ちからだめし略解と解説 (2022 年 10 月 6 日実施分)

作成日 : October 11, 2022 Updated : October 11, 2022

問題 1. (25 点)

(1) (6 点) 答えは (イ), (エ), (オ).

（ア）明らかに基底 ($P_2(\mathbb{R})$ の任意の元がこれらの線形結合で一意に表されるから.)

（イ）$P_2(\mathbb{R})$ の元 x はこれらの線形結合で書けない. (もしも $x = a \cdot 1 + b \cdot x^2$ と書けたとして, $x = 0, \pm 1$ を代入すれば, このような $a, b \in \mathbb{R}$ は存在しないことが分かる.)

（ウ）$P_2(\mathbb{R})$ の任意の元 $a_0x^2 + a_1x + a_2$ がこれらの線形結合で以下のように一意に書ける：$a_0x^2 + a_1x + a_2 = (a_2 - 4a_0)1 + (a_1 - 4a_0)x + a_0(x+2)^2$.
($a_0x^2 + a_1x + a_2 = p \cdot 1 + qx + r(x+2)^2$ として係数 $p, q, r \in \mathbb{R}$ を求めた.)

（エ）一次従属な関係が存在する：$a = \pi, b = -1$ として $a \cdot 1 + b \cdot \pi = 0$.

（オ）一次従属な関係が存在する：$a = 2, b = 1, c = -1$ として $a \cdot 1 + b(x-1) + c(x+1) = 0$.

（カ）$P_2(\mathbb{R})$ の任意の元 $a_0x^2 + a_1x + a_2$ がこれらの線形結合で以下のように一意に書ける：$a_0x^2 + a_1x + a_2 = (1/6)(3a_1 + a_2)(x+3) + (1/6)(3a_1 - a_2)(x-3) + a_0x^2$.
((ウ) と同様)

(2) (a) (5 点) $\det A = 0$

(b) (8 点) 点 (x, y, z) の A による一次変換による像を (X, Y, Z) とおくと

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x - y - z \\ x - 5y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

与えられた条件は実数 (x, y, z) が存在することであるから, この x, y, z についての連立一次方程式の解の存在条件を調べればよい. 拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & X \\ 2 & -1 & -1 & Y \\ 1 & -5 & 4 & Z \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & -1 & Y - 2X \\ 0 & 0 & 0 & 3X - 2Y + Z \end{array}\right)$$

のように変形される. 第 3 行目は $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3X - 2Y + Z$ を意味するので, 実数 (x, y, z) が存在するためには, $3X - 2Y + Z = 0$ が必要であるが, このとき第 1, 2 行目より解は必ず存在することが分かるので十分でもある. したがって求める像は, $\mathrm{Im}\, T_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.
＜基底を用いた表現は以下のように求まる＞この像は $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る平面であり，方向ベクトルを基底としてとればよい. $x = s, y = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ とおくと, $(x, y, z) = (s, t, 2t - 3s) = s(1, 0, -3) + t(0, 1, 2)$. よって,

$$\mathrm{Im}\, T_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) (6 点)

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-2z\\2x-y-z\\x-5y+4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を満たす点 (x,y,z) 全体が求める原像である．これを連立一次方程式とみなして基本変形を行うと, 拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\2&-1&-1&0\\1&-5&4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

のように変形される．これを満たす解は, 第 1, 2 式の表す 2 平面の交わり (直線) 上の点全体である．したがって求める核は $\mathrm{Ker}\,T_A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=y=z\}$.
＜基底を用いた表現は以下のように求まる＞　この核は $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線であり，方向ベクトルを基底としてとると, $\mathrm{Ker}\,T_A=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

問題 2. (25 点)

(1) (8 点) 任意の $y\in f(A\cup B)$ をとる． $f(A\cup B)$ の定義により, $y=f(x)$ となる $x\in A\cup B$ が存在する．このとき $x\in A$ または $x\in B$ なので, $y=f(x)\in f(A)$ または $y=f(x)\in f(B)$, すなわち, $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$. ゆえに $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$ が成り立つ.

(2) (7 点) $z\in Z$ を任意にとる．g は全射であるから, $g(y)=z$ となるような $y\in Y$ が存在する．f も全射なので，$y=f(x)$ となる $x\in X$ が存在する．したがって, 任意の $z\in Z$ に対して, $g(f(x))=z$, すなわち $g\circ f(x)=z$ となるような $x\in X$ の存在が示された．よって $g\circ f$ が全射であることが示された.

(3) (10 点) まず 「$\mathrm{Ker}T=\{\vec{0}\}\ \Rightarrow T$ は単射」を示す.

任意にとった $\vec{x},\vec{y}\in U$ に対して $T(\vec{x})=T(\vec{y})$ が成り立っているとする．このとき $T(\vec{x})-T(\vec{y})=T(\vec{x}-\vec{y})=0$. よって $\vec{x}-\vec{y}\in\mathrm{Ker}T$. ここで仮定より $\mathrm{Ker}T=\{\vec{0}\}$ なので $\vec{x}=\vec{y}$ がいえる．これは T が単射であることを意味する.

次に「T は単射 $\Rightarrow\mathrm{Ker}T=\{\vec{0}\}$」を示す.

任意に $\vec{x}\in\mathrm{Ker}T$ をとる．定義より $T(\vec{x})=\vec{0}$. また T は線形写像だから $T(\vec{0})=T(\vec{0}+\vec{0})=T(\vec{0})+T(\vec{0})$ より $T(\vec{0})=\vec{0}$ が言える．よって $T(\vec{x})=T(\vec{0})$. すると仮定より $\vec{x}=\vec{0}$ が従う. $\vec{x}\in\mathrm{Ker}T$ は任意にとったから $\mathrm{Ker}T=\{\vec{0}\}$ がいえる.

問題 3. (25 点)

(1) (7 点) 2 **(あまりにも出来が悪かったので今日の演習問題を理解した上で再チャレンジしてください！)**

(2) (9 点) 正の数 ε が任意に与えられたとする．

数列 $\{a_n\}$ が, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を満たすという条件より, 正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある自然数 N_1 が存在して, 以下が成り立つ．

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同様に数列 $\{b_n\}$ が, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ を満たすという条件より, 正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある自然数 N_2 が存在して, 以下が成り立つ．

$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき, $c_n := a_n + b_n$ とし, 自然数 N を $N = \max\{N_1, N_2\}$ ととると,

$$n \geq N \Rightarrow |c_n - (\alpha+\beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

以上により, $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha + \beta$ が示された．

[**コメント**] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ という条件は「任意の正の数 ε に対して ある自然数 N が存在して, $n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.」と書き直すことができるが, 上記解答では, この条件をそのまま書いたのではなく**条件を用いた**という点に注意. (任意の正の数に対してこの性質が成り立つから, 正の数として $\varepsilon/2$ を採用して適用したということ.)

(3) (9 点) 正の数 ε が任意に与えられたとする．このとき, $\delta = (2/3)\varepsilon$ として正の数 δ を定めると, $0 < x < 2$ における任意の x に対して,

$$|x-1| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(1)| = \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1-x^2}{2(1+x^2)}\right| = \frac{1}{2(1+x^2)}|(x+1)(x-1)|$$
$$< \frac{1}{2}(x+1)|x-1| < \frac{1}{2}\cdot 3|x-1| < \frac{3}{2}\delta = \varepsilon$$

したがって, 関数 $f(x)$ は $x=1$ において連続である．

問題 4. (25 点)

(1) (5 点) (ア) ((与式)$= \omega + \omega^2 + 1 = 0$)

(2) (8 点) $\alpha = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと, $|\alpha^2| = |\bar{\alpha}|$ より $r^2 = r$. したがって $r = 0, 1$ が得られ, $r=0$ のとき $\alpha = 0$, $r=1$ のとき $e^{2i\theta} = e^{-i\theta}$ より $\alpha^3 = 1$ (1 の 3 乗根) となることが分かる．答. $\underline{\alpha = 0, 1, \omega, \omega^2}$ [**コメント**] $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を用いないこと！(これでも本問はなんとか解けますが 今後一生困ることになります.)

(3) (6 点) $|z-\omega| = 2|z| \Leftrightarrow (z-\omega)(\overline{z} - \overline{\omega}) = 4z\overline{z} \Leftrightarrow (z + \omega/3)(\overline{z} + \overline{\omega}/3) = 4/9 \Leftrightarrow |z + \omega/3| = 2/3$. よって軌跡の円の中心 X と半径 r は $X = -\omega/3,\ r = 2/3$.

(4) (6 点) C 上の点を $z = \omega + e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ より,

$$I = \int_C (z-\omega)^n dz = \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ \left[\dfrac{-e^{i(n+1)\theta}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1 \end{cases}$$