてみよう.

(ア) 変数変換 $t = \cos x$ を行うことで, $J_{2n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$ を示せ.

(イ) 変数変換 $t = \cot x := 1/\tan x$ を行うことで, $J_{2n-2} = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ を示せ.

(ウ) 変数変換 $x = \sqrt{n}t$ を行うと, $I = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-nt^2}dt$ である. また, $-1 \leq x \leq 1$ に対して $1 - x^2 < e^{-x^2}$, すべての実数 x に対して $e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立つ. (以上は既知としてよい.) このとき, $\sqrt{n}J_{2n+1} < I < \sqrt{n}J_{2n-2}$ が成り立つことを示せ.
(これと (4) の結果をあわせると, $I = \sqrt{\pi}/2$ が得られる.)