Existence and Orthogonality of Generalized Jack Polynomials and Its q-Deformation

大久保勇輔

名古屋大学

2014/6/2

arXiv:1404.5401 [math-ph]

流れ

- AGT 予想
- Generalized Jack 多項式を用いた証明
- Generalized Jack 多項式の存在と直交性とその q-変形
- 今後の課題

AGT 予想

AGT 予想

2 次元共形場理論		**4 次元ゲージ理論**
共形ブロック	=	Nekrasov 公式

- 1984 年, 共形場理論の基礎が確立される [Belavin-Polyakov-Zamolodchikov]

- 2002 年, インスタントン分配関数に明示的な公式が与えられる [Nekrasov]

AGT 予想

AGT 予想

2 次元共形場理論		**4 次元ゲージ理論**
共形ブロック	$=$	Nekrasov 公式

Virasoro/W_N 代数	$\longleftrightarrow$	4 次元 $SU(2)/SU(N)$
q 変形	$\longleftrightarrow$	5 次元

共形場理論

- **Virasoro 代数：**

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + c\,\frac{n(n^2-1)}{12}\delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

$$[L_n, c] = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- **最高ウエイト表現：**

$$M_h = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|h\rangle, \qquad M_h^* = \langle h|\mathbb{C}[L_1, L_2, \dots]$$

where

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \qquad L_n|h\rangle = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\langle h|L_0 = \langle h|h, \qquad \langle h|L_{-n} = 0 \quad (n \geq 1)$$

- **プライマリー場 $\Phi(z)$：**

$$[L_n, \Phi(z)] = z^n \left(z\frac{\partial}{\partial z} + h(n+1) \right) \Phi(z) \qquad (z,\, h \in \mathbb{C})$$

共形場理論

目標 N 点相関関数

$$\langle 0|\, \Phi_N(z_N)\cdots\Phi_1(z_1)\,|0\rangle$$

を計算する

→相関関数の重要な構成要素である**共形ブロック**を考える

4 点共形ブロック

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|J|=|K|=n} \langle h_4|\, \Phi_3(1) L_{-J}\,|h\rangle \left[B^n_{c,h}\right]^{J,K} \langle h|\, L_K \Phi_2(1)\,|h_1\rangle$$

共形場理論

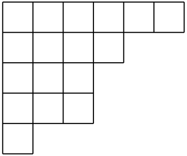
4 点共形ブロック

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\underline{|J|=|K|=n}} \langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle \left[B_{c,h}^{n} \right]^{J,K} \langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle$$

パーティション

- パーティション $J = (J_1, \ldots, J_m)$ とは, 非増加な m 個の整数 $J_1 \geq \ldots \geq J_m > 0$ の列である. （$\ell(J) = m$ と書く）
- $|J| \equiv J_1 + \cdots + J_m$ を J の大きさという.
- ヤング図形に対応させて考える.

例：$J = (6, 4, 3, 3, 1)$



共形場理論

4 点共形ブロック

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\underline{|J|=|K|=n}} \langle h_4 | \Phi_3(1) \underline{L_{-J}} | h \rangle \left[B_{c,h}^{n} \right]^{J,K} \langle h | \underline{L_K} \Phi_2(1) | h_1 \rangle$$

パーティション

$J = (J_1, \ldots, J_m)$ に対して,

$$L_{-J} = L_{-J_1} L_{-J_2} \cdots L_{-J_m},$$

$$L_J = L_{J_m} L_{J_{m-1}} \cdots L_{J_1}$$

とする.

共形場理論

4 点共形ブロック

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|J|=|K|=n} \underline{\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle} \left[B^n_{c,h} \right]^{J,K} \underline{\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle}$$

Proposition (3 点関数)

$$\langle h_4 | \Phi_3(1) L_{-J} | h \rangle = \prod_{i=1}^{\ell(J)} \left(h - h_4 + J_{\ell(J)+1-i} h_3 + \sum_{j > \ell(J)-i} J_j \right),$$

$$\langle h | L_K \Phi_2(1) | h_1 \rangle = \prod_{i=1}^{\ell(K)} \left(h - h_1 + K_{\ell(K)+1-i} h_2 + \sum_{j > \ell(K)-i} K_j \right)$$

共形場理論

4 点共形ブロック

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|J|=|K|=n} \langle h_4| \Phi_3(1) L_{-J} |h\rangle \underline{\left[B^n_{c,h}\right]^{J,K}} \langle h| L_K \Phi_2(1) |h_1\rangle$$

- $\left[B^n_{c,h}\right]_{J,K} = \langle h| L_J L_{-K} |h\rangle$ を成分に持つ行列 $\left[B^n_{c,h}\right]$ を Kac 行列という.
- Example

$$[B^1_{c,h}] = \left(\langle h| L_1 L_{-1} |h\rangle\right) = (2h),$$

$$[B^2_{c,h}] = \begin{pmatrix} \langle h|L_2 L_{-2}|h\rangle & \langle h|L_2 L_{-1} L_{-1}|h\rangle \\ \langle h|L_1 L_1 L_{-2}|h\rangle & \langle h|L_1 L_1 L_{-1} L_{-1}|h\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c+8h}{2} & 6h \\ 6h & 4h(1+2h) \end{pmatrix}$$

- $\left[B^n_{c,h}\right]^{J,K}$ は Kac 行列の逆行列要素

Nekrasov 公式

4 次元 $U(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 公式

$$Z_{\rm Nek}^{N_f\,U(2)}(\Lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} \Lambda^N \sum_{|\vec{Y}|=N} Z_{\vec{Y}}^{N_f},$$

$$Z_{\vec{Y}}^{N_f} = \frac{\prod_{k=1}^{N_f} Z_{\vec{Y}}^{\rm hyper}(m_k,\vec{a},\vec{\epsilon})}{Z_{\vec{Y}}^{\rm vect}(\vec{a},\vec{\epsilon})}$$

$$\begin{aligned} Z_{\vec{Y}}^{\rm vect}(\vec{a},\vec{\epsilon}) = \prod_{\alpha,\beta=1}^{2} \prod_{(i,j)\in Y^{(\alpha)}} & (a_\alpha - a_\beta + (\underline{A_{Y^{(\alpha)}}(i,j)}+1)\epsilon_2 - \underline{L_{Y^{(\beta)}}(i,j)}\epsilon_1) \\ \times \prod_{(i,j)\in Y^{(\beta)}} & (a_\alpha - a_\beta - \underline{A_{Y^{(\beta)}}(i,j)}\epsilon_2 + (\underline{L_{Y^{(\alpha)}}(i,j)}+1)\epsilon_1), \end{aligned}$$

$$Z_{\vec{Y}}^{\rm hyper}(m,\vec{a},\vec{\epsilon}) = \prod_{\alpha=1}^{2} \prod_{(i,j)\in Y^{(\alpha)}} (m + a_\alpha + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2)$$

$(\vec{m} = (m_1,m_2,m_3,m_4),\ \vec{a} = (a_1,a_2),\ \vec{\epsilon} = (\epsilon_1,\epsilon_2),\ N_f = 0,1,2,3,4)$
※ $\sum_{|\vec{Y}|=N}$ は大きさが N の 2 つのヤング図の組 $\vec{Y} = (Y^{(1)},Y^{(2)})$ について足し上げる

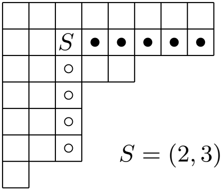
Nekrasov 公式

アーム長，レッグ長の説明
ヤング図 Y とその図上の座標 (i,j) に対して

$$A_Y(i,j) = Y_i - j, \qquad L_Y(i,j) = \#\{k \mid Y_k \geq j\} - i$$

と定める

例　$Y = (8,8,5,3,3,3,1)$ のとき $A_Y(2,3) = 5$, $L_Y(2,3) = 4$



$S = (2,3)$

注意　$A_Y(3,7) = -2$, $L_Y(3,7) = -1$ のように負の値を取ることもある．

Nekrasov 公式

Definition ($N_f = 4$, $U(2)$ ゲージ理論の $U(1)$ 因子)

$$Z^{U(1)} = (1-\Lambda)^{\frac{1}{2\epsilon_1\epsilon_2}(m_1+m_2)(m_3+m_4)}$$

Definition ($N_f = 4$, $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 公式)

$$Z_{\text{Nek}}^{N_f=4\,SU(2)}(\Lambda) = \frac{Z_{\text{Nek}}^{N_f=4\,U(2)}(\Lambda)}{Z^{U(1)}}$$

ただし $a = a_1 = -a_2$ とする.

AGT 予想

Conjecture ([Alday-Gaiotto-Tachikawa. 2009])

４点共形ブロックと $N_f = 4$, $SU(2)$ ゲージ理論の Nekrasov 公式が一致する：

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(\Lambda) = Z_{\text{Nek}}^{N_f=4\, SU(2)}(\Lambda, \vec{m}, a, \vec{\epsilon})$$

ただし

$$c = 1 + 6Q^2, \qquad Q = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}},$$

$$h = \frac{Q^2}{4} - \frac{a^2}{\epsilon_1 \epsilon_2},$$

$$h_i = \frac{1}{4}\left(Q^2 - \lambda_i^2\right) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\lambda_1 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}, \qquad \lambda_2 = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} - Q,$$

$$\lambda_3 = \frac{m_3 + m_4}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} - Q, \qquad \lambda_4 = \frac{-m_3 + m_4}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}$$

AGT 予想

拡張

- $N_f = 0, 1, 2, 3$ に対応させた AGT 予想もある
  $\rightarrow N_f = 4$ の場合から退化極限をとる

証明

- $N_f = 0, 1, 2$ の場合には証明がある [Hadasz et al, 2010]
  $\rightarrow$ Zamolodchikov 漸化式を用いて証明できる

- $N_f = 4$ の場合には (未完成な) 証明がある [Morozov-Smirnov, 2013]
  $\rightarrow$ Generalized Jack 多項式を用いる

Jack 多項式

$\Lambda_{N,\beta} := \mathbb{Q}(\beta)[x_1, \ldots, x_N]$
$\Lambda_\beta := \varprojlim \Lambda_{N,\beta}$

- Jack 対称関数を固有関数に持つ Hamiltonian $H_\beta : \Lambda_\beta \to \Lambda_\beta$

$$H_\beta := \sum_{n,m\geq 1} nm p_{n+m} \frac{\partial^2}{\partial p_n \partial p_m} + \beta \sum_{n,m\geq 1} (n+m) p_n p_m \frac{\partial}{\partial p_{n+m}} + (1-\beta) \sum_n n^2 p_n \frac{\partial}{\partial p_n}$$

$(p_n = \sum_{i\geq 1} x_i^n)$

- **Dominance 半順序** ：パーティション λ, μ に対して $\lambda < \mu$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad |\lambda| = |\mu| \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i < \sum_{i=1}^k \mu_i \quad (\forall k)$$

- 各パーティション λ 対して，$J_\lambda(x) \in \Lambda_\beta$（**Jack 対称関数**）が一意的に存在して以下の 2 条件を満たす：
  - $J_\lambda(x) = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda,\mu} m_\mu, \quad u_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}(\beta)$；
  - $H_\beta J_\lambda(x) = e_\lambda J_\lambda(x), \quad e_\lambda \in \mathbb{Q}(\beta)$.

（m_λ：モノミアル対称関数）

Jack 多項式

Jack 多項式の例（モノミアル多項式で表す）

$$\begin{pmatrix} J_{(3)}(x) \\ J_{(2,1)}(x) \\ J_{(1,1,1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\beta}{2+\beta} & \frac{6\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)} \\ 0 & 1 & \frac{6\beta}{1+2\beta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{(3)} \\ m_{(2,1)} \\ m_{(1,1,1)} \end{pmatrix}$$

Jack 多項式の例（冪和多項式で表す）

$$J_{(3)}(x) = \frac{1}{(1+\beta)(2+\beta)} \left(2p_{(3)} + 3\beta p_{(2,1)} + \beta^2 p_{(1,1,1)}\right)$$

$$J_{(2,1)}(x) = \frac{1}{1+2\beta} \left(-p_{(3)} + (1-\beta)p_{(2,1)} + \beta p_{(1,1,1)}\right)$$

$$J_{(1,1,1)}(x) = \frac{1}{6} \left(2p_{(3)} - 3p_{(2,1)} + p_{(1,1,1)}\right)$$

Jack 多項式

- Λ_β 上の内積を $p_\lambda = \prod_{i\geq 1} p_{\lambda_i}$ に対して

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\beta = \delta_{\lambda,\mu}\, z_\lambda\, \beta^{-\ell(\lambda)}, \quad z_\lambda \equiv \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} i^{m_i}\, m_i!$$

（$m_i := \#\{j \mid \lambda_j = i\}$）と定める．
- Jack 対称関数はこの内積に関して直交関数系を成す：

$$\lambda \neq \mu \quad \Rightarrow \quad \langle J_\lambda, J_\mu \rangle_\beta = 0$$

Cauchy Formula

u_λ, v_λ を $|\lambda|$ 次の斉次対称関数で Λ_β 上の基底を成すとする．このとき

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle_\beta = \delta_{\lambda,\mu} \quad (\forall\lambda,\, \forall\mu)$$

$$\Longrightarrow \quad \exp\left(\beta \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y)\right) = \sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y)$$

Jack 多項式

- Cauchy formula の例：規格化された Jack 多項式を

$$j_\lambda := \frac{J_\lambda}{\sqrt{\langle J_\lambda, J_\lambda \rangle_\beta}}$$

とすると以下のように展開できる.

$$\exp\left(\beta \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} p_n(x) p_n(y)\right) = \sum_\lambda j_\lambda(x) j_\lambda(y)$$

- 冪和多項式を定数 w でシフトしてもよい：

$$\exp\left(\beta \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left(p_n(x) + w\right) p_n(y)\right) = \sum_\lambda j_\lambda(p_n(x) + w) j_\lambda(p_n(y))$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

- 共形ブロックの自由場表示

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(\Lambda) = (1-\Lambda)^{\frac{v_+ v_-}{2\beta}} B^{\text{boson}}(\Lambda),$$

$$B^{\text{boson}}(\Lambda) \equiv \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+}(1-\Lambda\, x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-}(1-\Lambda\, y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+}\prod_{j=1}^{n_-}(1-\Lambda\, x_i\, y_j)^{2\beta} \right\rangle_+ \right\rangle_-$$

- Selberg アベレージ

関数 $f = f(x_1, \ldots, x_{n_+})$, $g = g(y_1, \ldots, y_{n_-})$ に対して, $\langle - \rangle_+$, $\langle - \rangle_-$ を

$$\langle f \rangle_+ = \frac{1}{S_+} \left(\prod_{i=1}^{n_+} \int_0^1 dx_i \right) \prod_{i=1}^{n_+} x_i^{u_+}(1-x_i)^{v_+} \prod_{1 \le i < j \le n_+} (x_i - x_j)^{2\beta} f(x),$$

$$\langle g \rangle_- = \frac{1}{S_-} \left(\prod_{j=1}^{n_-} \int_0^1 dy_j \right) \prod_{j=1}^{n_-} y_j^{u_-}(1-y_j)^{v_-} \prod_{1 \le i < j \le n_-} (y_i - y_j)^{2\beta} g(y)$$

と定義する. ここに $S_\pm$ は $\langle 1 \rangle_\pm = 1$ とする為の規格化定数であり,

$$S_\pm = \left(\prod_{i=1}^{n_\pm} \int_0^1 dz_i \right) \prod_{i=1}^{n_\pm} z_i^{u_\pm}(1-z_i)^{v_\pm} \prod_{1 \le i < j \le n_+} (z_i - z_j)^{2\beta}$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

- 共形ブロックの自由場表示

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(\Lambda) = (1-\Lambda)^{\frac{v_+ v_-}{2\beta}} B^{\text{boson}}(\Lambda),$$

$$B^{\text{boson}}(\Lambda) \equiv \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+} (1-\Lambda\, x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-} (1-\Lambda\, y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} (1-\Lambda\, x_i\, y_j)^{2\beta} \right\rangle_+ \right\rangle_-$$

自由場表示を用いた AGT 予想

$$B^{\text{boson}}(\Lambda) = Z_{\text{Nek}}^{N_f=4\, U(2)}(\Lambda)$$

ただし

$$\beta = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \qquad n_+ = \frac{a-m_2}{\epsilon_1}, \qquad n_- = \frac{-a-m_4}{\epsilon_1}$$

$$u_+ = \frac{m_1 - m_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}, \qquad u_- = \frac{m_3 - m_4 - \epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}$$

$$v_+ = \frac{-m_1 - m_2}{\epsilon_2}, \qquad v_- = \frac{-m_3 - m_4}{\epsilon_2}$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

- 共形ブロックの自由場表示

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(\Lambda) = (1-\Lambda)^{\frac{v_+ v_-}{2\beta}} B^{\text{boson}}(\Lambda),$$

$$B^{\text{boson}}(\Lambda) \equiv \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^{n_+}(1-\Lambda\, x_i)^{v_-} \prod_{j=1}^{n_-}(1-\Lambda\, y_j)^{v_+} \prod_{i=1}^{n_+}\prod_{j=1}^{n_-}(1-\Lambda\, x_i\, y_j)^{2\beta} \right\rangle_+ \right\rangle_-$$

- $B^{\text{boson}}(\Lambda)$ の非積分関数を F と書くと，F は Cauchy formula を適用できる形になっている：

$$B^{\text{boson}}(\Lambda) = \langle\langle F\rangle_+\rangle_-\,,$$

$$F = \exp\left(-\beta\sum_{k\geq 1}\frac{\Lambda^k}{k}p_k(x)\left(p_k(y)+\frac{v_-}{\beta}\right)\right)\exp\left(-\beta\sum_{k\geq 1}\frac{\Lambda^k}{k}p_k(y)\left(p_k(x)+\frac{v_+}{\beta}\right)\right)$$

$$= \sum_{\lambda,\,\mu}\Lambda^{|\lambda|+|\mu|} j_\lambda(p_k(y)) j_\lambda(-p_k(x)-\tfrac{v_+}{\beta}) j_\mu(p_k(x)) j_\mu(-p_k(y)-\tfrac{v_-}{\beta})$$

Generalized Jack 多項式を使った証明（$\beta = 1$）

- $B^{\mathrm{boson}}(\Lambda)$ の計算は Jack 多項式の Selberg アベレージの計算に帰着される：

$$B^{\mathrm{boson}}(\Lambda) = \sum_{\lambda,\mu} \Lambda^{|\lambda|+|\mu|} \left\langle j_\lambda(-p_k(x) - \tfrac{v_+}{\beta}) j_\mu(p_k(x)) \right\rangle_+ \times \left\langle j_\lambda(p_k(y)) j_\mu(-p_k(y) - \tfrac{v_-}{\beta}) \right\rangle_-$$

- B^{boson} と $Z^{U(2)}_{\mathrm{Nek}}$ のヤング図の展開の意味で各項が各項に一致：

$$\left\langle j_\lambda(-p_k(x) - \tfrac{v_+}{\beta}) j_\mu(p_k(x)) \right\rangle_+ \left\langle j_\lambda(p_k(y)) j_\mu(-p_k(y) - \tfrac{v_-}{\beta}) \right\rangle_- = Z^{N_f=4}_{\lambda\mu}$$

※ただし $\beta = 1$ のときだけで，一般の β では上式は成立しない．

一般の β でも各項が各項に一致する多項式を考える
→ Generalized Jack 多項式

Generalized Jack 多項式を使った証明

Kadell 公式

$J_\lambda(p_k(x))$ を n 変数の Jack 多項式とする.

$$\langle J_\lambda(p_k)\rangle = \frac{\tau_\lambda(u+n\beta+1-\beta)\tau_\lambda(n\beta)}{\tau_\lambda(u+v+2n\beta+2-2\beta)} J_\lambda(\delta_{k,1})$$

ここに

$$\tau_\lambda(u) = \frac{1}{\beta^{|\lambda|}} \prod_{(i,j)\in\lambda} (u-\beta(i-1)+(j-1))$$

とし, $J_\lambda(\delta_{k,1})$ は, Jack 多項式を冪和多項式で展開したときの $p_{(1^n)}$ の係数を表す.

Generalized Jack 多項式を使った証明

Conjecture

2つの Jack 多項式の Selberg アベレージは

$$\langle J_\lambda(p_k+w)J_\mu(p_k)\rangle = \frac{1}{\mathrm{Norm}_\beta(u,v,n)} \frac{\tau_\lambda(u+n\beta+1-\beta)\tau_\mu(u+n\beta+1-\beta)}{\tau_\lambda(n\beta)\tau_\mu(u+v+n\beta+2-2\beta)} \times \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j+(j-i)\beta)_\beta \prod_{i<j}(\mu_i-\mu_j+(j-i)\beta)_\beta}{\prod_{i,j=1}^{n}(u+v+2n\beta+2+\lambda_i+\mu_j-(1+i+j)\beta)_\beta} \times J_\lambda(\delta_{k,1})J_\mu(\delta_{k,1})$$

となる．ここに, $w=\frac{v+1-\beta}{\beta}$ で冪和多項式をシフトし, Pochhammer の記号 $(x)_\beta=\frac{\Gamma(x+\beta)}{\Gamma(x)}$ を用いた．また $\mathrm{Norm}_\beta(u,v,n)$ はパーティションに依存しない定数で, $\langle 1\rangle=1$ により定める.

Remark

この積分は $w=0$ つまり $v=\beta-1$ という制限がかかった場合には証明が与えられている

Generalized Jack 多項式を使った証明

Generalized Jack 多項式は N 種類の独立な変数 $\{x_n^{(i)} \mid n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, N\}$ を持つ.
$p_n^{(i)} := \sum_{k\geq 1} x_k^{(i)n}$ とする.

- Generalized Jack 対称関数を固有関数にもつ Hamiltonian：

$$\mathcal{H}_\beta := \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}_\beta^{(i)} + \sum_{i<j} \mathcal{H}_\beta^{(i,j)},$$

$$\mathcal{H}_\beta^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\left(\beta(n+m)p_n^{(i)}p_m^{(i)}\frac{\partial}{\partial p_{n+m}^{(i)}} + n\,m\,p_{n+m}^{(i)}\frac{\partial^2}{\partial p_n^{(i)}\partial p_m^{(i)}}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_i + \frac{1-\beta}{2}n\right)np_n^{(i)}\frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}}$$

$$\mathcal{H}_\beta^{(i,j)} = (1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n^{(j)}\frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}}$$

- Generalized Jack 多項式 $P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}(p_n^{(1)}, \ldots, p_n^{(N)})$ を $\mathcal{H}_\beta$ の固有関数として定義する：

$$\mathcal{H}_\beta P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)} = e_{\vec{\lambda}} P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}$$

$$e_{\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{(i,j)\in\lambda^{(i)}}(u_i + (j-1) - (i-1)\beta)$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

- 以下の内積に関して $\mathcal{H}_\beta$ は自己共役でない.

$$\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\mu}} \rangle_\beta^{\otimes N} = \delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} \prod_{i=1}^{N} z_{\lambda^{(i)}} \beta^{-\ell(\lambda^{(i)})}, \quad p_{\vec{\lambda}} = \prod_{i=1}^{N} p_{\lambda^{(i)}}^{(i)}$$

- 共役な演算子 $\mathcal{H}_\beta^*$ の固有関数を $P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}$ とする：

$$\mathcal{H}_\beta^* P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*} = e_{\vec{\lambda}}^* P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}$$

$$e_{\vec{\lambda}}^* = e_{\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{(i,j)\in\lambda^{(i)}} (u_i + (j-1) - (i-1)\beta)$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

- 以下の内積に関して $\mathcal{H}_\beta$ は自己共役でない.

$$\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\mu}} \rangle_\beta^{\otimes N} = \delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} \prod_{i=1}^{N} z_{\lambda^{(i)}} \beta^{-\ell(\lambda^{(i)})}, \quad p_{\vec{\lambda}} = \prod_{i=1}^{N} p_{\lambda^{(i)}}^{(i)}$$

- 共役な演算子 $\mathcal{H}_\beta^*$ の固有関数を $P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}$ とする：

$$\mathcal{H}_\beta^* P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*} = e_{\vec{\lambda}}^* P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}$$

$$e_{\vec{\lambda}}^* = e_{\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{(i,j)\in\lambda^{(i)}} (u_i + (j-1) - (i-1)\beta)$$

※ $P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}$ と $P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}$ の存在は非自明

Generalized Jack 多項式を使った証明

$N=2$ のときを考える.

- $P^{(\beta)}_{\vec{\lambda}}$ の規格化：
  $a=u_1=-u_2$ とし, 以下の条件で規格化した Generalized Jack 多項式とその双対を, $P_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(y))$, $P^*_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(y))$ と書く.

$$P_{\lambda\,\mu}(a,p_k(x),p_k(y))=P^*_{\mu\,\lambda}(-a,p_k(y),p_k(x))$$

$$\left\langle P_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(y))\,,\,P^*_{\vec{\mu}}(a,p_k(x),p_k(y))\right\rangle^{\otimes 2}_{\beta}=\delta_{\vec{\lambda}\,\vec{\mu}}\,Z^{\mathrm{vect}}_{\vec{\lambda}}(\epsilon_2 a,\vec{\epsilon})\epsilon_1^{-4|\vec{\lambda}|}$$

- Generalized Jack 多項式の Cauchy formula：

$$\begin{aligned}&\exp\left(\beta\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}p_k(x)p_k(y)\right)\exp\left(\beta\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}p_k(z)p_k(w)\right)\\&=\sum_{\vec{\lambda}}\frac{P_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(w))P^*_{\vec{\lambda}}(a,p_k(y),p_k(z))}{Z^{\mathrm{vect}}_{\vec{\lambda}}(\epsilon_2 a,\vec{\epsilon})\epsilon_1^{-4|\vec{\lambda}|}}\end{aligned}$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

$N=2$ のときを考える.

- $P^{(\beta)}_{\vec{\lambda}}$ の規格化：
  $a=u_1=-u_2$ とし, 以下の条件で規格化した Generalized Jack 多項式とその双対を, $P_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(y))$, $P^*_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(y))$ と書く.

$$P_{\lambda\,\mu}(a,p_k(x),p_k(y))=P^*_{\mu\,\lambda}(-a,p_k(y),p_k(x))$$

$$\left\langle P_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(y))\,,\,P^*_{\vec{\mu}}(a,p_k(x),p_k(y))\right\rangle^{\otimes 2}_{\beta}=\delta_{\vec{\lambda}\,\vec{\mu}}\,Z^{\mathrm{vect}}_{\vec{\lambda}}(\epsilon_2 a,\vec{\epsilon})\epsilon_1^{-4|\vec{\lambda}|}$$

- Generalized Jack 多項式の Cauchy formula：

$$\exp\left(\beta\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}p_k(x)p_k(y)\right)\exp\left(\beta\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}p_k(z)p_k(w)\right)$$
$$=\sum_{\vec{\lambda}}\frac{P_{\vec{\lambda}}(a,p_k(x),p_k(w))P^*_{\vec{\lambda}}(a,p_k(y),p_k(z))}{Z^{\mathrm{vect}}_{\vec{\lambda}}(\epsilon_2 a,\vec{\epsilon})\epsilon_1^{-4|\vec{\lambda}|}}$$

※固有値が縮退する為, 直交性は非自明

Generalized Jack 多項式を使った証明

Conjecture

パラメータ a を

$$a = -\beta n - \frac{1}{2}(u + v + 1 - \beta)$$

とパラメトライズする．このとき n 変数の Generalized Jack 多項式の Selberg アベレージは

$$\left\langle P_{\vec{\lambda}}(a, -p_k - \tfrac{v}{\beta}, p_k) \right\rangle = (-1)^{|\lambda^{(1)}|+|\lambda^{(2)}|}\tau_\lambda(-v - \beta n)\tau_\lambda(-u - v - \beta n - 1 + \beta) \times \tau_\mu(\beta n)\tau_\mu(u + \beta n + 1 - \beta),$$

$$\left\langle P^*_{\vec{\lambda}}(a, p_k, -p_k - \tfrac{v}{\beta}) \right\rangle = (-1)^{|\lambda^{(1)}|+|\lambda^{(2)}|}\tau_\lambda(\beta n)\tau_\lambda(u + \beta n + 1 - \beta) \times \tau_\mu(-v - \beta n)\tau_\mu(-u - v - \beta n - 1 + \beta)$$

となる．

Generalized Jack 多項式を使った証明

- $\beta \neq 1$ でも各項が各項に一致する：

$$B(\Lambda) = \sum_{\vec{\lambda}} \Lambda^{|\vec{\lambda}|} \frac{\left\langle P_{\vec{\lambda}}(a, -p_k(x) - \frac{v_+}{\beta}, p_k(x)) \right\rangle_+ \left\langle P^*_{\vec{\lambda}}(a, p_k(y), -p_k(y) - \frac{v_-}{\beta}) \right\rangle_-}{Z^{\mathrm{vect}}_{\vec{\lambda}}(\epsilon_2 a, \vec{\epsilon})\epsilon_1^{-4|\vec{\lambda}|}}$$

$$= \sum_{\vec{\lambda}} \Lambda^{|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}^{N_f=4}$$

$$= Z_{\mathrm{Nek}}^{N_f=4\, U(2)}(\Lambda)$$

Generalized Jack 多項式を使った証明

1. 自由場表示する：

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) \quad \xrightarrow{\text{自由場表示}} \quad \frac{\langle\langle F \rangle\rangle}{Z^{U(1)}}$$

2. Generalized Jack 多項式で展開する：

$$F = \sum_{\vec{Y}} C_{\vec{Y}} \, P_{\vec{Y}} \, P^*_{\vec{Y}}$$

（$P_{\vec{Y}}$ は Generalized Jack 多項式）

3. 各項の積分値が $Z_{\text{Nek}}^{N_f=4\, U(2)}$ の各項 $Z_{\vec{Y}}^{N_f=4}$ に一致する

Generalized Jack 多項式を使った証明

1. 自由場表示する： ↓厳密な証明は未だ

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) \quad \xrightarrow{\text{自由場表示}} \quad \frac{\langle\langle F \rangle\rangle}{Z^{U(1)}}$$

2. Generalized Jack 多項式で展開する： ←存在と直交性...

$$F = \sum_{\vec{Y}} C_{\vec{Y}} \, P_{\vec{Y}} \, P^*_{\vec{Y}}$$

（$P_{\vec{Y}}$ は Generalized Jack 多項式）

3. 各項の積分値が $Z_{\mathrm{Nek}}^{N_f=4\, U(2)}$ の各項 $Z_{\vec{Y}}^{N_f=4}$ に一致する

※積分値が予想のまま

Generalized Jack 対称関数の存在と直交性

- **拡張された Dominance 半順序** ：パーティションの組 $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ に対して $\vec{\lambda} \geq^{\mathrm{R}} \vec{\mu}$ (resp. $\vec{\lambda} \geq^{\mathrm{L}} \vec{\mu}$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $|\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}|$ and

$$|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(j-1)}| + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k^{(j)} \geq |\mu^{(1)}| + \cdots + |\mu^{(j-1)}| + \sum_{k=1}^{i} \mu_k^{(j)}$$

$$\left(\text{resp.} \quad |\lambda^{(N)}| + \cdots + |\lambda^{(j+1)}| + \sum_{k=1}^{i} \lambda_k^{(j)} \geq |\mu^{(N)}| + \cdots + |\mu^{(j+1)}| + \sum_{k=1}^{i} \mu_k^{(j)}\right)$$

  for all $i \geq 1$ and $1 \leq j \leq N$.

- モノミアル対称関数 $m_{\vec{\lambda}} = \prod_{i=1}^{N} m^{(i)}_{\lambda^{(i)}}$ を基底にとれば $\mathcal{H}_\beta$ の表現行列を三角化できる：

$$\mathcal{H}_\beta m_{\vec{\lambda}} = \sum_{\vec{\mu} \leq^{\mathrm{R}} \vec{\lambda}} c_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}}, \quad c_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} \in \mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_N, \beta)$$

Generalized Jack 対称関数の存在定理

各 $\vec{\lambda}$ 対して, $P^{(\beta)}_{\vec{\lambda}}$ が一意的に存在して以下の 2 条件を満たす：

- $P^{(\beta)}_{\vec{\lambda}} = m_{\vec{\lambda}} + \sum_{\vec{\mu} <^{\mathrm{R}} \vec{\lambda}} u_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}}, \quad u_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_N, \beta)$；
- $\mathcal{H}_\beta P^{(\beta)}_{\vec{\lambda}} = e_{\vec{\lambda}} P^{(\beta)}_{\vec{\lambda}}, \quad e_\lambda \in \mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_N, \beta)$.

Generalized Jack 対称関数の存在と直交性

- 半順序" $>^{\mathrm{L}}$" は双対の Generlized Jack 対称関数の存在定理を示す.

双対の Generalized Jack 対称関数の存在定理

各 $\vec{\lambda}$ 対して, $P^{(\beta)*}_{\vec{\lambda}}$ が一意的に存在して以下の 2 条件を満たす：

- $P^{(\beta)*}_{\vec{\lambda}} = m_{\vec{\lambda}} + \sum_{\vec{\mu}<^{\mathrm{L}}\vec{\lambda}} u_{\vec{\lambda},\vec{\mu}}\, m_{\vec{\mu}}, \quad u_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Q}(u_1,\ldots,u_N,\beta)$;
- $\mathcal{H}^*_\beta P^{(\beta)*}_{\vec{\lambda}} = e^*_{\vec{\lambda}} P^{(\beta)*}_{\vec{\lambda}}, \quad e_\lambda \in \mathbb{Q}(u_1,\ldots,u_N,\beta)$.

このとき固有値は

$$e_{\vec{\lambda}} = e^*_{\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{(i,j)\in\lambda^{(i)}} (u_i + (j-1) - (i-1)\beta)$$

Generalized Jack 対称関数の存在と直交性

- 直交性は q 変形して縮退を取り除く必要がある.
  → Generalized Macdonald 多項式を考える.
- 他の目的で作られたものがある [Awata et al, 2011]

$$\eta^{(i)}(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} z^n p_n^{(i)}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} (1-q^n) z^{-n} \frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}}\right),$$

$$\varphi^{(i)}(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) r^{-\frac{n}{4}} z^n p_n^{(i)}\right), \quad r = t/q$$

$$\widetilde{\Lambda}_i := \varphi^{(N)}(r^{\frac{1}{4}} z)\, \varphi^{(N-1)}(r^{\frac{3}{4}} z) \cdots \varphi^{(N-i+1)}(r^{\frac{2(N-i)+1}{4}} z)\, \eta^{(N-i+1)}(r^{\frac{N-i}{2}} z),$$

$$X(z) := \sum_{i=1}^{N} u_i' \widetilde{\Lambda}_i$$

Generalized Macdonald 多項式は以下の演算子の固有関数.

$$X_0 := \oint \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z} X(z).$$

Generalized Jack 対称関数の存在と直交性

- **Generalized Macdonald 対称関数の存在定理**：各 $\vec{\lambda}$ に対して，以下の 2 条件を満たす $P^{(q,t)}_{\vec{\lambda}}$ が一意的に存在する：
  - $P^{(q,t)}_{\vec{\lambda}} = m_{\vec{\lambda}} + \sum_{\vec{\mu} <^{\mathrm{R}} \vec{\lambda}} d_{\vec{\lambda}\vec{\mu}}\, m_{\vec{\mu}}, \qquad d_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} \in \mathbb{Q}(q,t,u'_1,\ldots,u'_N);$
  - $X_0 P^{(q,t)}_{\vec{\lambda}} = e_{\vec{\lambda}} P^{(q,t)}_{\vec{\lambda}}, \qquad e_{\vec{\lambda}} \in \mathbb{Q}(q,t,u'_1,\ldots,u'_N).$
- X_0^*：以下の内積 $\langle -,-\rangle^{\otimes N}_{q,t}$ に関する X_0 の共役演算子

$$\left\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\mu}} \right\rangle^{\otimes N}_{q,t} = \delta_{\vec{\lambda},\vec{\mu}} \prod_{i=1}^{N} z_{\lambda^{(i)}} \prod_{k=1}^{\ell(\lambda^{(i)})} \frac{1-q^{\lambda^{(i)}_k}}{1-t^{\lambda^{(i)}_k}}, \qquad z_{\lambda^{(i)}} := \prod_{k\geq 1} k^{m_k}\, m_k!,$$

  $P^{(q,t)*}_{\vec{\lambda}}$：$X_0^*$ の固有関数 i.e. $X_0^* P^{(q,t)*}_{\vec{\lambda}} = e^*_{\vec{\lambda}} P^{(q,t)*}_{\vec{\lambda}}$
- このとき固有値は

$$e_{\vec{\lambda}} = e^*_{\vec{\lambda}} = \sum_{i=1}^{N} u_i\, \epsilon_{\lambda^{(i)}}, \quad \epsilon_\lambda = 1 + (t-1)\sum_{k=1}^{\ell(\lambda)} (q^{\lambda_k} - 1) t^{-k}.$$

  であり縮退しない：　$\vec{\lambda} \neq \vec{\mu} \quad \Rightarrow \quad e_{\vec{\lambda}} \neq e_{\vec{\mu}}.$
- 従って**直交性**が成立つ：

$$\vec{\lambda} \neq \vec{\mu} \quad \Rightarrow \quad \left\langle P^{(q,t)*}_{\vec{\lambda}}, P^{(q,t)}_{\vec{\mu}} \right\rangle^{\otimes N}_{q,t} = 0$$

Generalized Jack 対称関数の存在と直交性

- β 変形への極限：$u_i' = q^{u_i}$ $(i=1,\ldots,N)$, $t=q^\beta$, $q=e^\hbar$ とおいて極限 $\hbar\to 0$ を考える．

$$\begin{aligned} X_0 =& 1+\sum_{i=1}^N u_i\,\hbar+\hbar^2\left\{\beta\sum_{i=1}^N\sum_{n=1}^\infty n\,p_n^{(i)}\frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N u_i^2\right\} \\ &+\hbar^3\left\{\beta\,\mathcal{H}_\beta+\sum_{i=1}^N\frac{u_i^3}{6}\right\}+\mathcal{O}(\hbar^4), \end{aligned}$$

For $k=0,1,2,\ldots$, define operators H_k by

$$X_0 =: \sum_{k=0}^\infty \hbar^k H_k.$$

$$\lim_{\hbar\to 0}\left(\frac{X_0-(H_0+\hbar H_1+\hbar^2 H_2)}{(t-1)(q-1)^2}\right)=\mathcal{H}_\beta+\frac{1}{6\beta}\sum_{i=1}^N u_i'^3,$$

Generalized Jack 対称関数の存在と直交性

Generalized Macdonald 多項式の β 変形への極限 [arXiv:1404.5401]

$$P_{\vec{\lambda}}^{(q,t)} \underset{\substack{\hbar\to 0,\\ u_i'=q^{u_i},\, t=q^{\beta},\, q=e^{\hbar}}}{\longrightarrow} P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)}.$$

- $P_{\vec{\lambda}}^{(q,t)*}$ と $P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}$ に関しても同じことが成立つ.
- 内積 $\langle -,-\rangle_{q,t}$ は $\langle -,-\rangle_{\beta}$ に退化する.

Generalized Jack 多項式の直交性

$$\vec{\lambda} \neq \vec{\mu} \quad \Rightarrow \quad \left\langle P_{\vec{\lambda}}^{(\beta)*}, P_{\vec{\mu}}^{(\beta)} \right\rangle_{\beta}^{\otimes N} = 0$$

今後の課題

今後の課題

1. 自由場表示する：　　↓厳密な証明は未だ

$$\mathcal{B}_{h_4 h_3; h_2 h_1; h}(z) \quad \xrightarrow{\text{自由場表示}} \quad \frac{\langle\langle F \rangle\rangle}{Z^{U(1)}}$$

2. Generalized Jack 多項式で展開する：

$$F = \sum_{\vec{Y}} C_{\vec{Y}} P_{\vec{Y}} P^*_{\vec{Y}}$$

（$P_{\vec{Y}}$ は Generalized Jack 多項式）

3. 各項の積分値が $Z^{N_f=4\,U(2)}_{\mathrm{Nek}}$ の各項 $Z^{N_f=4}_{\vec{Y}}$ に一致する

※積分値が予想のまま

今後の課題

- Generalized Macdonald を用いて 5 次元の AGT 予想を説明できるか.

今後の課題

- Generalized Macdonald を用いて 5 次元の AGT 予想を説明できるか.

5 次元ゲージ理論の Nekrasov 分配関数

$$Z^{5\mathrm{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \sum_{|\vec{Y}|=k} \widetilde{\mathcal{A}}_{\vec{Y}},$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{\vec{Y}} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} f^{q+}_{Y_\alpha}(m_k + a_\alpha) f^{q-}_{Y_\alpha}(m_{k+n} + a_\alpha)}{\prod_{\alpha,\alpha'}^{n} g^{q}_{Y_\alpha Y_{\alpha'}}(a_\alpha - a_{\alpha'})},$$

$$g^q_{YW}(x) = \prod_{(i,j)\in Y} [x + \beta L_Y(i,j) + A_W(i,j) + \beta]_q [-x - \beta L_Y(i,j) - A_W(i,j) - 1]_q,$$

$$f^{q\pm}_{Y}(x) = \prod_{(i,j)\in Y} [\pm x \mp \beta(i-1) \pm (j-1)]_q, \qquad [x]_q = \frac{1-q^x}{1-q}.$$

今後の課題

q-変形版共形ブロック

$$B^q(\Lambda) = \left\langle\left\langle \prod_{I=1}^{N_+}\prod_{i=0}^{v_- -1}(1-\Lambda x_I q^i)\prod_{J=1}^{N_-}\prod_{j=0}^{v_+ -1}(1-\Lambda y_J q^j)\prod_{\ell=0}^{\beta-1}\prod_{I=1}^{N_+}\prod_{J=1}^{N_-}(1-\Lambda x_I y_J q^\ell)^2 \right\rangle_+ \right\rangle_-$$

where

$$\left\langle f(x) \right\rangle_\pm = \frac{1}{S_{q\pm}}\left(\prod_{I=1}^{N_\pm}\int_0^1 d_q x_I\right)\prod_{I=1}^{N_\pm} x_I^{u_\pm}\prod_{i=1}^{v_\pm -1}(1-x_I q^i)\prod_{1\le I\ne J\le N_\pm}\prod_{i=1}^{\beta-1}(x_I - q^i x_J) f(x),$$

$$S_{q\pm} = \left(\prod_{I=1}^{N_\pm}\int_0^1 d_q x_I\right)\prod_{I=1}^{N_\pm} x_I^{u_\pm}\prod_{k=0}^{v_\pm -1}(1-q^k x_I)\prod_{1\le I\ne J\le N_\pm}\prod_{k=1}^{\beta-1}(x_I - q^k x_J),$$

$$\int_0^a d_q z\, f(z) = a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} f(aq^k)q^k.$$

今後の課題

q-変形版 AGT 予想

あるパラメータの変換の下で

$$Z^{5\mathrm{D}} \stackrel{?}{=} B^q(\Lambda)$$

- $B^q(\Lambda)$ の非積分関数は Cauchy formula を適応できる形になる.
- $\beta = 1$ の場合は通常の Macdonald 多項式で展開することによって確認できる.
- Generalized Macdonald 多項式 $P_{\vec{\lambda}}^{(q,t)}$ で展開することによってこの関係を説明できるか.

参考文献

H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture*, RIMS kōkyūroku **1765** (2011) 12–32; arXiv:1106.4088v3 [math-ph].

A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov and A. Smirnov, *Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions*, Nucl. Phys. B **855** (2012) no. 1, 128–151.

A. Morozov and A. Smirnov, *Finalizing the proof of AGT relations with the help of the generalized Jack polynomials*, arXiv:1307.2576v2 [hep-th].

Y. Ohkubo, *Existence and Orthogonality of Generalized Jack Polynomials and Its q-Deformation*, arXiv:1404:5401v1 [math-ph].