担当教員： 浜中 真志 研究室： A453 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

複素数, 複素関数

作成日： May 18, 2009 Updated： May 22, 2009 Version： 1.0 実施日： May 22, 2009

複素数・複素平面

複素数 $z = x + iy$ が与えられたとする．($x, y \in \mathbb{R}$. i は虚数単位で $i^2 = -1$ を満たす．) 複素数 z は 2 つの実数 (x, y) の組とみなすことができ, 座標平面上に表すことができる．すなわち, 直交座標をとった平面上で, $z = x + iy$ を座標 (x, y) をもつ点 (点 z と呼ぶ) に対応させればよい．(図 1 左図参照)

$\bar{z} := x - iy$ を z の共役複素数と呼ぶ．x を z の実部 (real part), y を z の虚部 (imaginary part) と呼び, それぞれ記号で $x = \mathrm{Re}\ z$, $y = \mathrm{Im}\ z$ と表す．$x = \mathrm{Re}\ z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \mathrm{Im}\ z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ である．また, x 軸, y 軸をそれぞれ実軸, 虚軸と呼ぶ.

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値 (absolute value) といい, 原点から点 z までの距離を表す. $z\bar{z} = |z|^2$ などが成り立つ．また線分 $0z$ と正の実軸のなす角を $\arg z$ $(\in \mathbb{R})$ と表し, z の偏角 (argument) と呼ぶ．偏角には 2π の整数倍の不定性がある．

$r := |z|$, $\arg z := \theta$ と書き表すと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

となる．このような表記を極形式とよぶ．(図 1 右図参照)

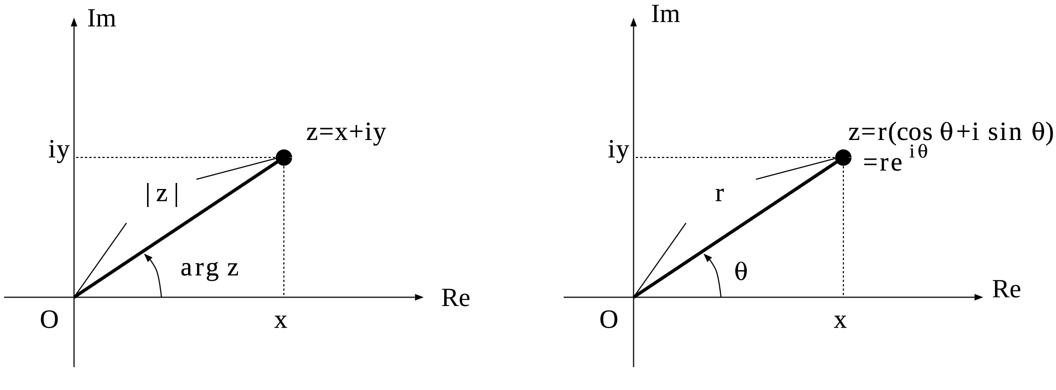

図 1: 複素平面 (右は極形式)

以下特に断りのない限りすべて, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とする.

問題 1. (極座標) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ を極座標表示し, $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ を求めよ.

問題 2. (方程式)

(1) $z^3 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．(極形式で考えよ．一般角における 2π の不定性に注意.) また複素平面に図示せよ.

(2) 方程式 $z^4 + z^2 + 1 = 0$ を解け．また解を複素平面に図示せよ.

担当教員：浜中 真志 研究室：A453 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(3) (暇な人用，近々ボーナス問題として改めて出題します) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)$ を示し，これを利用して 3 次方程式 $z^3+pz+q=0$ の一般解を求めよ．(ただし，ω は 1 の 3 乗根で $\omega\neq 1$ のもの.)

べき級数

問題 3. (収束半径) 次のべき級数の収束半径 R を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$

べき級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ の収束半径 R は，次の極限値 (左辺) が存在すれば，その逆数に等しい：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R},\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

問題 4. (指数関数，三角関数)
複素数 z に対する指数関数，三角関数を次のように定義する：

$$e^z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\quad \cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n},\quad \sin z:=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

(1) $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ を示せ．(特に $z=\theta\in\mathbb{R}$ としたものがオイラーの公式.)

(2) 指数法則 $e^{z+w}=e^ze^w$ を示せ．(これから，三角関数の加法定理およびド・モアブルの公式がすぐに導かれる.)

(3) $\cos z,\sin z$ を指数関数 e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ．

(4) $\sin z=0$ となる複素数 z をすべて求めよ．

正則関数とコーシー・リーマンの関係式

問題 5. (コーシー・リーマンの関係式)

(1) 複素関数 $f(z,\bar{z})$ を実部と虚部に分けて，$f=u+iv$ と表したとき，f が正則関数であるための条件を u,v,x,y の言葉で表せ．(答えのみでよい.)

(2) 正則関数の実部および虚部は調和関数である (すなわち $u_{xx}+u_{yy}=0, v_{xx}+v_{yy}=0$) ことを示せ．

(3) z と $\bar{z}$ を独立な変数として扱い，$\dfrac{\partial}{\partial z}$ および $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$ を $\dfrac{\partial}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial}{\partial y}$ の線形結合で表せ．

担当教員：浜中 真志 研究室：A453 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(4) 複素関数 $f(z, \bar{z})$ が正則関数のとき, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ を示せ.

(5) 関数 $f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2 + i(x^2 + cxy + dy^2)$ が正則関数となるように定数 a, b, c, d の値を定めよ.

(6) 複素平面全体で正則な関数 $f(z)$ の実部 u が, $u(x, y) = x^2 - y^2$ のように与えられているとき, $f(z)$ を決定せよ.

複素関数による図形の像・原像

問題 6. (一次分数変換) 複素関数 $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ を考える.

(1) z 平面上の上半円板 $D^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ y > 0\}$ は $w = f(z)$ によって w 平面にどのようにうつされるか. 変換前の図形と変換後の図形を図示せよ.

(2) $w = f(z)$ による, $D := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 2\}$ の原像を求めよ.

複素ベクトル空間の正規直交基底

問題 7. (有限フーリエ展開) $n \in \mathbb{N}$ に対し, 複素数

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

を考える.

(1) 次で定義される n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底をなすことを示せ. (内積の定義に複素共役が入ることに注意 (前回のプリント参照).)

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

(2) $n = 3$ の場合を考える. $\mathbb{C}^3$ の元 $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$ を基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の線形結合で表せ.

担当教員：浜中 真志　研究室：A453　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題 (提出期限は 5 月 29 日 (金) 演習開始時です)

問題 8. $\cos z = 0$ となる複素数 z をすべて求めよ.

問題 9. 複素平面全体で正則な関数 $f(z)$ の実部 u が $u(x, y) = \sin x \cosh y$ で与えられている. u が調和関数であることを確かめ, $f(z)$ を決定せよ.

双曲線関数については以下にまとめがあり, それらの性質は用いてもよい.

公式集 (双曲線関数)

双曲線関数はべき級数として以下のように定義される (x は実数でも複素数でもどちらでもよい.)：

$$\cosh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sinh x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

次の関係式が成り立つ. (興味があれば, いくつか確かめるとよい.)

(1) $\cosh ix = \cos x, \quad \sinh ix = i \sin x, \quad \tanh ix = i \tan x$

(2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

(4) $\cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x$

(5) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(6) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(7) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

(8) $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \quad \tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

(9) $\cosh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x + 1}{2}, \quad \sinh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x - 1}{2}$

(10) $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x, \quad \cosh 3x = -3 \cosh x + 4 \cosh^3 x$

担当教員：浜中 真志　研究室：A453　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

いくつかの宿題の解答 (ε 論法)

問題 10. (H201 問題 6(2))
$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} = 0$ となることを $\varepsilon - N$ 論法で証明せよ.

【解答】 (まずは問題 5 で誘導された流れに従って答えてみる)
$c_n := \dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ とおく.
「任意の正の数 ε に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|b_n| < \varepsilon$ が成り立つ. 」$\cdots(*)$ という前提条件の下,
「任意の正の数 ε' に対して, ある自然数 N' が存在して, $n \geq N'$ を満たすすべての自然数 n に対して $|c_n| < \varepsilon'$ が成り立つ. 」$\cdots(**)$ を示せばよい.
c_n の大きさを評価しよう：

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{|b_1+b_2+\cdots b_N + b_{N+1}+\cdots+b_n|}{n} \\
&\leq \frac{|b_1+b_2+\cdots+b_N|}{n} + \frac{|b_{N+1}|+|b_{N+2}|+\cdots+|b_n|}{n} \quad (\text{三角不等式より}) \\
&< \frac{|b_1+b_2+\cdots+b_N|}{n} + \frac{\varepsilon+\varepsilon+\cdots+\varepsilon}{n} \quad (\text{前提条件 } (*) \text{ より}) \\
&= \frac{|b_1+b_2+\cdots+b_N|}{n} + \left(\frac{n-N}{n}\right)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

ここでアルキメデスの原理より, 与えられた 2 つの正の数 $|b_1+b_2+\cdots+b_N|$ と ε に対して, $M\cdot\varepsilon > |b_1+b_2+\cdots+b_N|$ をみたす自然数 M が存在する. よって, $N' := \max(N, M)$ ととると, $n \geq N'$ を満たすすべての自然数 n に対して

$$
\begin{aligned}
|c_n| &\leq \frac{|b_1+b_2+\cdots+b_N|}{M} + \left(1-\frac{N}{n}\right)\varepsilon \quad (n \geq N' \geq M \text{ より}) \\
&< \varepsilon + \left(1-\frac{N}{n}\right)\varepsilon \quad (\text{アルキメデスの原理より}) \\
&\leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon \cdots (***) \quad (n \geq N' \geq N \text{ より})
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $\varepsilon' = 2\varepsilon$ ととると, (ε がすべての正の値を動くとき) ε' はすべての正の値をとりうる. したがって ε' を最初に (任意の正の数として) 与えたとき, $\varepsilon = \varepsilon'/2$ として上記の議論をたどれば, 示されたことはまさに $(**)$ そのものである. 以上により題意は示された.

[コメント]
ここでは誘導に従い, まず条件 $(*)$ を用いたため, 最初に正の数 ε が与えられた. ところが最終的に示したいことは $(**)$ なのであって, まず最初に正の数 ε' が与えられたとして, そのあとに条件 $(*)$ を使って最終的に $(**)$ にあるような N' の存在を言う方が全体的な流れとしては自然である. そのとき, 条件 $(*)$ で与えられる正の数としては, その最初に与えた ε' を使って表したい. その心を上記解答の最後の 3 行で示しているわけで, これでももちろん間違いではないが, 話の順序としてはやや回りくどいものになってしまう. 以下に紹介するように書いたほうがスマートである. (上記のものは, とりあえず小手調べに観察し

た議論をそのまま使って解答としてまとめてしまったものとも言える.) また, 記号に関してもプライム付きの ε' などをなるべく使わないよう工夫している：

【解答】 (上記のコメントを振りかえって少しスマートにまとめてみる)

まず正の数 ε を任意に与える. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから, 「正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある自然数 N' が存在して, $n \geq N'$ を満たすすべての自然数 n に対して $|b_n| < \varepsilon/2$ が成り立つ.」$\cdots(*)'$

$c_n := \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$ とおき, その大きさを評価しよう：

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{|b_1 + b_2 + \cdots b_{N'} + b_{N'+1} + \cdots + b_n|}{n} \\
&\leq \frac{|b_1 + b_2 + \cdots + b_{N'}|}{n} + \frac{|b_{N'+1}| + |b_{N'+2}| + \cdots + |b_n|}{n} \quad (\text{三角不等式より}) \\
&< \frac{|b_1 + b_2 + \cdots + b_{N'}|}{n} + \frac{\varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \cdots + \varepsilon/2}{n} \quad (\text{前提条件 } (*)' \text{より}) \\
&= \frac{|b_1 + b_2 + \cdots + b_{N'}|}{n} + \left(\frac{n - N'}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

ここでアルキメデスの原理より, 与えられた 2 つの正の数 $|b_1+b_2+\cdots+b_{N'}|$ と $\varepsilon/2$ に対して, $M\cdot(\varepsilon/2) > |b_1+b_2+\cdots+b_N|$ をみたす自然数 M が存在する. よって, $N := \max(N', M)$ ととると, $n \geq N$ を満たすすべての自然数 n に対して

$$|c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 - \frac{N'}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ. 以上により, 任意に与えられた正の数 ε に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|c_n| < \varepsilon$ が成り立つことが示された. すなわち, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0$ となることが示された.

問題 11. (H202 問題 4(2))

関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 a において連続ならば, 関数 $f + g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) + g(x)$ も点 a において連続であることを示せ.

【解答】 (スマートな解答から示す)

まず正の数 ε を任意に与える.

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は点 a において連続であるから, 「正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある正の数 δ_1 が存在して, $|x - a| < \delta_1$ を満たすすべての x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$ が成り立つ.」$\cdots(*)$

同様に, 関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は点 a において連続であるから, 「正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある正の数 δ_2 が存在して, $|x - a| < \delta_2$ を満たすすべての x に対して $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ が成り立つ.」$\cdots(**)$

ここで $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ととると, $|x-a| < \delta$ を満たすすべての x に対して

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))| \\ &\leq |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| \quad (\text{三角不等式より}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{条件 } (*), (**) \text{ より}) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

以上により, 任意に与えられた正の数 ε に対して, ある正の数 δ が存在して, $|x-a| < \delta$ を満たすすべての x に対して $|(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \varepsilon$ が成り立つことが示された. よって関数 $f+g$ も点 a において連続である.

[コメント]
これも与えられた条件を最初に $\varepsilon - \delta$ の言葉で表してしまうと, 前問同様最後に回りくどいことをしなければならなくなる. (参考までに回りくどい解答も付す. 間違いではないがあまり薦めない.)
なお, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ととったおかげで, $|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_2$ が言えることに注意しよう. ($\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$ だと逆の矢印 “$\Leftarrow$” になってしまう.)

【解答】 (条件を最初に $\varepsilon - \delta$ の言葉で表してしまった回りくどい解答)
　関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は点 a において連続であるから, 「任意に与えられた正の数 ε_1 に対して, ある正の数 δ_1 が存在して, $|x-a| < \delta_1$ を満たすすべての x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$ が成り立つ. 」$\cdots (*)'$
　同様に, 関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は点 a において連続であるから, 「任意に与えられた正の数 ε_2 に対して, ある正の数 δ_2 が存在して, $|x-a| < \delta_2$ を満たすすべての x に対して $|g(x) - g(a)| < \varepsilon_2$ が成り立つ. 」$\cdots (**)'$
　ここで $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ととると, $|x-a| < \delta$ を満たすすべての x に対して

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))| \\ &\leq |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| \quad (\text{三角不等式より}) \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{条件 } (*)', (**)' \text{より}) \end{aligned}$$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ととると ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ がすべての正の値を動くとき) ε' はすべての正の値をとりうる. したがって ε を最初に (任意の正の数として) 与えたとき, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ として ε を 2 つの正の数 ε_1 と ε_2 に分解し上記の議論をたどれば, 以下のことが示されたことになる：任意に与えられた正の数 ε に対して, ある正の数 δ が存在して, $|x-a| < \delta$ を満たすすべての x に対して $|(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \varepsilon$ が成り立つ. よって関数 $f+g$ も点 a において連続である.

来週 (5 月 29 日) の小テスト (第 1 回目) について：

- 試験範囲は, 5 月 1 日, 5 月 8 日, 5 月 15 日, 5 月 22 日実施の 4 回分です. (ただし, ボーナス問題とベクトル解析序論は除く.)
- ノートは持ち込み不可です.