担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

一次変換

作成日：April 17, 2016　Updated：May 29, 2017　実施日：April 19, 2016

一年の数学演習で取扱いが不十分だった一次変換の話題を議論します. 特に点や図形がどのようなものに写されるかを求め「写像」のイメージを養います. 特に線形性の帰結により, 「まっすぐな図形 (直線, 平面)」は「まっすぐな図形」に写されます. 一次変換は行列として具体的に表現することができ, その行列式の幾何学的意味は「体積の変化率」として見えてきます.

今後の予定 (変更の可能性あり)

- 4/26 : $\varepsilon - N$ 論法 : 数列の収束
- 5/3 : 祝日 (休講！)
- 5/10 : $\varepsilon - \delta$ 論法 : 関数の連続性

定義 1. U, V を ($\mathbb{R}$ 上の) 線形空間とする (つまり U と V には各々和とスカラー倍が定義されているとする). U から V への写像 $f : U \to V$ が線形写像であるとは, 次の 2 つの条件を満たしているときをいう :

$$\text{任意の } \vec{a}, \vec{b} \in U \text{ に対して } \; f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}),$$
$$\text{任意の } \vec{a} \in U \text{ と } \lambda \in \mathbb{R} \text{ に対して } \; f(\lambda\,\vec{a}) = \lambda\, f(\vec{a}).$$

$V = U$ のとき, すなわち, f が U から U 自身への線形写像であるとき, f を U の線形変換 (一次変換) ともいう. ($\mathbb{C}$ 上の場合も同様.)

以後, $U = V = \mathbb{R}^n$ とする. 標準基底に関して線形写像 f を $n \times n$ 行列 A として表現することができる. このとき線形写像 f を A **より定まる一次変換**という.

たとえば $n = 2$ のとき, 実数係数 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 以下のように一次変換が定まる :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

この変換において, 行列式 $\det A$ は「面積の変化率」を表す.

定義 2. 写像 $f : U \to V$ が与えられたとき,

- U の部分集合 C に対して, $f(C) := \{v \in V \mid f(u) = v,\ u \in C \subseteq U\}$ を, f による C の像という. 特に, $f(U)$ のことを単に写像 f の像という.
- V の部分集合 D に対して, $f^{-1}(D) := \{u \in U \mid f(u) = v,\ v \in D \subseteq V\}$ を, f による D の原像という.

像とは写像によって部分集合 C が写る先の集合のことであり, 原像とは部分集合 D へ写るような点全体の集合のことである. A による一次変換による像, 原像を求めることで線形写像に対する視覚的なイメージを持つことができる.

なお, 原像 $f^{-1}(D)$ は逆写像 (逆関数) とは異なる概念である.

2 次元平面での一次変換

例題 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換を考える.

(1) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の A による一次変換で写った先の点を求め, 図示せよ.

(2) $\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の A による一次変換で写った先の点を求め, 図示せよ. また一般に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はどこへ写るか考えよ.

(3) $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ. また $A\vec{e_1}$, $A\vec{e_2}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ. さらに $\det A$ を求めよ.

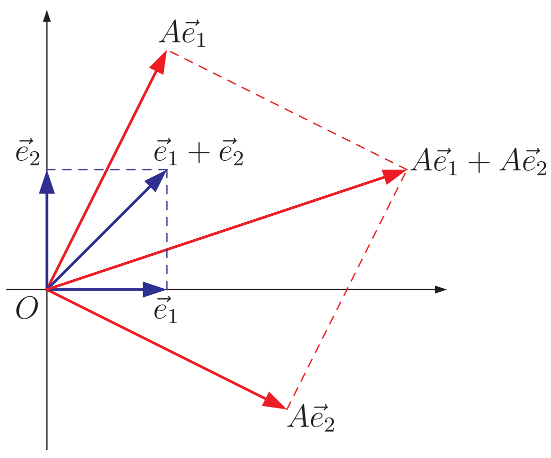
(4) 直線 $l : x + y = 1$ が A による一次変換によって写った先の図形 L の方程式を求めよ.

(5) A による一次変換によって曲線 $C : 3x^2 - 8xy - 3y^2 + 25 = 0$ へ写る図形 H の方程式を求めよ.

【解答】

(1) $A\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $A(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = A\vec{e_1} + A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



[**コメント**] $n \times n$ 行列 A が具体的に与えられたとき, (標準的) 単位ベクトル $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$ の像は, それぞれ A の第 $1, 2, \cdots, n$ 列に等しい. 逆に A が分からないときは, 単位ベクトル $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$ の写る先を求めれば, その情報から A がすぐに求まることが分かる.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(3) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ で張られる平行四辺形の面積: 1. $A\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2$ で張られる平行四辺形の面積: 5. $\det A = -5$.
[コメント] 写る前の面積と写った後の面積比は $|\det A|$ であり, $\det A$ の符号は正なら同じ向き, 負なら反対向きを表す.

(4) まずは素朴にベクトル表示の式から写る先を求めてみる. 直線 l のベクトル表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

と表される. よって, この点の A による一次変換によって写る先 (X, Y) は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + tA\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であり, $3X + Y - 5 = 0$ を満たす. よって, 求める図形 L は直線であり, その方程式は $3x + y - 5 = 0 \cdots$ (答).

[別解] 軌跡と領域を求める問題の常道で解いてみる.

直線 l 上の点 (x, y) の写った先を (X, Y) とおくと,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって, $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} X + 2Y \\ 2X - Y \end{pmatrix}.$$

これが直線 l 上にあるので

$$\frac{1}{5}(X + 2Y) + \frac{1}{5}(2X - Y) = 1 \qquad \text{すなわち} \qquad 3X + Y - 5 = 0.$$

したがって求める図形 L は直線であり, その方程式は, $3x + y - 5 = 0 \cdots$ (答).

[コメント] こちらの解法の方が一般に応用範囲が広く強力である.

(5) 点 (x, y) の A による一次変換によって写る先を (X, Y) とおくと,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

今, (X, Y) が曲線 C 上にあるとすると, $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 25 = 0$ より,

$$3(x + 2y)^2 - 8(x + 2y)(2x - y) - 3(2x - y)^2 + 25 = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad x^2 - y^2 = 1.$$

したがって求める図形 H は双曲線であり, その方程式は, $x^2 - y^2 = 1 \cdots$ (答).

問題 1. (一次変換の像・原像) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換について以下の問いに答えよ.

(1) 直線 $l : 2x + y - 3 = 0$ の像の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $C : (x^2 - 2xy + 2y^2)^2 = x^2 - 2xy$ の原像の方程式を求めよ.

担当教員：浜中 真志 研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 2. (一次変換の決定: 相似回転) 2 次元平面を考える.

(1) 点 $(1,0)$ を点 $(1,3)$ に写し, 点 $(0,1)$ を点 $(2,4)$ に写す一次変換の行列 A を求めよ.

(2) 角度 θ の回転を表す一次変換の行列 A を求めよ. (ヒント: 単位ベクトル $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ がどこに写るかを考察すればよい.)

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換はどのような変換か?

(4) (3) の A による一次変換による楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の像の方程式を求めよ. またその概形を図示せよ.

例題 1 (4) 別解で使った方法ではできない場合がある. それを問題 3 で考えてみよう.

問題 3. (一次変換の像・原像: 正則行列でない場合) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される一次変換について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解を求めよ (原点の原像の方程式を求めよ).

(3) $\mathbb{R}^2$ の像の方程式を求めよ.

(4) 直線 $l : x + y = 1$ の像の方程式を求めよ.

(5) 直線 $L : x + 2y = 1$ の像の方程式を求めよ.

(6) 円 $C : x^2 + y^2 = 4$ の像の方程式 (あるいは不等式) を求めよ.

上の問題でみたように, 一般には, 直線 (平面) は直線 (平面) **上**に写るが, 直線 (平面) **全体**に写るとは限らない (直線が点に, 平面が直線や点に, など). 本当は例題 1 & 問題 1,2 においても調べる必要があったのだが, 実は A が正則な場合はこのようなことが起こらないので特に述べていなかった. 正則でない場合は特に注意すること.

3 次元空間での一次変換

問題 4. (一次変換の像・原像: 正則行列の場合) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ で表される一次変換について以下の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) 直線 $l : \dfrac{x-1}{2} = y + 1 = -z$ をベクトル表示し, 像の方程式を求めよ.

(3) 平面 $\pi_1 : y + z = 1$ の像の方程式を求めよ.

(4) 平面 $\pi_2 : x + y - z = 1$ の原像の方程式を求めよ.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. (一次変換の像・原像: 正則行列でない場合) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ で表される一次変換について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) 原点の原像の方程式を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の像の方程式を求めよ.

(4) 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の像の方程式 (あるいは不等式) を求めよ.

今週の宿題 (提出期限は 4 月 26 日 (火) の演習開始時です)

問題 6. (3 次元空間での一次変換) 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換について以下の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) 直線 $l : x - 1 = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$ の像の方程式を求めよ.

(3) 平面 $\pi : 28x + 4y + 26z = 13$ の原像の方程式を求めよ.

問題 7. (一次変換の線形性) 本演習では主にベクトルの成分を具体的に表示して一次変換を取り扱ったが一次変換の線形性に着目すれば見通しよく解けるものもある. ここではそのような問題を取り上げる.

(1) 2 次元平面上に原点 O を重心とする三角形 PQR がある. 行列 A による一次変換が P を Q に, Q を P に写すとき, この一次変換は直線 OR 上の点をすべてそれ自身に写すことを証明せよ.

(2) ある青年が, 曽祖父の遺品の中から, 宝物を埋めてある場所を書いた紙片を見つけた:

「広大な草原に桜の木と梅の木と松の木が一本ずつさびしく立っている. 松から桜に向かって歩数を数えながら歩け. 桜の木に着いたら右へ 90 度向きを変え, さらに同じ歩数だけ歩け. そしてそこに棒 A を立てよ. また, 松から梅に向かって歩数数えながら歩け. 梅の木に着いたら左へ 90 度向きを変え, さらに同じ歩数だけ歩け. そしてそこに棒 B を立てよ. 2 本の棒の中点に宝が埋めてある.」

青年が草原に来てみると, 松の木は松食い虫に枯らされたか, 跡形もなかった. 青年は宝探しをあきらめた,

この青年に代わって宝のありかをつきとめよ.

(ヒント：例えば桜を起点として, $\overrightarrow{\text{桜松}}$ を用いずに $\overrightarrow{\text{桜梅}}$ を用いて $\overrightarrow{\text{桜宝}}$ を表す, を目標としてみよう. まず, 桜を起点とした梅, 松の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{u}, \vec{m}$ とし, 90 度回転を表す一次変換の行列を R とする. 棒 A, B の位置ベクトルをそれぞれ, $\vec{u}, \vec{m}, R$ で表せ. 次に, 宝のありかの位置ベクトル $\vec{x}$ を ($\vec{m}$ を用いず) $\vec{u}, R$ のみで表し, 宝のありかを説明せよ. ($R^{-1}\vec{v} = -R\vec{v}$ に注意.) なお本小問は (1) と独立した問題である.)