ちからだめし (2022 年 10 月 6 日)

作成日：October 03, 2022　Updated：October 5, 2022　　実施日：October 6, 2022

問題 1.

(1) 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $P_2(\mathbb{R}) := \{a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ を考える．このとき，次の多項式（ベクトル）の組の中で，基底と<u>**ならない**</u>ものをすべて選べ. (答えのみでもよい)

（ア） $1,\ x,\ x^2$	（イ） $1,\ x^2$	（ウ） $1,\ x,\ (x+2)^2$
（エ） $1,\ \pi,\ (x+1)^2$	（オ） $1,\ x-1,\ x+1,\ x^2$	（カ） $x+3,\ x-3,\ x^2$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ で表される線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について以下の問いに答えよ. (像, 原像などを求める解答は，方程式を用いた表現でも基底を用いた表現でも，どのような表現でもよいが，集合として正しい記号を用いること.)

(a) A の行列式の値を計算せよ.

(b) $\mathbb{R}^3$ の T_A による像 $\mathrm{Im}\ T_A$ を求めよ.

(c) 原点の原像 $\mathrm{Ker}\ T_A$ を求めよ.

問題 2. 集合と写像について以下の問いに答えよ．ただし与えられた集合はどれも空集合ではないとする.

(1) $f : X \to Y$ を写像として, A, B は X の部分集合とする．このとき, 以下が成り立つことを証明せよ: $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

(2) X, Y, Z を集合として, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．また, $g \circ f : X \to Z$ を f と g の合成写像とする．このとき, f, g が全射ならば, $g \circ f$ も全射であることを証明せよ.

(3) U, V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間として, $T : U \to V$ を線形写像とする．このとき以下を証明せよ：

$$\mathrm{Ker}\ T = \{\vec{0}\} \ \Leftrightarrow\ T \text{ は単射}$$

(裏面に続く)

問題 3. 実数列・実関数について, 以下の問いに答えよ. 必要であればアルキメデスの原理を用いてよい. ガウスの記号も断りなく用いてよい.

(1) 次の関数の極限を求めよ： $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+\log\dfrac{1-x}{1+x}}{2x-e^x+e^{-x}}$

(2) 実関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ は $x=1$ において連続であることを $\varepsilon-\delta$ 論法で示せ. ($0<x<2$ としてよい.)

(3) 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α,β はともに有限値) を満たすとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ が成り立つことを $\varepsilon-N$ 論法を用いて証明せよ.

問題 4. 1 の 3 乗根のうち虚部が正のものを ω と表す.

(1) $\omega^{106}+\omega^8+\omega^{45}$ の値を以下の選択肢から一つ選べ. (答えのみでよい)

(ア) 0　(イ) 1　(ウ) -1　(エ) ω　(オ) ω^2　(カ) それ以外の値

(2) $\alpha^2=\overline{\alpha}$ を満たす複素数 α をすべて求めよ. (解答に ω を用いてもよい.)

(3) $|z-\omega|=2|z|$ を満たす複素数 z の軌跡は円になる. その円の半径 r と円の中心の座標 X を求めよ.

(4) n を整数とする. 次の複素線積分の値を求めよ. (コーシーの積分定理・積分公式を用いずに具体的に計算せよ.)

$$I=\int_C (z-\omega)^n dz,\quad C=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-\omega|=1\}$$

積分路 C の向きは**「反時計まわり」**とする. (黒板で図示します)

(問題はここまで)

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1

問題 2

学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 3

問題 4