担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

一次独立と一次従属

作成日：November 13, 2015　Updated：November 18, 2015　Version：　実施日：November 19, 2015

中間試験お疲れさまでした．後半はしばらく線形代数の話題を扱います．今日は一次独立という概念を学びます．これはこれから線形空間の基底や次元を理解する上で要となります．

今後の予定 (変更の可能性あり)

- 11/26：基底と表現行列
- 12/3：行列の対角化

一次独立と一次従属

V を線形空間, $\vec{0}$ を V の零ベクトルとする．

定義 1. V の r 個の元 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ が**一次独立**であるとは, 任意の r 個の実数 $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ に対し

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_r\vec{v}_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_r = 0$$

が成り立つときをいう．$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ が**一次独立でないとき一次従属**であるという．

一次独立, 一次従属の定義は必ず覚えること．

例題 1. 2 次元線形空間 $\mathbb{R}^2$ 内の次の 2 つのベクトルは一次独立か？($k \in \mathbb{R}$.)

(1) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$.　　(2) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$.

【解答】 $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0}$ となる実数の組 (c_1, c_2) が $(0,0)$ のみか, そうでないかを調べればよい．$(0,0)$ のみならば, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は一次独立, $(0,0)$ 以外にもあれば, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は一次従属である．さらに言うならば, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ を横に並べた行列 A の行列式をまず計算してみて, それが 0 でなければ (1) のパターン, 0 ならば (2) のパターンで考えるのがよい．これを踏まえて, 以下の解答を読むこと．

(1) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる実数の組 (c_1, c_2) を求める．それには方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を c_1, c_2 について解けばよい．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ を A とおくと, $\det A = 8 \neq 0$ なので逆行列 A^{-1} が存在する．したがって $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので, 求める (c_1, c_2) は $(0,0)$ のみである, すなわち, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は一次独立である．

(2) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる実数の組 (c_1, c_2) を求める．それには方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots (*)$ を c_1, c_2 について解けばよい．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ を A とおくと, $\det A = k - 2$.

(i) $k \neq 2$ のとき, 逆行列 A^{-1} が存在し $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので, 求める (c_1, c_2) は $(0,0)$ のみである, すなわち, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は一次独立である．

(ii) $k = 2$ のとき, 方程式 $(*)$ は関係式 $c_1 + 2c_2 = 0$ を与える．このとき, 例えば $(c_1, c_2) = (-2, 1)$ は方程式 $(*)$ の解である．したがって, 方程式 $(*)$ が $(c_1, c_2) = (0,0)$ 以外の解をもつので，$\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は一次従属である．

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 1. (一次独立性の判定) 3 次元線形空間 $\mathbb{R}^3$ 内の次の 3 つのベクトルは一次独立か？

$$(1)\ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (2)\ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

問題 2. (一次独立性の判定) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ とする. 次の命題が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

(1) $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ とする. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ が一次独立ならば, $s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + s_3\vec{v}_3 = t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + t_3\vec{v}_3 \Rightarrow s_1 = t_1, s_2 = t_2, s_3 = t_3$.

(2) $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が一次独立, $\vec{v}_2$ と $\vec{v}_3$ が一次独立, かつ $\vec{v}_3$ と $\vec{v}_1$ が一次独立ならば, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ も一次独立である.

(3) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ が一次独立ならば $\vec{v}_1$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ も一次独立である.

問題 3. (一次独立の条件) 3 次元線形空間 $\mathbb{R}^3$ を考える. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ が一次独立でないような $k \in \mathbb{R}$ の条件を求めよ. このとき, $\vec{a}_3$ を $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ の一次結合で表せ. また, 3 つのベクトルの生成する図形の方程式を求めよ. ただし, m 個のベクトル $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ の生成する図形 $:= \{\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + \cdots + t_m\vec{a}_m \in \mathbb{R}^n \mid t_1, \cdots, t_m \in \mathbb{R}\}$.

今週の宿題 (提出期限は 11 月 26 日 (木) の演習開始時です)

問題 4. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を 3 次元線形空間 $\mathbb{R}^3$ の一次独立なベクトルとする. 次の命題が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

(1) 2 つのベクトル $\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ は一次独立である.

(2) 任意の元 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\vec{v}_1 + \vec{a}, \vec{v}_2 + \vec{a}, \vec{v}_3 + \vec{a}$ は一次独立である.

問題 5. 3 次元線形空間 $\mathbb{R}^3$ を考える. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ が一次独立でないような $k \in \mathbb{R}$ の条件を求めよ. このとき, $\vec{a}_3$ を $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ の一次結合で表せ. また, 3 つのベクトルの生成する図形の方程式を求めよ. (k の値は一つとは限らない. 二つ以上ある場合は, それぞれの値に対して答えを与えよ.)

今週のボーナス問題 (提出期限は 11 月 26 日 (木) の演習開始時です)

問題 6. 後半は線形代数の話題を取り扱っていく予定ですので，前期の復習も兼ねて，線形代数関連の問題を出題します．(1) が連立一次方程式の解の公式，(2) が逆行列の公式を導く問題です．(難しい問題ではなく基本問題ですので，是非取り組んでみてください．)

3×3 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ．ただし $|A|\neq 0$ とする．

(1) 連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad \cdots(**)$$

の一般解を求めてみよう．

(a) 行列式の性質より，$x_1|A|=\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ が成り立つ．この第 1 列に，第 2 列のある定数倍および第 3 列のある定数倍を加えて，$x_1=\dfrac{1}{|A|}|A_{(1)}|$ となることを示せ．ただし $A_{(k)}$ $(k=1,2,3)$ は，行列 A の第 k 列 a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} を b_1, b_2, b_3 で置き換えた行列である．

(b) 同様にして，連立一次方程式 $(**)$ の解を書き下せ．これを，クラメル (Cramer) の公式という．A が $n\times n$ 行列の場合も同様の手順で公式が求まる．

(2) (1) の結果を利用して，今度は行列 A の逆行列 A^{-1} の公式を求めてみよう．

(a) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，連立一次方程式 $(**)$ の解を，行列 A の (i,j) 余因子 $\tilde{a}_{ij}:=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ を用いて表せ．ただし A_{ij} は行列 A から i 行目と j 列目を除いた 2×2 行列である．

(b) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の場合についても (a) と同様の議論を行い，$AB=E \Leftrightarrow A^{-1}=B$ (E は 3×3 単位行列) であることに注意して，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

となることを示せ．A が $n\times n$ 行列の場合も同様の手順で公式が求まる．

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

アンケート回答結果 (回答数 32)

(1) 講義の難易度

(a) 適切 (28 人)　(b) 易しすぎる (1 人)　(c) 難しすぎる (3 人)

(2) 明確な説明や工夫

(a) なされている (30 人)　(b) なされていない (2 人)　(c) 未チェック (0 人)

(3) 質問しやすい雰囲気づくり

(a) なされている (30 人)　(b) なされていない (2 人)　(c) 未チェック (0 人)

(4) 理解に役立っているか

(a) 役立っている (29 人)　(b) どちらとも言えない (3 人)

(c) 役立っていない (0 人)　(d) 未チェック (0 人)

今後の対応

率直なご意見・ご回答どうもありがとうございました．改善して欲しい点などいくつか書いていただきました．今後は以下のように対応していこうと思います．

- 問題・宿題の難易度は今のままいきますが, 解説をより丁寧に行います. (「難しい」というご意見は主に解説の分かりにくさが原因かと思ってます．ちなみに難しいと感じたときはみなさまからも**遠慮なく質問をしてくださいね**.)
- 問題・宿題の分量も今のままいきます. (ボーナス問題は冬休みに何題かまとめて出すかもしれません.)
- 「プリントの解説を詳しめにしてほしい (2 名)」→ご意見どうもありがとうございます。本質的説明はさらに濃縮しつつも「略解」な路線を進めていくつもりです．(理由は口頭で言います．)
- 「解説が少しはやい (1 名)」「声が小さい (1 名)」→より大きな声でゆっくりはっきり話すようにします！
- 「宿題がかんたん」→ごめんなさい．でも今のレベルで行きます．(ボーナス問題などで少し難しめのものを追加します. 市販の問題集も紹介します.)
- 「暑い」→　ごめんなさい．今後は**その場で遠慮なく言ってください．**
- 「教壇上をうろうろ動き回るのは集中力がそがれるのでやめてほしい．携帯のアラームで時間を確認するのをやめてほしい.」→ご指摘どうもありがとうございます．改善します.

好意的な感想もいろいろいただきました (どうもありがとうございます！)．良い部分はできる限り継続できるよう頑張ります．今後もできる限り，ご意見・ご要望には応えていくつもりですので何かありましたらいつでも言ってくださいね.