担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

べき級数・収束半径 (2019年5月13日)

作成日：May 11, 2019 Updated：May 12, 2019 Version：1.0 実施日：May 13, 2019

自主アンケート集計結果 (4月22日 (月) 実施分、回答数 約45名)

題材の難易度: (1) ちょうど (34名) (2) 難しい (9名) (3) 簡単 (1名) (4) ?(1名)
説明の速さ・分かりやすさ: (1) 問題なし (41名) (2) 問題あり (2名) (3) ?(1名)
板書の見やすさ: (1) 問題なし (44名) (2) 問題あり (1名) (3) ?(0名)
雑談の量: (1) ちょうど (39名) (2) 多い (1名) (3) 少ない (4名) (4) ?(2名)
(参考) 中間試験: (1) 実施を希望 (14名) (2) 希望しない (13名) (3) どちらでもよい (18名)

アンケートにご協力どうもありがとうございました. 上記の通り概ね問題ないと判断しましたので, 概ねこれまで通りで行きます. 題材が「難しい (9名)」ということでしたが, 私の説明の仕方に問題があると受け止めていますので, 今後はもっと明快に丁寧に説明していくつもりです. なお, 分からないことがあったら **遠慮なくご質問くださいね.**

中間試験についてのアンケートは参考として実施しました. よっぽどの強い希望があれば中間試験実施も検討しましたが, 半々ぐらいの結果でしたので当初の予定通り**中間試験は行わず, 期末試験のみといたします.** ただし期末試験に万全の体勢で臨めるよう, 最終回の7月22日は総まとめ (おそらく期末試験予想問題実践演習) にしようかと思ってます. 今後もご希望などありましたら随時受け付けますので気軽におっしゃってください.

先週 4/22 のプリント H002 問題 2 解答の訂正

先週のプリントの「問題 2. (オイラーの公式とその応用) 」の (3) に解答を書きましたが, 間違いがございましたので訂正いたします.

まず, θ の範囲を最初から $\theta = 0$ を除外して, $0 < \theta < 2\pi$ とします. (冒頭の「$0 \leq$」を「$0 <$」に修正します.) 最後の答えのところに「$\theta = 0$ を除く」と書き加えてください. (修正版をホームページに掲載してます.)

$\theta = 0$ の場合は小問 (1), (2) で公比1の場合に対応するので (場合分けが必要になるし) 問題の主旨からそれるので除外しました. この場合も含めて解答を求められたら, (1), (2) の議論は使えませんので, 別途最初から考えます. このときは $C = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \neq 0$, $S = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. よって $\theta = 0$ は $S = 0$ の解となるが $C = 0$ の解とならない.

ギリシャ文字の表

大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み
A	α	alpha	I	ι	iota	P	ρ, ϱ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ, (ς)	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Υ	υ	upsilon
E	ϵ, ε	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ, φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ, ϑ	theta	Π	π, (ϖ)	pi	Ω	ω	omega

手書きの際, 以下の区別が付くように工夫しましょう：ϕ と φ と ψ, δ と σ, ξ と ζ 等. またアルファベットと似た文字にも注意しましょう：γ と r, θ と $\mathcal{O}$, ι と i, κ と k, μ と u, ν と v, ρ と p, τ と t, χ と x, ω と w 等.

担当教員：浜中 真志　研究室：理学部 A 館 327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

複素数列・べき級数・収束半径

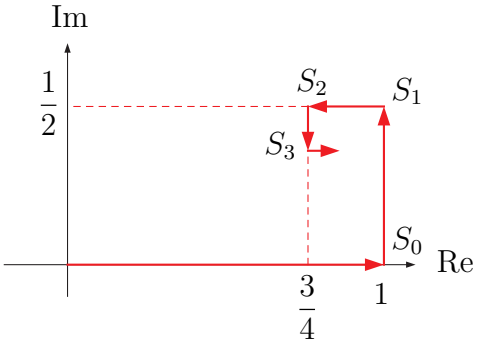
例題 1. (複素数列) $n=0,1,2,\cdots$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$ で定義する. また $S_n:=a_0+a_1+\cdots+a_n$ とおく.

(1) $S_0=a_0$, $S_1=a_0+a_1$, $S_2=a_0+a_1+a_2$, $S_3=a_0+a_1+a_2+a_3$ を複素平面に図示せよ.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

【解答】

(1) $S_0=a_0=1$, $S_1=a_0+a_1=1+i/2$, $S_2=a_0+a_1+a_2=3/4+i/2$, $S_3=a_0+a_1+a_2+a_3=3/4+(3/8)i$. これらを図示すると下図 のようになる.



(2)
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots\right\}+\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots\right\}i$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}}i=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i.$$

[**コメント**] 複素数の無限和の収束先は, 複素平面を用いると幾何学的にも理解できる. 無限和で定義された複素数の指数関数の値は, ある z を代入したときの無限和の値であり, 指数関数の場合は必ず複素平面上のどこかの点 (原点からの距離が有限) に限りなく近づく.

問題 1. (収束半径) べき級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 R は, 次の極限値 (左辺) が存在すれば, その逆数に等しい ($1/\infty=0, 1/0=\infty$ と約束する):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R},\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

次のべき級数の収束半径 R を求めよ.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(5^n-13)z^n$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$　　(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$