一般化 Macdonald 多項式と５次元 AGT 予想

大久保勇輔

名古屋大学・多元数理

2015/2/20

Review of [Y. Zenkevich, arXiv:1412.8592]

流れ

- Introduction
- Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数
- Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想
- q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

Introduction

AGT 予想

2次元共形場理論		4次元ゲージ理論
共形ブロック	$=$	Nekrasov 公式
$\mathcal{B} = \langle \Phi_4(\infty)\Phi_3(1)\Phi_2(\Lambda)\Phi_1(0)\rangle$		$Z_{\text{Nek}} = \sum_{\vec{\lambda}} Z_{\vec{\lambda}}$
(Φ_i: Primary 場)		($\vec{\lambda}$:パーティションの組)

Virasoro/W_N 代数	$\longleftrightarrow$	4次元 $SU(2)/SU(N)$
q 変形	$\longleftrightarrow$	5次元

4次元の場合

- AGT 対応により「良い基底」の存在が示唆される. [Alba et al, 2010]
つまり、$\langle h_4| \Phi_3(1) |v_{\vec{\lambda}}\rangle \langle v_{\vec{\lambda}}| \Phi_2(z) |h_1\rangle = Z_{\vec{\lambda}}$ となる直交基底 $|v_{\vec{\lambda}}\rangle$ を考える。
$\rightarrow$ (Virasoro 代数) $\otimes$ (Heisenberg 代数) の表現空間上でとることができる。

Introduction

4 次元の場合

- さらに Dotsenko-Fateev 積分（自由場表示）$\mathcal{B}^{\mathrm{boson}} = \langle\langle F \rangle_+ \rangle_-$ を経由して AGT 予想を確認することができる. [Morozov et al, 2013]

$$\mathcal{B} \stackrel{?}{=} \mathcal{B}^{\mathrm{boson}} \stackrel{?}{=} Z_{\mathrm{Nek}}$$

$\langle \quad \rangle_{\pm}$ は Selberg 積分に関係した特殊な積分記号
F はその被積分関数

F を一般化 Jack 多項式 $P_{\vec{\lambda}}$ で展開できる：

$$F = \sum_{\vec{\lambda}} P_{\vec{\lambda}} P^*_{\vec{\lambda}}$$

するとパーティションの組による展開の意味で Nekrasov 公式の各項と各項が一致する（各項の積分値は予想のまま）：

$$\mathcal{B}^{\mathrm{boson}} = \sum_{\vec{\lambda}} \langle P_{\vec{\lambda}} \rangle_+ \langle P^*_{\vec{\lambda}} \rangle_- = \sum_{\vec{\lambda}} Z_{\vec{\lambda}}$$

→同じことが 5 次元版の AGT 予想でもできる [Zenkevich, 2014]

流れ

- Introduction
- Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数
- Ding-Iohara 代数と５次元 AGT 予想
- q-DF 積分と５次元 AGT 予想

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

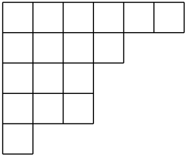
Jack 多項式	$\longleftrightarrow$	Virasoro/W_N 代数の特異ベクトル
Macdonald 多項式	$\longleftrightarrow$	変形 Virasoro/W_N 代数の特異ベクトル

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

パーティション

- パーティション $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ とは, 非増加な m 個の整数 $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m > 0$ の列である．（$\ell(\lambda) = m$ と書く）
- $|\lambda| \equiv \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ を λ の大きさという.
- $(5,5,5,4,1,1) = (5^3, 4, 1^2)$ のように同じ数があるときは, その個数を右肩に乗せて書くこともある.
- ヤング図形に対応させて考える.

例：$\lambda = (6,4,3,3,1)$



Dominance 半順序　パーティション λ, μ に対して $\lambda < \mu$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad |\lambda| = |\mu| \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i < \sum_{i=1}^{k} \mu_i \quad (\forall k)$$

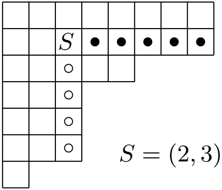
Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

アーム長，レッグ長
ヤング図 λ とその図上の座標 (i,j) に対して

$$A_\lambda(i,j) = \lambda_i - j, \qquad L_\lambda(i,j) = \#\{k \mid \lambda_k \geq j\} - i$$

と定める

例　$\lambda = (8,8,5,3,3,3,1)$ のとき $A_\lambda(2,3) = 5,\ L_\lambda(2,3) = 4$



$S = (2,3)$

注意　$A_\lambda(3,7) = -2,\ L_\lambda(3,7) = -1$ のように負の値を取ることもある．

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

$q,\ t$：独立なパラメータ
$\Lambda_N := \mathbb{Q}(q,t)[x_1,\dots,x_N]^{S_N}$：対称多項式環

Definition $T_{q,x_i} : \Lambda_N \to \Lambda_N$ を

$$T_{q,x_i} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,qx_i,\dots,x_n)$$

により定義する。また以下の作用素を Macdonald の差分作用素という：

$$D_N(q,t) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j\neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}$$

Proposition 各パーティション λ（$|\lambda| \leq N$）に対して, 以下の 2 条件を満たす対称多項式 $P_\lambda \in \Lambda_N$ が唯一存在する：

1. $P_\lambda = \sum_{\mu\leq\lambda} s_{\lambda,\mu}\, m_\mu, \quad s_{\lambda,\lambda} = 1,\ s_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}(q,t)$；
2. $EP_\lambda(x) = e_\lambda P_\lambda, \quad e_\lambda \in \mathbb{Q}(q,t)$.

またこれを Macdonald 多項式という.（m_λ：モノミアル多項式）

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

Example

1 次, 2 次, 3 次の Macdonad 対称関数は

$$
\begin{aligned}
P_{(1)}(x) &= m_{(1)}, \\
\begin{pmatrix} P_{(2)}(x) \\ P_{(1,1)}(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{(1+q)(1-t)}{1-qt} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(2)} \\ m_{(1,1)} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} P_{(3)}(x) \\ P_{(2,1)}(x) \\ P_{(1,1,1)}(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-q^3}{1-q}\frac{1-t}{1-q^2t} & \frac{1-q^2}{1-q}\frac{1-q^3}{1-q}\frac{(1-t)^2}{(1-qt)(1-q^2t)} \\ 0 & 1 & (2+q+t+2qt)\frac{1-t}{1-qt^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となっている.

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

$p_\lambda := \prod_{i\geq 1} p_{\lambda_i}, \quad p_n := \sum_i x_i^n$

Macdonald 多項式の性質

- Λ_F 上の内積 $\langle -,- \rangle_{q,t}$ を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}, \quad z_\lambda \equiv \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} i^{m_i}\, m_i!$$

と定めると，（$m_i = \#\{j \mid \lambda_j = i\}$ とした.）直交関数系となる：

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} C'_\lambda / C_\lambda,$$

$$C_\lambda \equiv \prod_{(i,j)\in\lambda} (1 - q^{A_\lambda(i,j)} t^{L_\lambda(i,j)+1}), \quad C'_\lambda \equiv \prod_{(i,j)\in\lambda} (1 - q^{A_\lambda(i,j)+1} t^{L_\lambda(i,j)})$$

- Cauchy の公式

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(x) p_n(y) \right) = \sum_\lambda \frac{C_\lambda}{C'_\lambda} P_\lambda(x) P_\lambda(y)$$

が成立つ．（$p_\lambda(x)$, $p_\lambda(y)$ はそれぞれ独立な変数 $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ に対する冪和多項式）

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

Macdonald 多項式の性質

- 以下のように規格化したものを integral form と呼ぶ

$$J_\lambda := C_\lambda P_\lambda$$

例：係数が q, t の多項式（有理関数でない）で表される.

$$J_{(1)}(x) = (1-t)m_{(1)},$$

$$\begin{pmatrix} J_{(2)}(x) \\ J_{(1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-qt)(1-t) & (1+q)(1-t)^2 \\ 0 & (1-t^2)(1-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(2)} \\ m_{(1,1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} J_{(3)}(x) \\ J_{(2,1)}(x) \\ J_{(1,1,1)}(x) \end{pmatrix} = M_3 \begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} (1-q^2t)(1-qt)(1-t) & (1+q+q^2)(1-qt)(1-t)^2 & (1+q)(1+q+q^2)(1-t)^3 \\ 0 & (1-qt^2)(1-t)^2 & (2+q+t+2qt)(1-t)^3 \\ 0 & 0 & (1-t^3)(1-t^2)(1-t) \end{pmatrix}$$

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

Macdonald 多項式の性質

- Macdonald 多項式は
  ・$t = q^{\beta}$, $q \to 1$ とすると Jack 多項式に退化する
  ・$q = 0$ とすると Hall-Littlewood 多項式に退化する
  ・$q = t$ とすると Schur 多項式に退化する
- Pieri formula

$$P_{(1^k)} P_\lambda = \sum_{\mu} \left(\prod_{(i,j) \in (C_{\mu\backslash\lambda}) \backslash (R_{\mu\backslash\lambda})} \frac{b_\mu(i,j)}{b_\lambda(i,j)} \right) P_\mu$$

ここに μ は歪ヤング図 $\mu\backslash\lambda$ が vartical k-strip となるパーティション（i.e. "$\mu_i = \lambda_i \text{ or } \lambda_i + 1$" かつ $|\mu| - |\lambda| = k$ となっているもの）を走り, $C_{\mu\backslash\lambda}$(resp. $R_{\mu\backslash\lambda}$) は $\mu\backslash\lambda$ と交わる列 (resp. 行) 上にある箱の集合を表す. さらに

$$b_\lambda(i,j) = \begin{cases} \frac{1 - q^{A_\lambda(i,j)} t^{L_\lambda(i,j)+1}}{1 - q^{A_\lambda(i,j)+1} t^{L_\lambda(i,j)}} & \text{if } (i,j) \in \lambda, \\ 1 & \text{else.} \end{cases}$$

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

定義 変形 Virasoro 代数とは, 交換関係

$$[T_n, T_m] = -\sum_{l=1}^{\infty} f_l (T_{n-l}T_{m+l} - T_{m-l}T_{n+l}) - \frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p}(p^n - p^{-n})\delta_{n+m,0}$$

をもつ T_n ($n \in \mathbb{Z}$) によって生成される結合代数である. ここに f_l は構造関数

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\, z^l = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{1+p^n} z^n\right)$$

によって定まるものとする. また生成元の母関数 $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$ を導入すると, 上記の交換関係を母関数の関係式

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{w}{z}\right) T(z)T(w) - T(w)T(z) f\left(\frac{z}{w}\right) \\ & = -\frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p}\left[\delta\left(\frac{pw}{z}\right) - \delta\left(\frac{p^{-1}w}{z}\right)\right] \end{aligned}$$

に置き換えることができる. ここに, $\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$ とした.

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

定義

- 最高ウエイト h の最高ウエイトベクトル $|h\rangle$ を以下の条件をみたすものとする：

$$T_0|h\rangle = h|h\rangle,$$
$$T_n|h\rangle = 0, \quad n \geq 1$$

- 変形 Virasoro 代数の Verma 加群

$$M(h) := \mathbb{C}[T_{-1}, T_{-2}, \ldots]|h\rangle$$

- 特異ベクトル $|\chi\rangle(\neq |h\rangle) \in M(h)$ を以下の条件をみたすものとする：

$$T_n|\chi\rangle = 0, \quad n \geq 1$$

命題 $h = h_{r,s}$ のとき, 次数 rs に特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ がただ 1 つ存在する. ただし整数 r, s に対して

$$h_{r,s} = q^{-s/2}t^{r/2} + q^{s/2}t^{-r/2}$$

とする.

Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数

命題　交換関係

$$[a_n, a_m] = n\frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}}\delta_{n+m,0}$$

を満たす自由場 a_n $(n \in \mathbb{Z})$ を用いて, 変形 Virasoro 代数の母関数を

$$T(z) = \Lambda^+(p^{-1/2}z) + \Lambda^-(p^{1/2}z)$$

と自由場表示できる．ここに

$$\Lambda^\pm(z) := \exp\left(\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{-n}}{1+p^n}\frac{a_{-n}}{n}z^n\right)\exp\left(\mp\sum_{n=1}^{\infty}(1-t^n)\frac{a_n}{n}z^{-n}\right)p^{\pm1/2}t^{\pm a_0}.$$

Macdonald 多項式との対応　上記の自由場表示で特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ を表示したものを対応

$$a_{-n_1}a_{-n_2}\ldots a_{-n_k}|h_{r,s}\rangle \mapsto p_{n_1}p_{n_2}\ldots p_{n_k}$$

により写像すると Macdonald 多項式 $P_{(s^r)} \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ に一致する：

$$|\chi_{r,s}\rangle \mapsto P_{(s^r)}.$$

流れ

- Introduction
- Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数
- Ding-Iohara 代数と５次元 AGT 予想
- q-DF 積分と５次元 AGT 予想

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

Notation

- $a_n^{(i)}$ $(i=1,\,2)$：交換関係 $[a_n^{(i)}, a_m^{(j)}] = n\frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}}\delta_{n+m,0}\delta_{i,j}$ を満たす 2 種類の自由場
- $|0\rangle$：$a_n^{(i)}|0\rangle = 0$ $(n \geq 0)$ を満たす真空
- $\mathcal{F}$：$|0\rangle$ から生成される Fock 空間
- $\langle 0|$ を $\langle 0| a_n^{(i)} = 0$ $(n \leq 0)$ を満たす真空
- $\mathcal{F}^*$ を $\langle 0|$ から生成される双対空間
- $a_\lambda^{(i)}|0\rangle := a_{\lambda_1}^{(i)} a_{\lambda_2}^{(i)} \cdots |0\rangle \qquad a_{\vec{\lambda}}|0\rangle := a_{\lambda^{(1)}}^{(1)} a_{\lambda^{(2)}}^{(2)}|0\rangle$
- $p_\lambda^{(i)}$：変数 $x_n^{(i)}$ に対する冪和多項式, $\qquad p_{\vec{\lambda}} := p_{\lambda^{(1)}}^{(1)} p_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$
- $m_\lambda^{(i)}$：変数 $x_n^{(i)}$ に対するモノミアル多項式, $\qquad m_{\vec{\lambda}} := m_{\lambda^{(1)}}^{(1)} m_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$
- 対応 $\iota : a_{\vec{\lambda}}|0\rangle \mapsto p_{\vec{\lambda}}$ によりモノミアル多項式 $m_{\vec{\lambda}}$ に対応する $\mathcal{F}$ の元を $|m_{\vec{\lambda}}\rangle$ と書く.

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

定義　以下のように $\mathcal{F}$ 上の作用素を定義する：

$$\eta^{(i)}(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n}^{(i)} z^{n}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{n}}{n} a_{n}^{(i)} z^{-n}\right),$$

$$\xi^{(i)}(z) := \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n}^{(i)} z^{n}\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{n}}{n} (t/q)^{n/2} a_{n}^{(i)} z^{-n}\right),$$

$$\varphi_{+}^{(i)}(z) := \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{n}}{n} (1-t^{n}q^{-n})(t/q)^{-n/4} a_{n}^{(i)} z^{-n}\right),$$

$$\varphi_{-}^{(i)}(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^{n}q^{-n})(t/q)^{-n/4} a_{-n}^{(i)} z^{n}\right).$$

- η, ξ, φ_+, φ_- は Ding-Iohara 代数の表現になっている.
- $\displaystyle\oint \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z}\eta(z)$ は Macdonald の差分作用素 $D_N(q,t)$ を調整したものと同一視できる.

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

以下に定義する作用素 $X^{(1)}(z)$, $X^{(2)}(z)$ の成す代数を考える（$p := q/t$）：

$$X^{(1)}(z) := u_1\,\tilde{\Lambda}^1(z) + u_2\,\tilde{\Lambda}^2(z)$$
$$X^{(2)}(z) := X^{(1)}(pz)X^{(1)}(z) = u_1u_2 :\tilde{\Lambda}^1(z)\tilde{\Lambda}^2(pz):$$

$$\tilde{\Lambda}^1(z) := \eta^{(1)}(z), \qquad \tilde{\Lambda}^2(z) := \varphi_-^{(1)}(p^{-1/4}z)\eta^{(2)}(p^{-1/2}z)$$

ここに u_1, u_2 はパラメータであり、$:\quad:$ は正規順序化の記号を表す．また

$$X^{(i)}(z) =: \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n^{(i)} z^{-n}, \quad i = 1, 2$$

とする.

- $X^{(1)}(z)$ は Ding-Iohara 代数の余積を $\eta(z)$ に作用させたもの.

Conjecture $\left|X_{\vec{\lambda}}\right\rangle := X^{(1)}_{\lambda^{(1)}_1} X^{(1)}_{\lambda^{(1)}_2} \cdots X^{(2)}_{\lambda^{(2)}_1} X^{(2)}_{\lambda^{(2)}_2} \cdots |0\rangle$（$\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$：パーティションの組）は $\mathcal{F}$ 上の基底を成す.

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

- $X_0^{(1)}$ の固有関数を調べる.

拡張された Dominance 半順序　パーティションの組 $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ に対して $\vec{\lambda} \geq^{\mathrm{R}} \vec{\mu}$ (resp. $\vec{\lambda} \geq^{\mathrm{L}} \vec{\mu}$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $|\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}|$ and

$$\lambda^{(1)} \geq \mu^{(1)} \quad \text{and} \quad |\lambda^{(1)}| + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k^{(2)} \geq |\mu^{(1)}| + \sum_{k=1}^{i} \mu_k^{(2)}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \lambda^{(2)} \geq \mu^{(2)} \quad \text{and} \quad |\lambda^{(2)}| + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k^{(1)} \geq |\mu^{(2)}| + \sum_{k=1}^{i} \mu_k^{(1)} \right)$$

for all $i \geq 1$.

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

一般化 Macdonald 多項式の存在定理

各 $\vec{\lambda}$ 対して, $|M_{\vec{\lambda}}\rangle \in \mathcal{F}$ が一意的に存在して以下の 2 条件を満たす：

- $|M_{\vec{\lambda}}\rangle = |m_{\vec{\lambda}}\rangle + \sum_{\vec{\mu} <^{\mathrm{L}} \vec{\lambda}} u_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} \, |m_{\vec{\mu}}\rangle, \quad u_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, q, t)$；
- $X_0^{(1)} |M_{\vec{\lambda}}\rangle = e_{\vec{\lambda}} |M_{\vec{\lambda}}\rangle, \quad e_\lambda \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, q, t).$

一般化 Macdonald 多項式の存在定理 (双対)

各 $\vec{\lambda}$ 対して, $\langle M_{\vec{\lambda}}| \in \mathcal{F}^*$ が一意的に存在して以下の 2 条件を満たす：

- $\langle M_{\vec{\lambda}}| = \langle m_{\vec{\lambda}}| + \sum_{\vec{\mu} <^{\mathrm{R}} \vec{\lambda}} s_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} \, \langle m_{\vec{\mu}}|, \quad s_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, q, t)$；
- $\langle M_{\vec{\lambda}}| X_0^{(1)} = e^*_{\vec{\lambda}} \langle M_{\vec{\lambda}}|, \quad e^*_\lambda \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, q, t).$

- $\vec{u} = (u_1, u_2)$ に対して $|M_{\vec{\lambda}}\rangle = \left|M^{\vec{u}}_{\vec{\lambda}}\right\rangle$ と表記することもある.
- $M_{\vec{\lambda}} := \iota(|M_{\vec{\lambda}}\rangle), \quad M_{\vec{\lambda}} := \iota^*(\langle M_{\vec{\lambda}}|)$

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

一般化 Macdonald 多項式の性質

- 内積値

$$\langle M_{\vec{\lambda}} | M_{\vec{\mu}} \rangle = \frac{C'_{\lambda^{(1)}} C'_{\lambda^{(2)}}}{C_{\lambda^{(1)}} C_{\lambda^{(2)}}} \delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}}$$

- Cauchy formula

$$\exp\left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda^n}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(x) p_n(y) \right\} \exp\left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda^n}{n} \frac{1-t^n}{1-q^n} p_n(z) p_n(w) \right\}$$
$$= \sum_{\vec{\lambda}} \Lambda^{|\vec{\lambda}|} \frac{C_{\lambda^{(1)}} C_{\lambda^{(2)}}}{C'_{\lambda^{(1)}} C'_{\lambda^{(2)}}} M^*_{\vec{\lambda}}(p(x), p(z)) M_{\vec{\lambda}}(p(y), p(w))$$

- $q = t^\beta$, $q \to 1$ とすると一般化 Jack 多項式に退化する. [Ohkubo, 2014]
- $\vec{\lambda} = (\lambda, \phi)$ のとき $M_{\vec{\lambda}}$ は通常の Macdonald 多項式となる.

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

$\left|M_{\vec{\lambda}}\right\rangle$ の integral form $\left|K_{\vec{\lambda}}\right\rangle \in \mathcal{F}$, $\left\langle K_{\vec{\lambda}}\right| \in \mathcal{F}$ を

$$\left|K_{\vec{\lambda}}\right\rangle \propto \left|M_{\vec{\lambda}}\right\rangle, \quad \left|K_{\vec{\lambda}}\right\rangle = \left((X_{-1}^{(1)})^{|\vec{\lambda}|} + \cdots\right)|0\rangle$$

$$\left\langle K_{\vec{\lambda}}\right| \propto \left\langle M_{\vec{\lambda}}\right|, \quad \left\langle K_{\vec{\lambda}}\right| = \langle 0|\left((X_{1}^{(1)})^{|\vec{\lambda}|} + \cdots\right)$$

として定義する.

Conjecture

$$\left\langle K_{\vec{\lambda}} \middle| K_{\vec{\lambda}}\right\rangle \stackrel{?}{=} \left((t/q)u_1u_2\right)^{|\vec{\lambda}|} \prod_{i,j=1}^{2} N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(qu_i/tu_j).$$

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

$\vec{u}=(u_1,u_2)$ と $\vec{v}=(v_1,v_2)$ に対して頂点作用素 $\Phi(w)=\Phi_{\vec{u}}^{\vec{v}}(w):\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ を

$$(1-v_1v_2w/z)X_{\vec{v}}^{(1)}(z)\Phi(w)=(1-tv_1v_2w/qz)\Phi(w)X_{\vec{u}}^{(1)}(z)$$

により定義する.

Conjecture

$$\begin{aligned}\left\langle K_{\vec{\lambda}}^{\vec{v}}\right|\Phi_{\vec{u}}^{\vec{v}}(w)\left|K_{\vec{\mu}}^{\vec{u}}\right\rangle &\stackrel{?}{=}\left((t/q)^2u_1u_2v_1v_2w\right)^{|\vec{\lambda}|}\left((t/q)v_1v_2w\right)^{-|\vec{\mu}|}\\ &\times\prod_{k=1}^{2}v_k^{-(m-1)|\lambda^{(k)}|}u_k^{|\mu^{(k)}|}q^{-n(\lambda^{(k)\prime})+n(\mu^{(k)\prime})}t^{n(\lambda^{(k)})-n(\mu^{(k)})}\\ &\times\prod_{i,j=1}^{2}N_{\lambda^{(i)},\mu^{(j)}}(qv_i/tu_j).\end{aligned}$$

ここに $n(\lambda):=\sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$ とした.

Ding-Iohara 代数と 5 次元 AGT 予想

以上の予想を用いると

$$\langle 0| \Phi^{\vec{w}}_{\vec{v}}(z_2)\Phi^{\vec{v}}_{\vec{u}}(z_1)|0\rangle = \sum_{\vec{\lambda}} \frac{\langle K_\emptyset| \Phi^{\vec{w}}_{\vec{v}}(z_2)|K_{\vec{\lambda}}\rangle \langle K_{\vec{\lambda}}| \Phi^{\vec{v}}_{\vec{u}}(z_1)|K_\emptyset\rangle}{\langle K_{\vec{\lambda}}|K_{\vec{\lambda}}\rangle}$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{\vec{\lambda}} \left(\frac{t^2}{q^2}\frac{u_1u_2z_1}{w_1w_2z_2}\right)^{|\vec{\lambda}|} \prod_{i,j=1}^{2} \frac{N_{\emptyset,\lambda^{(j)}}(qw_i/tv_j)N_{\lambda^{(i)},\emptyset}(qv_i/tu_j)}{N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(v_i/v_j)}$$

となる. [Awata et al, 2011]

- 右辺は 5 次元 $U(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 公式.
- 左辺は共形場理論の 4 点相関関数の q-類似とみなせる.

流れ

- Introduction
- Macdonald 多項式と変形 Virasoro 代数
- Ding-Iohara 代数と５次元 AGT 予想
- q-DF 積分と５次元 AGT 予想

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

Jackson 積分

$$\int_0^a d_qz f(z) := (1-q)\sum_{k\geq 0} q^k a f(q^k a)$$

特に $f(z)=z^n$ のとき

$$\int_0^a d_qz f(z) = \frac{1-q}{1-q^{n+1}}a^{n+1}$$

となる.

q-Selberg アベレージ　関数 f に対してアベレージ $\langle - \rangle_{\pm}$ を下式で定義する：

$$\langle f(x)\rangle_+ := \frac{\int d_q^{N_+}x\,\Delta^{(q,t)}(x)\prod_{i=1}^{N_+}x_i^{u_+}\prod_{k=0}^{v_+-1}(q^kx_i-1)f(x)}{\int d_q^{N_+}x\,\Delta^{(q,t)}(x)\prod_{i=1}^{N_+}x_i^{u_+}\prod_{k=0}^{v_+-1}(q^kx_i-1)}$$

$$\langle f(y)\rangle_- := \frac{\int d_q^{N_-}y\,\Delta^{(q,t)}(y)\prod_{i=1}^{N_-}y_i^{u_-}\prod_{k=0}^{v_--1}(q^ky_i-1)f(y)}{\int d_q^{N_-}y\,\Delta^{(q,t)}(y)\prod_{i=1}^{N_-}y_i^{u_-}\prod_{k=0}^{v_--1}(q^ky_i-1)}$$

ただし

$$\Delta^{(q,t)}(x) := \prod_{k=0}^{\beta-1}\prod_{i\neq j}(x_i-q^kx_j), \qquad \int d_q^N x := \int_0^1\cdots\int_0^1 d_qx_1\cdots d_qx_N$$

である.

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

q-Dotsenko-Fateev 積分

$$\mathcal{B}'_q := \int_0^1 d_q^{N_+} z \int_0^{\Lambda^{-1}q/t} d_q^{N_-} z \prod_{i\neq j}\prod_{k=0}^{\beta-1}\left(1-q^k\frac{z_i}{z_j}\right)$$
$$\times \prod_{i=1}^{N_+ + N_-} z_i^{\alpha_0} \prod_{k=0}^{v_+-1}(1-q^k z_i) \prod_{k=0}^{v_- -1}\left(1-q^k\Lambda\frac{t}{q}z_i\right)$$
$$= (\text{定数})\left\langle\langle F\rangle_+\right\rangle_-$$

ただし $u_+ := \alpha_0+\beta(1-N_+-N_-), \quad u_- := \alpha_0+v_+ +\beta(1+N_+-N_-),$

$$F := \prod_{i=1}^{N_+}\prod_{j=1}^{N_-}\prod_{k=0}^{\beta-1}\left(1-q^k\Lambda\frac{t}{q}\frac{x_i}{y_j}\right)\left(1-q^k\Lambda\frac{x_i}{y_j}\right)$$
$$\times \prod_{j=1}^{N_-}\prod_{n=0}^{v_+-1}\left(1-\Lambda q^{-n}\frac{t}{q}\frac{1}{y_j}\right)\prod_{i=1}^{N_+}\prod_{l=0}^{v_- -1}\left(1-\Lambda q^l\frac{t}{q}x_i\right)$$

とした.

$\rightarrow \mathcal{B}_q := \left\langle\langle F\rangle_+\right\rangle_-$ が 5 次元 Nekrasov 公式と一致する.

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

5 次元 Nekrasov 公式

$$Z^{\mathrm{5d}}_{\mathrm{Nek}} := \sum_{\vec{\lambda}} \left(q^2/t^2\Lambda\right)^{|\vec{\lambda}|} \frac{\prod_{i=1}^{2}\prod_{f=1}^{2} f^{+}_{\lambda_i}(m^{+}_f + a_i) f^{-}_{\lambda_i}(m^{-}_f + a_i)}{z_{\mathrm{vect}}(\vec{\lambda}, \vec{a})},$$

ここに $a = a_1 = -a_2$ であり

$$f^{\pm}_{\lambda}(x) := \prod_{(i,j)\in\lambda}\left(1 - q^{\pm x} t^{\pm(i-1)} q^{\mp(j-1)}\right), \quad z_{\mathrm{vect}}(\vec{\lambda}, \vec{a}) := \prod_{i,j=1}^{2} N_{\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}}(q^{a_i - a_j})$$

5 次元 AGT 予想

$$\mathcal{B}_q \stackrel{?}{=} Z^{\mathrm{5d}}_{\mathrm{Nek}}$$

ただし

$$\begin{aligned} u_+ &= m^+_1 - m^+_2 - 1 + \beta\,, & u_- &= -1 + \beta - 2a\,, \\ v_+ &= -m^+_1 - m^+_2\,, & v_- &= -m^-_1 - m^-_2\,, \\ \beta n_+ &= -a + m^+_2\,, & \beta n_- &= a + m^-_2\,, \end{aligned}$$

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

- $\mathcal{B}_q$ の非積分関数は一般化 Macdonald 多項式 $M_{\vec{\lambda}}(p_n^{(1)}, p_n^{(2)})$ とその双対 $M^*_{\vec{\lambda}}(p_n^{(1)}, p_n^{(2)})$ で展開できる：

$$
\begin{aligned}
F &= \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda^n}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}\left(-p_n\frac{t^n}{q^n}-\frac{1-q^{-nv_+}}{1-t^{-n}}\right)q_{-n}\right\} \\
&\quad \exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda^n}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}p_n\left(-q_{-n}-\left(\frac{t}{q}\right)^n\frac{1-q^{nv_-}}{1-t^n}\right)\right\} \\
&= \sum_{\lambda,\mu}\Lambda^{|\lambda|+|\mu|}\frac{C_\lambda C_\mu}{C'_\lambda C'_\mu}M^*_{\lambda\mu}\left(-\frac{t^n}{q^n}p_n-\frac{1-q^{-nv_+}}{1-t^{-n}}, p_n\right) \\
&\qquad \times M_{\lambda\mu}\left(q_{-n}, -q_{-n}-\left(\frac{t}{q}\right)^n\frac{1-q^{nv_-}}{1-t^n}\right),
\end{aligned}
$$

ただし $p_n = \sum_{i=1}^{N_+} x_i^n$, $q_n = \sum_{j=1}^{N_-} y_j^n$, $\frac{u_1}{u_2} = q^{2a}$ とした[1].

[1] 一般化 Macdonald 多項式 $M_{\vec{\lambda}}$, $M^*_{\vec{\lambda}}$ はそれぞれ $p_n^{(2)} \to (q/t)^{n/2}p_n^{(2)}$, $p_n^{(2)} \to (q/t)^{-n/2}p_n^{(2)}$ と変換し，$M_{\vec{\lambda}} = m_{\vec{\lambda}} + \cdots$ となるように規格化し直したものを用いる．

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

- $\mathcal{B}_q$ を展開した後のパーティションの組でパラメトライズされた各項が Nekrasov 公式の各項と一致していることを確認できればよい：

$$
\frac{C_{\lambda^{(1)}}C_{\lambda^{(2)}}}{C'_{\lambda^{(1)}}C'_{\lambda^{(2)}}}\left\langle M^{*}_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}\left(-\frac{t^n}{q^n}p_n-\frac{1-q^{-nv_+}}{1-t^{-n}},p_n\right)\right\rangle_+
\times\left\langle M_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}\left(q_{-n},-q_{-n}-\frac{t^n}{q^n}\frac{1-q^{nv_-}}{1-t^n}\right)\right\rangle_-
\stackrel{?}{=}\frac{\prod_{i=1}^{2}\prod_{f=1}^{2}f^{+}_{\lambda^i}(m^{+}_f+a_i)f^{-}_{\lambda^i}(m^{-}_f+a_i)}{z_{\mathrm{vect}}(\vec{\lambda},a)}\left(\frac{q}{t}\right)^{2|\vec{\lambda}|}
$$

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

Conjecture　通常の Macdonald 多項式 P_λ に対して

$$\langle P_\lambda(p_n)\rangle = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{qt^{i-1}(1-t^{N-i+1}q^{j-1})(1-q^{u+j}t^{N-i})}{(1-t^{\lambda_j^{\mathrm{T}}-i+1}q^{\lambda_i-j})(1-q^{u+v+j+1}t^{2N-i-1})},$$

$$\langle P_\lambda(p_{-n})\rangle = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{t^{i-N}(1-t^{N-i+1}q^{j-1})(1-q^{u+v-j+2}t^{N+i-2})}{q(1-t^{\lambda_j^{\mathrm{T}}-i+1}q^{\lambda_i-j})(1-q^{u-j+1}t^{i-1})}.$$

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

Conjecture[Zenkevich, 2014]

一般化 Macdonald 多項式 $M_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$\left\langle M_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}\left(q_{-k}, -q_{-k} - \left(\frac{t}{q}\right)^k \frac{1-q^{kv_-}}{1-t^k}\right)\right\rangle_-$$
$$= (-1)^{|\lambda^{(1)}|} q^{\sum_{(i,j)\in\lambda^{(1)}}[j-2+\beta]+\sum_{(i,j)\in\lambda^{(2)}}[2j-3-2a+(2-i)\beta]}$$
$$\times \prod_{k=1}^{2}\prod_{(i,j)\in\lambda^k}\left(1-q^{(\lambda^k)_i-j}t^{(\lambda^k)^{\mathrm{T}}_j-i+1}\right)^{-1}\frac{\prod_{f=1}^2\prod_{k=1}^2 f^-_{\lambda^k}(m^-_f+a_k)}{N_{\lambda^{(2)}\lambda^{(1)}}(q^{-2a})}$$

$$\left\langle M^*_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}\left(-\frac{t^k}{q^k}p_k - \frac{1-q^{-kv_+}}{1-t^{-k}}, p_k\right)\right\rangle_+$$
$$= (-1)^{|\lambda^{(2)}|} q^{\sum_{(i,j)\in\lambda^{(1)}}\beta i+\sum_{(i,j)\in\lambda^{(2)}}(2\beta i-\beta+2a-j+1)}$$
$$\times \prod_{k=1}^{2}\prod_{(i,j)\in\lambda^k}\left(1-q^{(\lambda^k)_i-j}t^{(\lambda^k)^{\mathrm{T}}_j-i+1}\right)^{-1}\frac{\prod_{f=1}^2\prod_{k=1}^2 f^+_{\lambda^k}(m^+_f+a_k)}{N_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}(q^{2a})}$$

q-DF 積分と 5 次元 AGT 予想

これらの予想を用いると

パーティションの組による展開の意味で Nekrasov 公式の各項と各項が一致する [Zenkevich, 2014]：

$$\mathcal{B}_q = \sum_{\vec{\lambda}} \langle M^*_{\vec{\lambda}} \rangle_+ \langle M_{\vec{\lambda}} \rangle_- = \sum_{\vec{\lambda}} Z_{\vec{\lambda}} = Z^{\mathrm{5d}}_{\mathrm{Nek}}$$

参考文献

- V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolskiy, *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, Lett. Math. Phys. 98 (2011) 33-64; arXiv:1012.1312v4 [hep-th].
- H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture*, RIMS kōkyūroku **1765** (2011) 12–32; arXiv:1106.4088v3 [math-ph].
- A. Morozov and A. Smirnov, *Towards the proof of AGT relations with the help of the generalized Jack polynomials*, Lett. Math. Phys. 104 (2014) 585-612; arXiv:1307.2576v2 [hep-th].
- Y. Ohkubo, *Existence and Orthogonality of Generalized Jack Polynomials and Its q-Deformation*, arXiv:1404:5401v1 [math-ph].
- Y. Zenkevich, *Generalized Macdonald polynomials, spectral duality for conformal blocks and AGTcoorespondence in five dimesions*, arXiv:1412.8592 [hep-th].