Non-Abelian Vortex with an Aharonov-Bohm Effect

Keisuke Ohashi @ Osaka City University

based on arXiv:0310.1224 + α

with J. Evslin, K. Konishi,
M. Nitta, W. Vinci

「モジュライ行列法」とは

超対称ゲージ理論のヒッグス相に現れるトポロジカルソリトンのBPS方程式の解のモジュライ空間を抽出するための一連の手続き

目次

§1「モジュライ行列法」とその発展

ステップ1 〜 ステップ4

ステップ5を目指して……

§2. フレーバのゲージ化と Aharonov-Bohm 効果

§1. モジュライ行列法とその発展

● モデル

$d=4$, $\mathcal{N}=2$ 超対称 $U(N_c)$ ゲージ多重項 + N_f ハイパー多重項 + FI項

A_μ, Σ $\quad H, \tilde{H}$

→ ヒッグス相 $(N_f \geq N_c)$

$$V = g^2 \mathrm{Tr}[D^2] + |F_{\tilde{H}}|^2 + |F_H|^2 + |F_\Sigma|^2$$

$$\begin{cases} D = HH^\dagger - \tilde{H}^\dagger \tilde{H} + [\Sigma, \Sigma^\dagger] - v^2 \mathbb{1}_{N_c} \\ F_{\tilde{H}}^\dagger = \Sigma H - HM \end{cases}$$

H: $N_c \times N_f$

Σ: $N_c \times N_c$

M: $N_f \times N_f$ 質量行列

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

- 真空 $(M=0,\ \Sigma=0)$

$$T_* Gr_{N_f,N_c} = \{H, \tilde{H} \mid D=0,\ F=0\} / U(N_c)$$

$$= \boxed{\{H, \tilde{H} \mid F_\Sigma = H\tilde{H} = 0\} /\!/ U(N_c)^{\mathbb{C}}}$$

複素グラスマン多様体

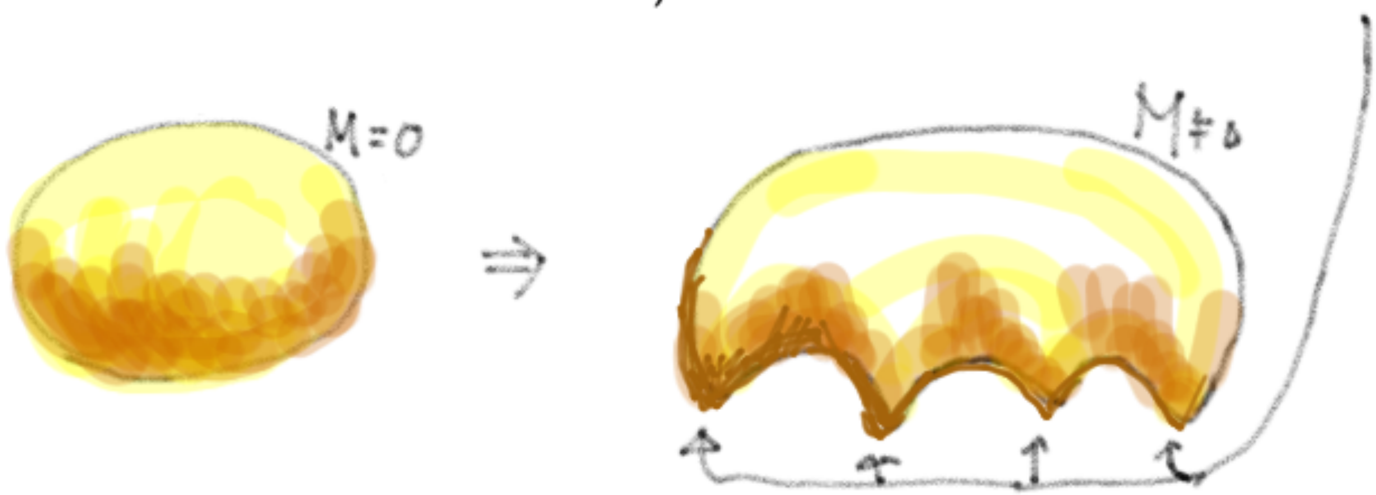
$U(N_c)$ free

$\mathrm{rank}(H) = N_c$

強結合極限$(g^2=\infty)$ ⇒ 非線形σ模型

- 非縮退化したM $(m_i \neq m_j,\ i \neq j)$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} m_{\sigma_1} & & \\ & m_{\sigma_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

⇒ 真空のもち上げ，孤立した ${}_{N_f}C_{N_c}$ 個の真空



非アーベリアンドメインウォール with $m_i \neq m_j \ (i \neq j)$

$x^3 = \pm\infty$ の異なる真空をつなぐドメインウォール解.

BPS方程式 $\left(\hat{F}_{\bar{H}} = 0,\ \Sigma = \Sigma^\dagger\right)$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\hat{D} &= \mathcal{D}_3 \Sigma + \frac{g^2}{2}\underbrace{\left(HH^\dagger - v^2 \mathbb{1}\right)}_{D} = 0 \quad \leftarrow \quad D = 0 \\
\hat{F}_{\bar{H}} &= \mathcal{D}_3 H + \underbrace{\Sigma H - HM}_{F_{\bar{H}}} = 0 \quad \leftarrow \quad F_{\bar{H}} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

無限次元 D項, F項

ドメインウォールの張力 $T = v^2 \left[\mathrm{Tr}(\Sigma)\right]_{x^3=-\infty}^{x^3=\infty}$

• 「モジュライ行列法」のステップ 1

$\boxed{F_{\tilde{H}}=0 \text{ の解 } \Rightarrow \text{ モジュライ行列 } \overset{N_c\times N_f}{H_0}}$

$$\underbrace{A_3+i\Sigma}_{\text{ゲージ場の複素化}} = -i\,\underbrace{S^{-1}\partial_3 S}_{\text{ピュアゲージ}}, \qquad H = S^{-1}\underbrace{H_0}_{\text{積分定数}}e^{Mx^3}$$

→ $\hat{D}=0$ は $SS^{\dagger}$ についての方程式.

• 強結合極限 $g^2=\infty$

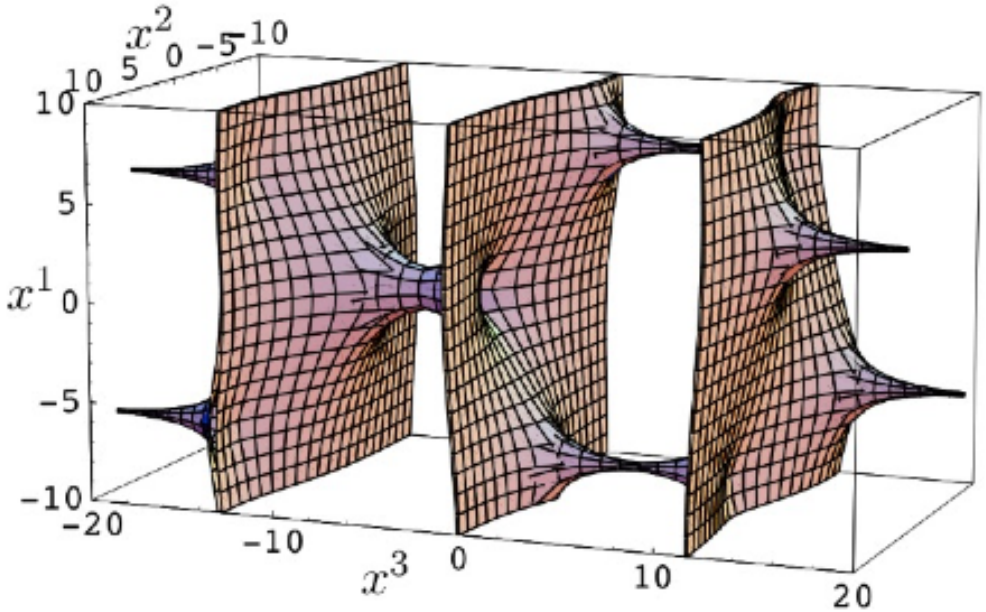
$\hat{D}=0 \xrightarrow[g^2\to\infty]{} D=0 \Rightarrow$ 厳密解 $SS^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}H_0 e^{2Mx^3}H_0^{\dagger}$

⟹ BPS解の解のモジュライ空間の決定

$$\boxed{Gr_{N_f,N_c} = \{H_0\}/\!/U(N_c)^{\mathbb{C}}}$$

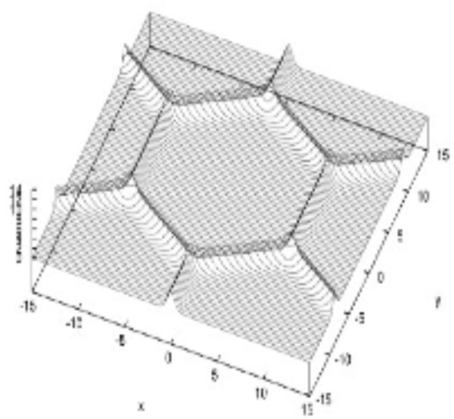
「モジュライ行列法」のステップ1.5

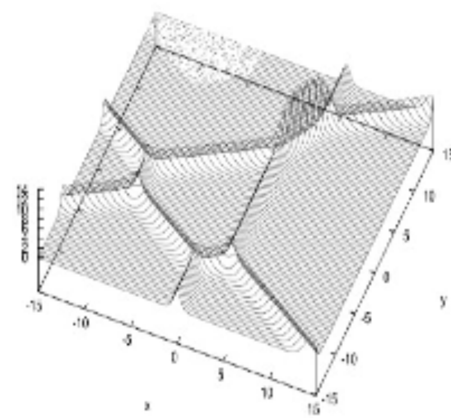
＊BPS複合ソリトンへの応用



ドメインウォール間に
張られたボーテックス(ランプ)

ドメインウォール
のネット.





有限のg^2では? → 厳密解に固執するな.

● 「モジュライ行列法」のステップ2

重要な予想

任意のH_0に対して $\mathfrak{D}=0$ はただ一つの解を持つ

根拠

- 指数定理 ⇒ モジュライ空間の次元(の下限)はg^2に依存しない.
- 数値解の定性的振舞いは(あまり)変わらない.
- アーベリアン($N_c=1$)で証明が知られている.

つまり…..

U(N_c)がfreeに作用する(ヒッグス相)

モジュライ空間

$$\{A_3, \Sigma, H \mid \mathfrak{D}=0, F_A=0\}/U(N_c) = \{H \mid F_A=0\}/\!/U(N_c)^{\mathbb{C}}$$

ヒッチン・小林対応の"無限次元版"

極限 $g^2\to\infty$ が採れない場合は?

● 非アーベリアン局所ボーテックス ($N_f = N_c$, $M=0$)

• 真空: $H = v\mathbb{1}$ カラー・フレーバー固定相 (孤立点)

フレーバー

カラー

$g^2\to\infty$ で空の理論?

• BPS方程式 (全ての場が滑らかな関数となるゲージ)

$$\begin{cases} \hat{D} \equiv -F_{12} + \frac{g^2}{4}(v^2\mathbb{1} - HH^\dagger) = 0 \\ \hat{F}_{\hat{H}} \equiv (\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2) H = 2\mathcal{D}_{\bar{z}} H = 0 \end{cases}$$

複素平面 ($z = x^1 + ix^2$) に垂直なボーテックス解

位相欠陥: $\pi_1(U(N_c)) = \mathbb{Z} \ni k = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\mathrm{Tr}[F_{12}]$

• ボーテックスの張力 $T = 2\pi v^2 k$

$F_{\hat{H}}=0$ の解

z の多項式

$$A_1+iA_2=-iS^{-1}\partial_{\bar{z}}S\,,\qquad H=S^{-1}H_0(z)\,.$$

$$k=\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,\mathrm{Tr}[F_{12}] \longleftrightarrow \det[H_0(z)]=O(z^k)$$

$|z|\to\infty$
$HH^\dagger\sim v^2\mathbb{1}$

k 個のゼロ点

k ボーテックス解のモジュライ空間 $\mathcal{M}_k$

$$\mathcal{M}_k=\left\{H\,\middle|\,F_{\hat{H}}=0,\ \int F_{12}=2\pi k\right\}\Big/U(N_c)$$

$$=\left\{H_0(z)\,\middle|\,\det(H_0(z))=O(z^k)\right\}\Big/\left\{V(z)\,\middle|\,\det V(z)=1\right\}$$

同値関係 $H_0(z)\simeq V(z)\,H_0(z)$ (V-変換)

$V(z)\in U(N_c)^{\mathbb{C}}=GL(N_c,\mathbb{C})$

M_k が正しいとする根拠

- 既知の結果 $M_1 = \underset{\text{位置}}{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^{N_c-1}$ を再現 (内部モジュライ)

$k=1$, $N_c=2$ の例

$$H_0(z) = \begin{pmatrix} z-z_0 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix} \overset{V\text{-変換}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{B} \\ 0 & z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$H_0(z_0)\vec{\Phi} = 0, \quad \vec{\Phi} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}P^1 = \frac{SU(2)_{C+F}}{U(1)}$$

- 指数定理の結果 $\dim_{\mathbb{C}} M_k = k N_f$ と一致 ‥

- 超弦理論(Dブレイン構成)による Hanany-Tong の予想と完全に一致 (½ ADHM 関係式)

- 「モジュライ行列法」のステップ3

強結合極限が無い系でもモジュライ空間は正しく抽出できる.

● 「モジュライ行列法」のステップ 4

任意のゲージ群 $G = U(1) \times G'$，任意の表現
ただし G は free に作用するとする

Luty-Taylar

真空のモジュライ $\simeq \{H$ から構成できる正則 $G'^{\mathbb{C}}$ 不変量$\} / U(1)^{\mathbb{C}}$

$\Downarrow$

境界条件 = $H_0(z)$ から構成できる正則 $G'^{\mathbb{C}}$ 不変量への条件

例

$SU(N_c)$: $\det[H_0(z)] = \mathcal{O}(z^k)$,

$SO(N_c)$: $H_0(z)^T H_0(z) = \mathcal{O}(z^{k'})$ $\quad k' = \begin{cases} k & N_c = \text{even} \\ 2k & N_c = \text{odd} \end{cases}$

$\longrightarrow$ 分数ボーテックスの発見

● 「モジュライ行列法」のステップ5を目指して……

大前提「Gはfreeに作用する」を緩和して
部分群に対してクーロン相を許した場合の
モジュライ空間をどうやって抽出するか⁇

クイバーゲージ理論等

→ ?分?できる?……
一般?に Aharonov-Bohm 交換を持つ
ボーテックスが現れる!?

§2. フレーバのゲージ化と Aharonov-Bohm 効果

$U(N_c)$局所ボーテックスに対して フレーバーの全ゲージ化 $(N_c=N_f=2)$

- $G=U(2)_L \times SU(2)_R$

$$U(2)_L \rightarrow H \leftarrow U(2)_R$$

V-変換: $H_0(z) \longrightarrow V_L(z)\, H_0(z)\, V_R(z)$

$k=1$の例

$$H_0(z)=\begin{pmatrix} z-z_0 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-z_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -B & 1 \end{pmatrix}}^{V_R(z)}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} z-z_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

内部モジュライ $B \in \mathbb{C}P^1$ が消える!?

- 指数定理 (Hanany-Tong)

BPS解まわりのゼロモードΦが$\Delta\Phi=0$を満たす.

$$I = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(\Delta) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(\Delta^\dagger)$$

$$= \sum_{\text{全ての場}} U_L(1)\text{の巻き付き数} \times \text{電荷}$$

$$= \frac{k}{N_c} \cdot N_c \times N_f = k N_f$$

フレーバーのゲージ化にはよらない!!

$\mathbb{C}P^{N_c-1}$の内部モジュライはゼロモードとして生き残る!?

- 簡単のため $U(1)_R \in SU(2)_R$ を弱くゲージ化する. $g_L \gg g_R$

$$D_\mu H = \partial_\mu H + g_L i \underset{\mathfrak{u}(2)}{\underset{\cap}{A^L_\mu}} H - g_R H i A^R_\mu \frac{\sigma_3}{2}$$

- 真空: $H = v \mathbb{1}_2$,

ゲージ場 $A^{em}_\mu \equiv \dfrac{g_R A^{L3}_\mu + g_L A^R_\mu}{\sqrt{g_L^2 + g_R^2}}$ のクーロン相

- $U(1)_{em}$ 交換, $e \equiv \dfrac{g_L g_R}{\sqrt{g_L^2 + g_R^2}}$,

$$\delta A^{L3}_\mu = \delta\left(\frac{g_R A^{em}_\mu + g_L C_\mu}{\sqrt{g_L^2 + g_R^2}}\right) = \frac{e}{g_L}\partial_\mu \theta$$

$$\delta A^R_\mu = \delta\left(\frac{g_L A^{em}_\mu - g_R C_\mu}{\sqrt{g_L^2 + g_R^2}}\right) = \frac{e}{g_R}\partial_\mu \theta$$

$$H_0(z) = \begin{pmatrix} 1 & -B \\ 0 & z-z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{ie\frac{\sigma_3}{2}\theta} H_0 e^{-ie\frac{\sigma_3}{2}\theta} = \begin{pmatrix} 1 & -Be^{ie\theta} \\ 0 & z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \delta B = \theta i e B \quad :$$

B と $U(1)^{em}$ ゲージ場との相互作用

arg(B)の Noether カレント = $U(1)em$ の カレント

⇒ ボーテックスは $U(1)_{em}$ 電荷と電流を持ち得る.

(Witten の 超伝導ひも)

B : 2次元有効理論としては.

規格化不可能 なモード

• フレーバ対称性 : $\cancel{SU(2)_R} \Rightarrow U(1)_{em}$

$|B|$ はゴールドストンモードではない

→ では何か? 、 $|B|$ の自由度は本当にあるのか?

→ $\hat{D}=0$ をまじめに解く必要あり.

例えば $e=0\ (g_R=0)$ の解を既知として ….. g_R 展開

$$F_{12}^R = \frac{g_R}{4} \underbrace{\mathrm{Tr}\left[H \frac{\sigma_3}{2} H^\dagger\right]}_{g_R=0 \text{ の解を代入}}$$

$$\Rightarrow \quad \int d^2z\, F_{12}^{em} \sim \int d^2z\, F_{12}^R = \frac{2\pi g_R}{g_L^2} \frac{|B|^2-1}{|B|^2+1} + \mathcal{O}(g_R^3)$$

$|B|^2 \neq 1$ で 非自明な Aharonov-Bohm 効果

- 低エネルギー有効理論

B ⟶ 2次元 カイラル多重項(のスカラー成分)に持ち上げる

- $e=0$ 2次元上の有効理論 ($\mathbb{C}P^1$ 非線形σ模型)

$$\int d^2x \, \frac{2\pi}{g_L^2} \frac{1}{(1+|B|^2)^2} |\partial_\alpha B|^2 \qquad \alpha=0,3.$$

← Fubini-Study 計量

- $e\neq 0$, $\overbrace{\text{4次元}\ U(1)^{em}}^{\mathcal{N}=2}$ ゲージ理論 + $\overbrace{\text{2次元}}^{\mathcal{N}=(2,2)}$理論

$$S_{eff} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{eff}^{(4)} + \delta^2(x)\, \mathcal{L}_{eff}^{(2)} \right]$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{(4)} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^{em})^2 + \frac{1}{2} D^2$$

$$\mathcal{L}^{(2)}_{eff} = K_{B\bar{B}}|\mathcal{D}_\alpha B|^2 - e(BK_B + \bar{B}K_{\bar{B}})D_{(2)}$$

2次元D項

$$\mathcal{D}_\alpha B = (\partial_\alpha + ieA^{em}_\alpha)B, \quad D_{(2)} = D - F^{em}_{12}$$

4次元D項

$$K = \frac{2\pi}{g_L^2}\left[\log(1+|B|^2) - \frac{1}{2}\log|B|^2\right\} + \mathcal{O}(e^2)$$

$$\Rightarrow \quad F^{em}_{12} = \delta^2(x)\left\{\frac{2\pi e}{g_L^2}\frac{|B|^2-1}{|B|^2+1}\right\} + \mathcal{O}(e^2)$$

磁束を再現.

電荷を持つ
内部モジュライ $\overset{\text{SUSY}}{\Longleftrightarrow}$ Aharonov-Bohm効果.

§3. まとめ.

(おそらく一般に)

フレーバーのゲージ化

ボーテックスにおいて

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{内部モジュライが電荷を持つ.} \\ \text{非自明な Aharonov-Bohm 効果が出る.} \end{cases}$