双対カスケードと平行多面体

森山翔文
（大阪公立大学）
共同研究者：古川友寛、松村和信、中西智暉、佐々木照

文献：[2112.13616] + [2205.08039]

円周上の継続的な
ハナニー･ウィッテン遷移

双対カスケードと平行多面体

平行移動により
空間充填できる多面体

物理的な疑問

（初期ブレーン配位によらずに）

- 双対カスケードは必ず停止するか？
- 双対カスケードの停止点は一意的か？

双対カスケードに関する最も基本的かつ重要な問題で
様々な設定で議論されてきた

ここでは、新しい知見「平行多面体」を加えたい

目次

0. 導入
1. 双対カスケード
2. 平行多面体
3. 答え

昔ばなしから

- 多元数理+KMI時代から約10年間

  ABJM行列模型

- 弦理論を統一するM理論、Mブレーンを理解したい

昔ばなしから

- 特に、M2ブレーンの自由度は3/2乗則に従い、M5ブレーンの自由度は3乗則に従うことが、長年の謎
  [Klebanov-Tseytlin 1998]
- M2ブレーンを記述するために、
  Chern-Simons理論の超対称化 = ABJM理論
  [Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena 2008]
- 分配関数や超対称ループ演算子の相関関数は、局所化公式を経て、行列模型に
  [Kapustin-Willet-Yaakov 2009]

これまでの主要結果

- 分配関数の摂動項の足し上げ＝Airy関数

[Fuji-Hirano-M 2011]

- 世界面インスタントンと膜インスタントン、
それらの間で発散相殺

[Hatsuda-M-Okuyama 2012]

- 非摂動項を含む完全な展開と位相的弦理論

[Hatsuda-Marino-M-Okuyama 2013]

これまでの主要結果

- ループ演算子の真空期待値と可積分階層

(Giambelli関係式、Jacobi-Trudi関係式、二次元戸田格子可積分階層)

[Matsumoto-M 2013, Matsuno-M 2016, Furukawa-M 2017-19, Kubo-M 2018]

- ABJM行列模型を、量子曲線型のスペクトル演算子のフレドホルム行列式に書き換え

- フレドホルム行列式は3/2乗則やAiry関数を保証

- スペクトル演算子と量子曲線

[Kubo-M-Nosaka 2018, Kubo-M 2019, M 2020, M-Yamada 2021]

具体的に、ABJM行列模型

- 局所化公式を通じてABJM理論から行列模型

$$Z_k(N) = \iint \frac{d^N\mu}{(2\pi)^N} \frac{d^N\nu}{(2\pi)^N} e^{\frac{ik}{4\pi}(\sum_m \mu_m^2 - \sum_n \nu_n^2)}$$

$$\times \frac{\prod_{m<m'} \left(2\sinh\frac{\mu_m - \mu_{m'}}{2}\right)^2 \prod_{n<n'} \left(2\sinh\frac{\nu_n - \nu_{n'}}{2}\right)^2}{\prod_{m,n} \left(2\cosh\frac{\mu_m - \nu_n}{2}\right)^2}$$

- 大正準集団へ移行

$$\Xi_k(\kappa) = \sum_{N=0}^{\infty} \kappa^N Z_k(N)$$

フガシティ

移行すると

- スペクトル演算子のフレドホルム行列式

$$\Xi_k(\kappa) = \mathrm{Det}(1 + \kappa/H)$$

- スペクトル演算子

$$H = \left(2\cosh {}^{q}/_{2}\right)\left(2\cosh {}^{p}/_{2}\right)$$
$$= \left(Q^{1/2} + Q^{-1/2}\right)\left(P^{1/2} + P^{-1/2}\right)$$

- 変数変換を通じて、P^1 x P^{1}代数曲線

$$H = \#Q + \#Q^{-1} + \#P + \#P^{-1}$$

- しかも、量子化されている（→量子曲線）

3/2乗則やAiry関数則

$$\frac{d}{d\log\kappa}\log\Xi_k(\kappa) = \mathrm{Tr}\frac{\kappa}{H+\kappa} = \frac{\mathrm{Area}(H<\kappa)}{2\pi\hbar}$$
$$= C(\log\kappa)^2$$

位相空間の面積

積分を通じて

$$\log\Xi_k(\kappa) = {C(\log\kappa)^3}/{3}$$

$J_k(\mu) = \log\Xi_k(\kappa)$:大正準ポテンシャル

$\mu = \log\kappa$:化学ポテンシャル

逆変換

分配関数

$$Z_k(N) = \int \frac{d\mu}{2\pi i} e^{J_k(\mu) - \mu N}$$

はAiry関数

$$\mathrm{Ai}(N) = \int \frac{d\mu}{2\pi i} e^{\mu^3/3 - \mu N}$$

を与える

3/2乗則の構造は普遍的

- 3/2乗則は行列模型の微細構造に依らない
- 量子曲線のスペクトル演算子のフレドホルム行列式でさえあれば、必ずAiry関数則、必ず3/2乗則を導く
- M2ブレーンは行列模型ではなく、量子曲線により記述される

量子曲線が活躍する別の舞台

Painleve方程式

- 坂井分類では、Painleve方程式は代数曲線により分類される
- q-Painleve方程式は量子曲線と深く関係

- 自励系は保存曲線を持ち、例外リー代数のワイル群の対称性を持つ

- 非自励系は保存曲線を持たないが、例外リー代数のアフィンワイル群の対称性を持つ

- アフィンワイル群の元である平行移動は、

  q-Painleve方程式(の時間発展)を生成する

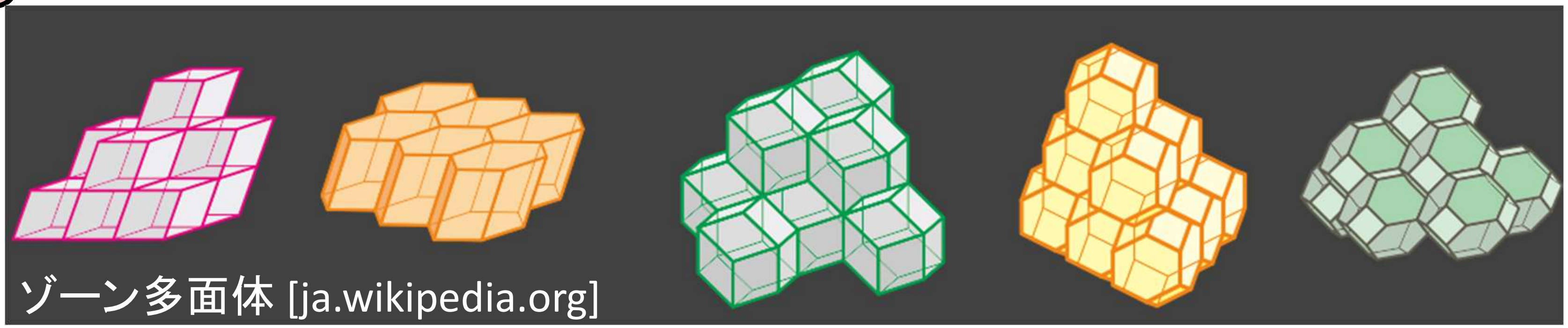
今日は

- ABJM理論のブレーン配位を拡張し、
  双対カスケードを議論

- 双対カスケードはパラメータ空間の平行移動
- 双対カスケードの終点集合を基本領域と定義

基本領域＝平行多面体

「双対カスケードが常に一意的に終了する」
⇔「基本領域が平行多面体」



特に

- q-Painleve方程式に対応する場合、
  基本領域はアフィンワイル部屋
- 主張
  双対カスケードはq-Painleve方程式で記述
  q-Painleve方程式に対応しない場合にも拡張

目次

1. 双対カスケード
    - HWブレーン遷移
    - 双対カスケード
2. 平行多面体
3. 答え

物理的な疑問

幾何学的に翻訳

答え

双対カスケード

双対カスケード

- 円周上における継続的なHWブレーン遷移

[Klebanov-Strassler 2000]

Hanany-Witten(HW)ブレーン遷移（変換）

- 超対称ゲージ場の理論における双対変換
Seiberg双対（とその拡張）の、ブレーン配位上での実現

[Hanany-Witten 1996]

双対性

理論A ＝ 理論B

- 異なるゲージ群や物質場の表現でも「同じ」
- 両理論の物理量が一対一対応

  演算子、分配関数、相関関数、指数、…
- 超対称理論で頻繁に発見される
- 弦理論による解釈が可能な場合も
- 次元が異なる例も

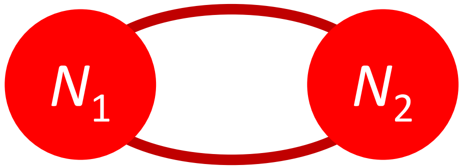
例

- 3次元$\mathcal{N}$=4超対称Chern-Simons理論

  ゲージ群U(N_1)$_{-k}$ x U(N_2)$_k$ ＋2対の双基本表現

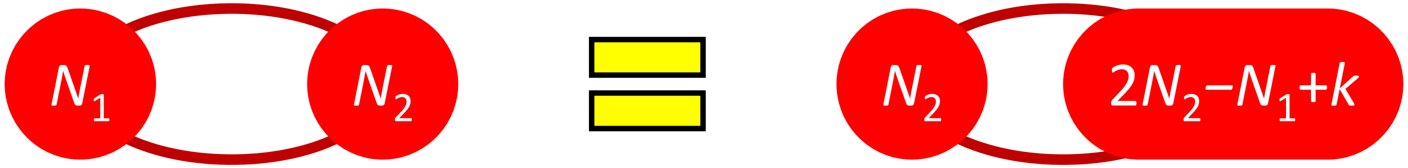
  添え字k = レベル（結合定数の逆数、整数に量子化）

- クイバー図表示



箙 [ja.wikipedia.org]

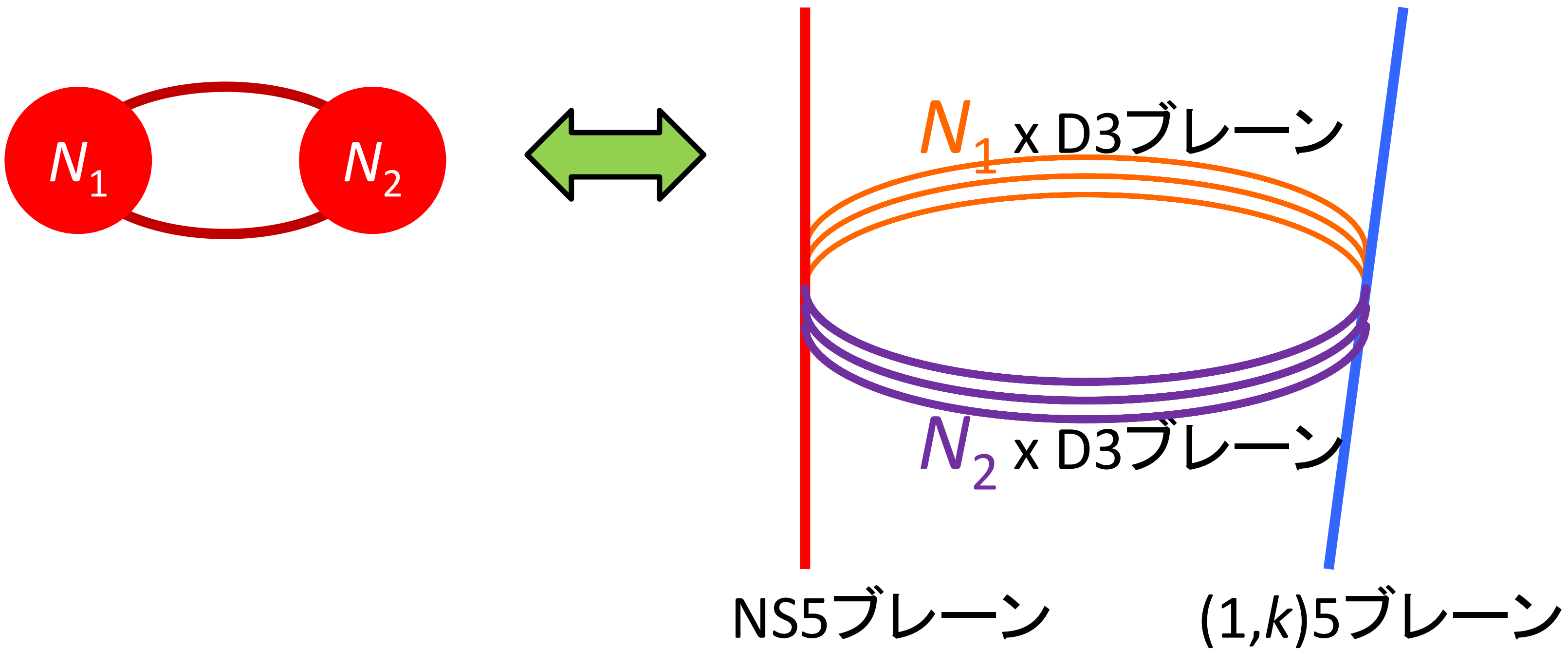
双対性によれば



が成り立つ

（Chern-Simons理論に詳しい方なら、レベルランク双対の拡張）

弦理論による解釈

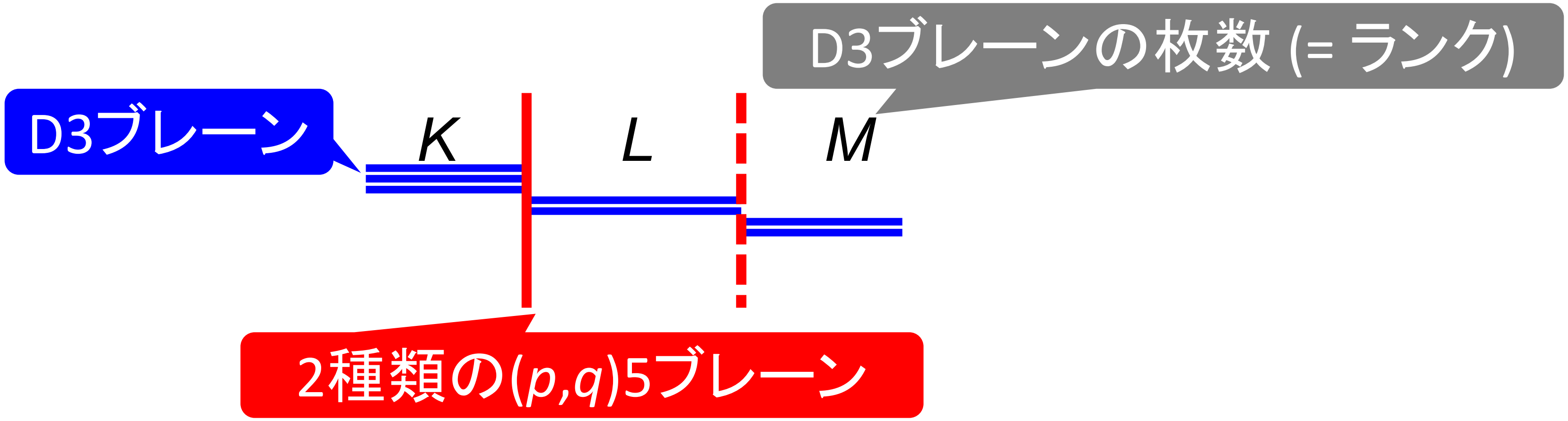


- ブレーン配位のD3ブレーン上の有効理論が前出の超対称Chern-Simons理論

より一般的に、ブレーン配位

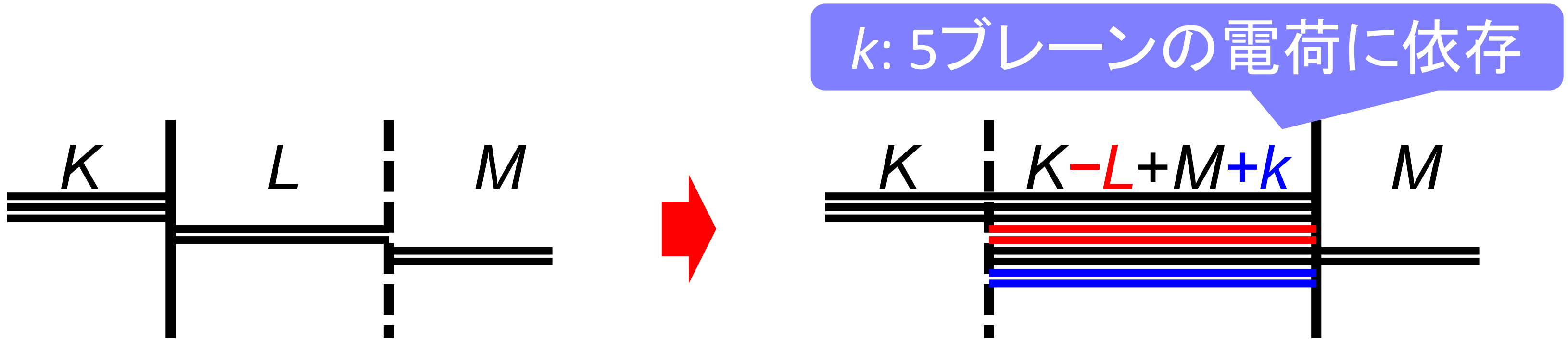
2種類の(p,q)5ブレーン + 複数のD3ブレーン

（SUSYのため、D3に垂直で、かつ、相対的に傾ける）



（IIB弦理論）

Hanany-Witten遷移



- 対応する超対称ゲージ場の理論の解析から
- ここでは形式的に

$$\ldots K \bullet L \circ M \ldots \quad = \quad \ldots K \circ K-L+M+k \bullet M \ldots$$

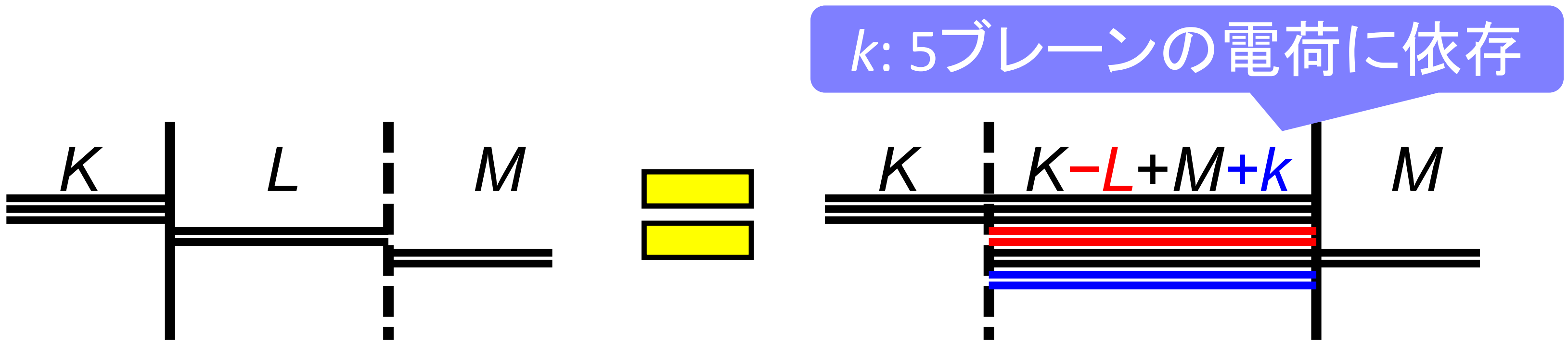
- 電荷保存による解釈

$$Q = k\,(5|_L - 5|_R) + 3|_L - 3|_R$$

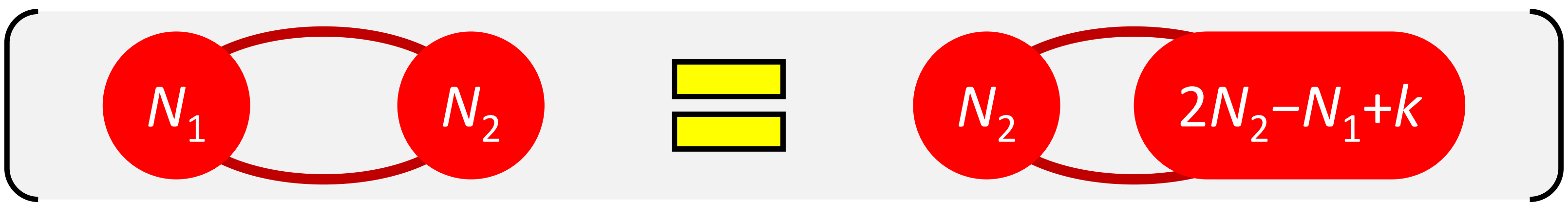
全部　隣り

[Hanany-Witten 1996]

Hanany-Witten(HW)ブレーン交換



先ほどの双対性は
このブレーン交換に翻訳され、
かなり一般に成り立つ



双対カスケード

理論A = 理論B = ・・・ = 理論Z

繰り返すと次々にランクが変化（減少）し、
最低ランクで停止するだろう
= 双対カスケード

つまり、双対カスケード

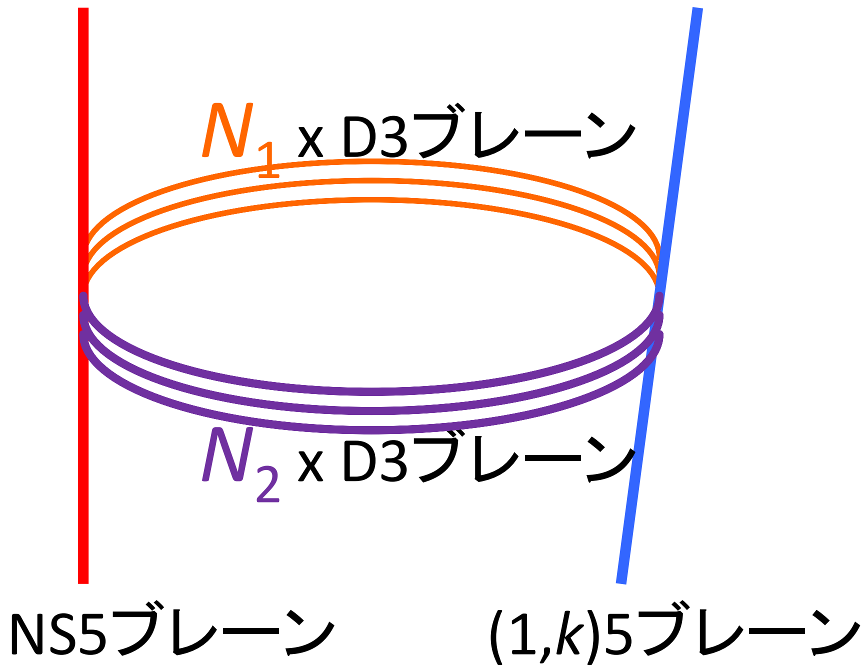
円周上のブレーン配位を準備して

- 双対カスケード = 円周上の継続的なHW遷移により、低いランクへ

4次元：強結合から弱結合へ双対変換するも、
RGフローを通じてまた強結合に
[Klebanov-Strassler 2000]
3次元：場の理論の記述の非ユニタリ性とも関係
[Aharony-Bergman-Jafferis 2008]

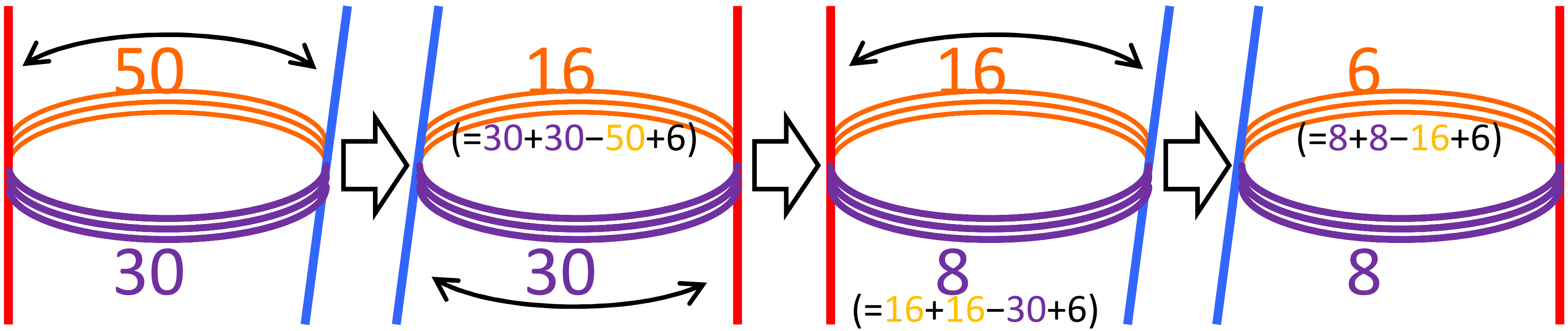
例：ABJMブレーン配位

[Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena 2008]



例

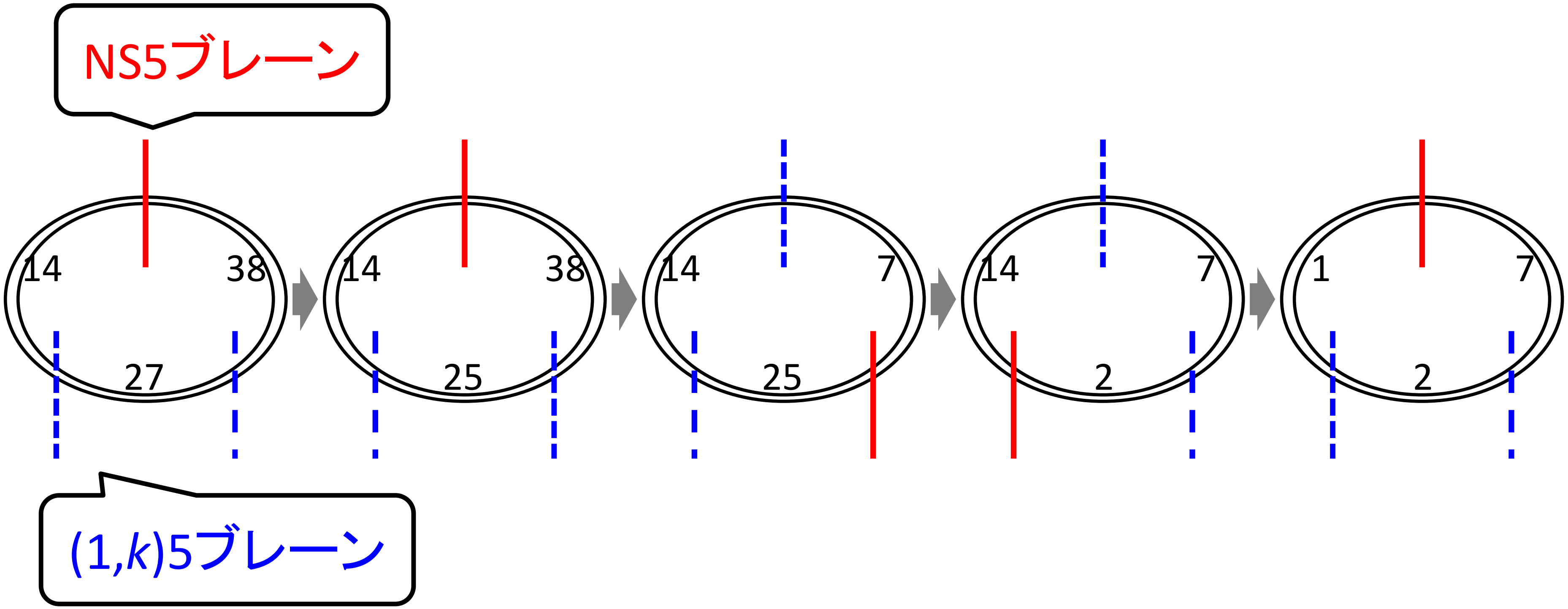
$k = 6$



さらに続けると増え出すので、ここで止まる、だろう

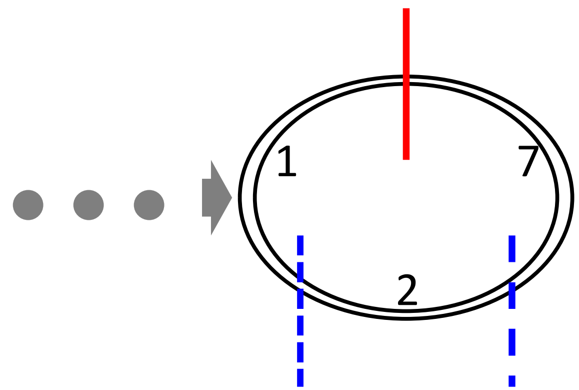
調子に乗って、5ブレーンを増やす

$k = 6$



疑問

- HW遷移を続けてもっと低いランクにできるか
- 複数あるのに、もっと低いランクとは？
- これ以上HW遷移しない停止点に到達するか
- 全く別の過程を通じても、同じ停止点か



そもそもの問題点

（複数ランクを持つ）複数5ブレーンでは

双対カスケードの操作が曖昧

- 双対カスケードの方向が無限
- ランクの変化が単調とは限らない

ヒント

- HW遷移の電荷保存解釈

→ 円周上で左右は無意味

- ABJM行列模型で、最低ランクは重要

大正準集団で、フガシティの指数を特定のランクに合わせる

閉弦形式で、フラクショナルブレーンは揺らぎと見なす

[Marino-Putrov 2011, Kiyoshige-M 2016, M-Nakayama-Nosaka 2017]

（最低ランクで）円周を切る！

（最低ランクの区間を、

HW遷移を実行しない"基準"に設定する）

[Kubo-M 2017]

"基準"

あたかも

- 多様体の局所座標系
- 力学の基準系

→「最低ランクを基準に固定する」

"基準区間" = "HW遷移しない区間"

$\langle \ldots \ldots \ldots \rangle$

有限過程を切り出せば、無限の方向が見えてくる

双対カスケードの作業仮説

1. 最低ランクを基準とする
2. 基準を跨がないHW遷移を自由に適用
3. 低いランクが現れれば、基準を取り換える
4. 負ランクが現れれば、全体的にかさ上げ

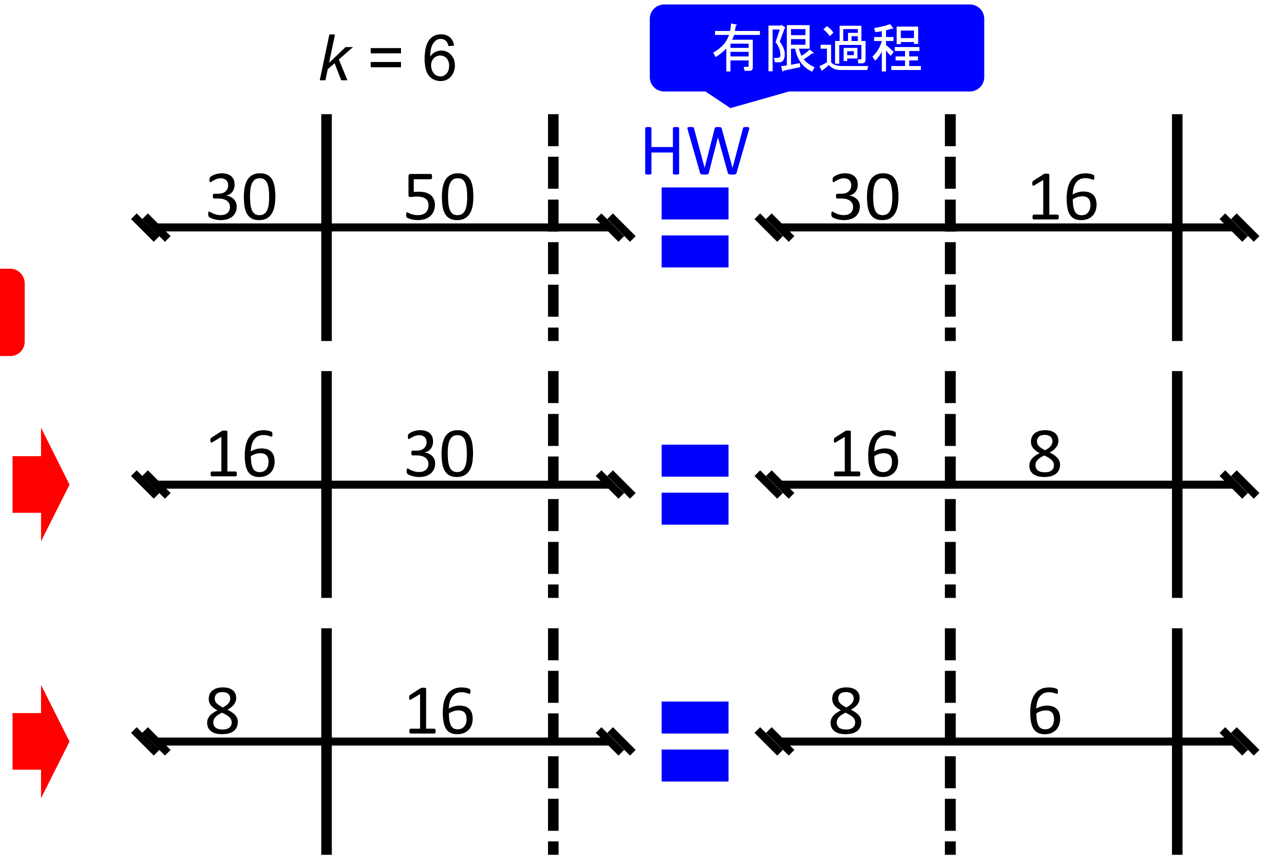
SUSY配位だから、
正確には、大正準集団で
「全体的なランクを供給するソース」があるから

5. 最後の3ステップを繰り返す

例

無限過程

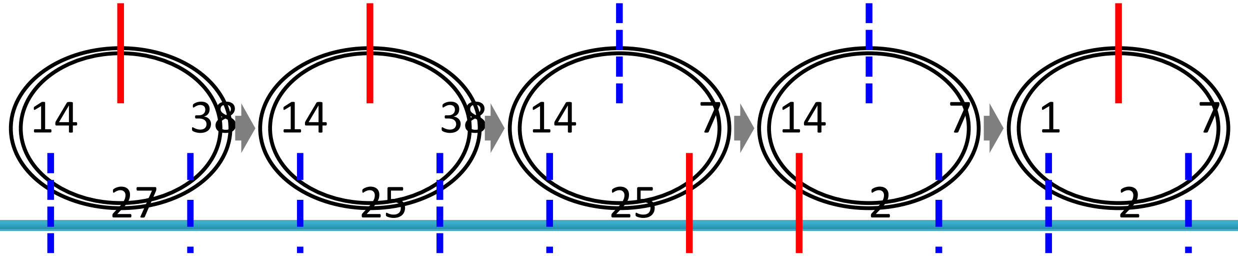
基準の取り換え



⟨30●50○⟩=⟨30○16●⟩
→⟨16●30○⟩=⟨16○8●⟩
→⟨8●16○⟩=⟨8○6●⟩
(→⟨6●8○⟩=⟨6○10●⟩)

● = NS5ブレーン
○ = (1,*k*)5ブレーン

前述の例:



(k = 6)

新しい基準

- 〈14●38○27◯〉=〈14◯7●25○〉

基準の取り換え

→〈7●25○14◯〉=〈7○2◯1●〉

新しい基準

→〈1●7○2◯〉

HW遷移により、低いランクが出現しない(停止)

- 〈14●38○27◯〉=〈14○9◯2●〉

→〈2●14○9◯〉=〈2◯1●7○〉

→〈1●7○2◯〉

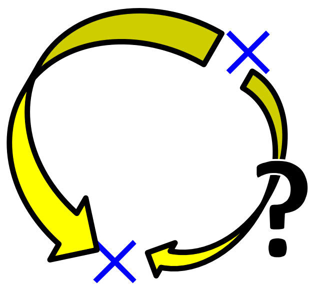
二つの過程の停止点は一致!

（双対カスケードの操作の曖昧さを取り除き）疑問

（初期ブレーン配位によらずに）

- 双対カスケードは必ず停止するか？
- 双対カスケードの停止点は一意的か？

特に複数の5ブレーンを持つ配位は非自明



目次

1. 双対カスケード
   - HWブレーン遷移
   - 双対カスケード
2. 平行多面体
3. 答え

物理的な疑問

幾何学的に翻訳

答え

基本領域(FD)

（初期ブレーン配位によらずに）

- 双対カスケードは必ず停止するか？
- 双対カスケードの停止点は一意的か？

YESと仮定して、すべての停止点を集める

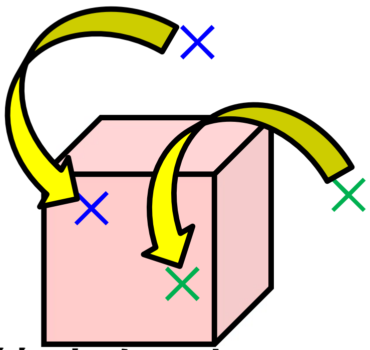
（これ以上HW遷移しないブレーン配位）

↓

双対カスケードにおける

超対称ブレーン配位の

基本領域 = FD



(基本領域 = FD)

平行移動

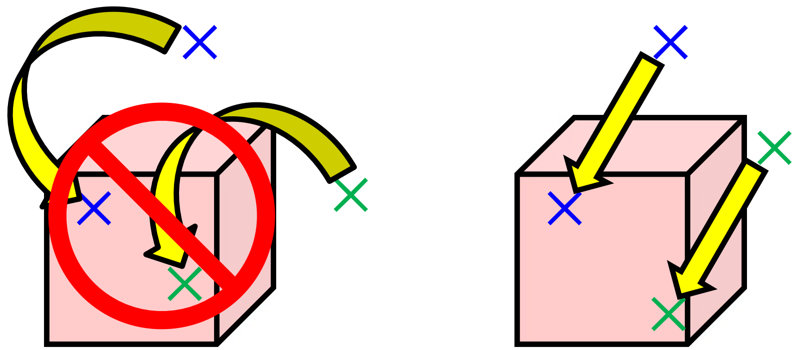
- 双対カスケード = 基準の取り換え

  = 相対ランクのパラメータ空間の平行移動

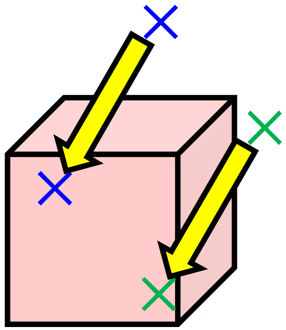
電荷保存

$$Q = k\,(5|_L - 5|_R) + 3|_L - 3|_R$$

全部　　隣り



疑問



(基本領域 = FD)

（初期ブレーン配位によらずに）

- 双対カスケードは必ず停止するか？
- 双対カスケードの停止点は一意的か？

- 相対ランクのパラメータ空間の初期ブレーン配位を表す任意の点から、平行移動を経て必ずはFDに落ちるか？

[逆に言えば]

FDは平行移動によって全空間を覆うか？

- 平行移動の終点は始点によらずに一意的か？

[逆に言えば]

FDのすべてのコピーは互いに素か？

書き換え

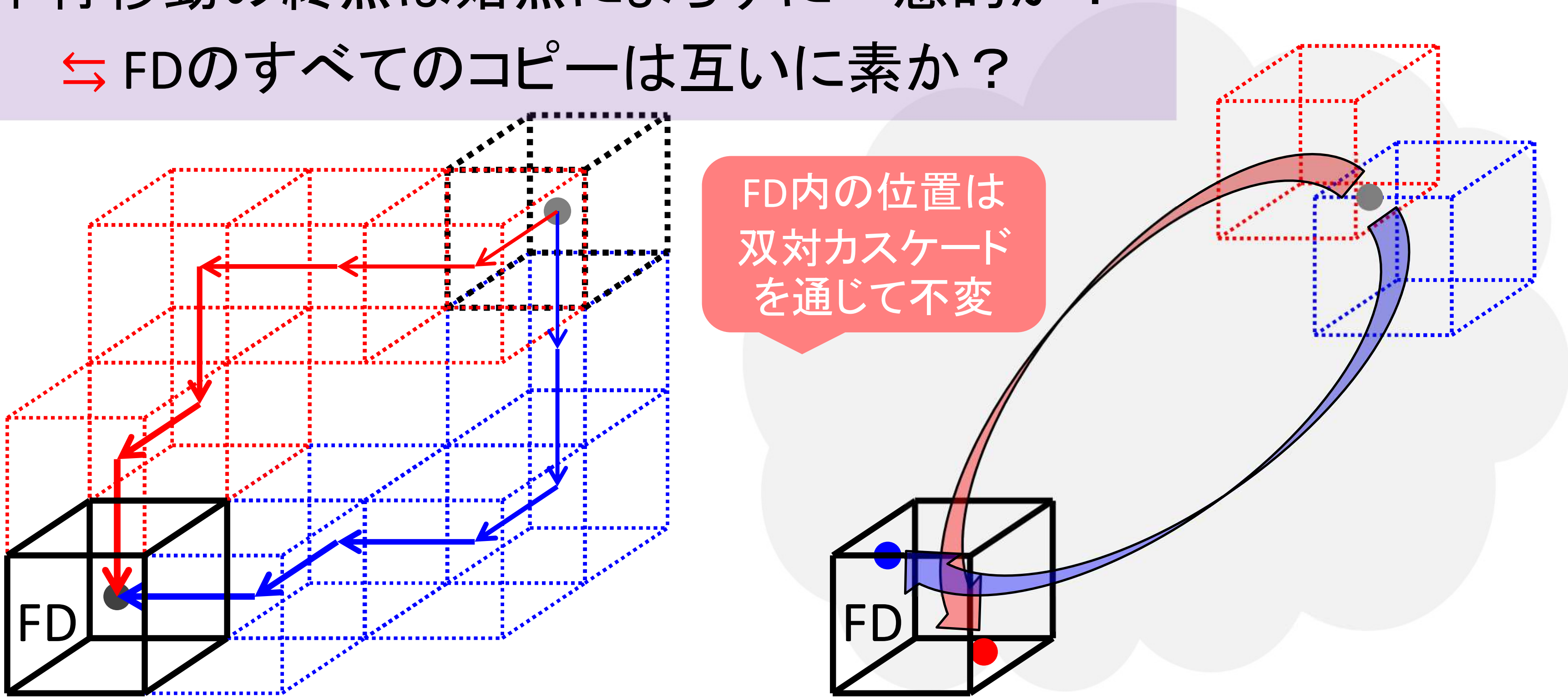
[Furukawa-Matsumura-M-Nakanishi 2021, Furukawa-M-Sasaki 2022]

- 初期ブレーン配位を表す相対ランクのパラメータ空間の任意の点から、平行移動を経て必ずはFDに落ちるか？

  ⇆ FDは平行移動によって全空間を覆うか？

- 平行移動の終点は始点によらずに一意的か？

  ⇆ FDのすべてのコピーは互いに素か？



つまり

（初期ブレーン配位によらずに）

- 双対カスケードは必ず停止するか？
- 双対カスケードの停止点は一意的か？

双対カスケードの基本領域 = 平行多面体？

平行移動により
空間充填できる
多面体

目次

1. 双対カスケード
   - HWブレーン遷移
   - 双対カスケード
2. 平行多面体
3. 答え

物理的な疑問

幾何学的に翻訳

答え

YES!

双対カスケードの基本領域 = 平行多面体

答え（ワイル群対称性を持つ量子曲線の場合）

[Furukawa-Matsumura-M-Nakanishi 2021]

例: 2 x NS5ブレーン + 2 x (1,*k*)ブレーン

- ブレーン配位をパラメータ化

$$\langle N_1 \bullet N_2 \bullet N_3 \circ N_4 \circ \rangle$$

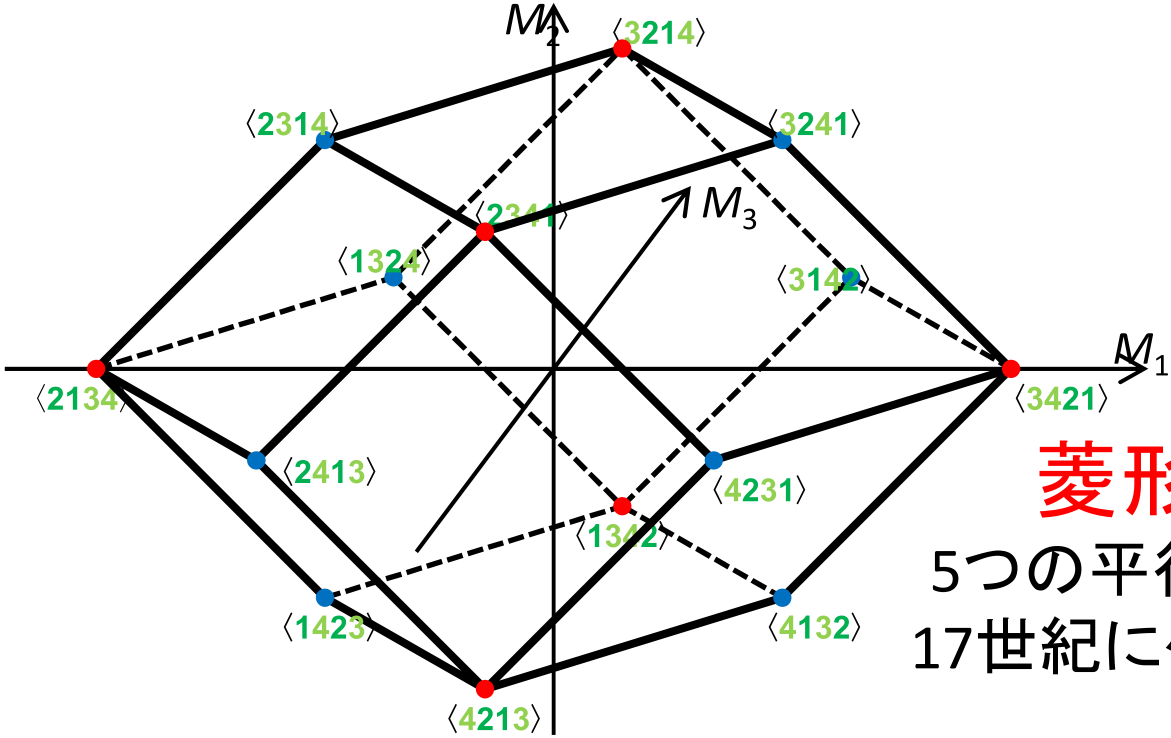
$$= \langle N \bullet N+M_1-M_2+M_3+k \bullet N+2M_1+2k \circ N+M_1-M_2-M_3+k \circ \rangle$$

- 基本領域 = 停止点

（これ以上双対カスケードをしない、様々なHW遷移で低いランクが出ない）

$$\pm M_2 \leqq k/2,\ \pm M_3 \leqq k/2,\ \pm M_1 \pm M_2 \pm M_3 \leqq k$$

平行多面体



菱形12面体

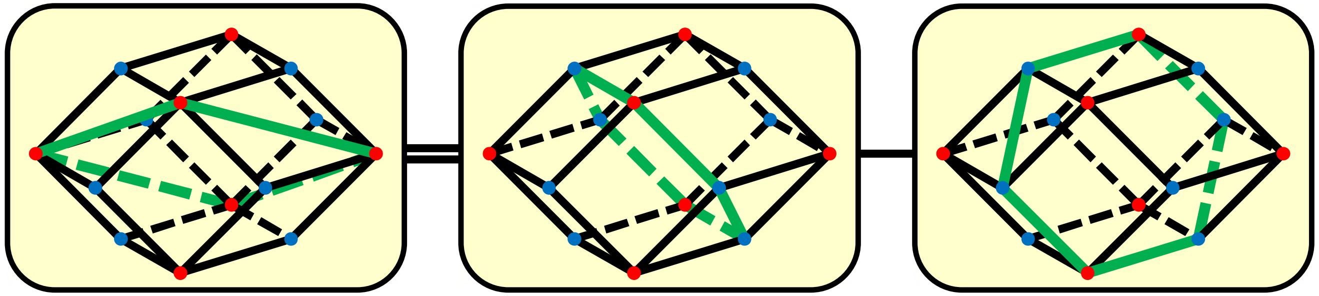
5つの平行多面体の1つ
17世紀にケプラーが詳述

さらに、

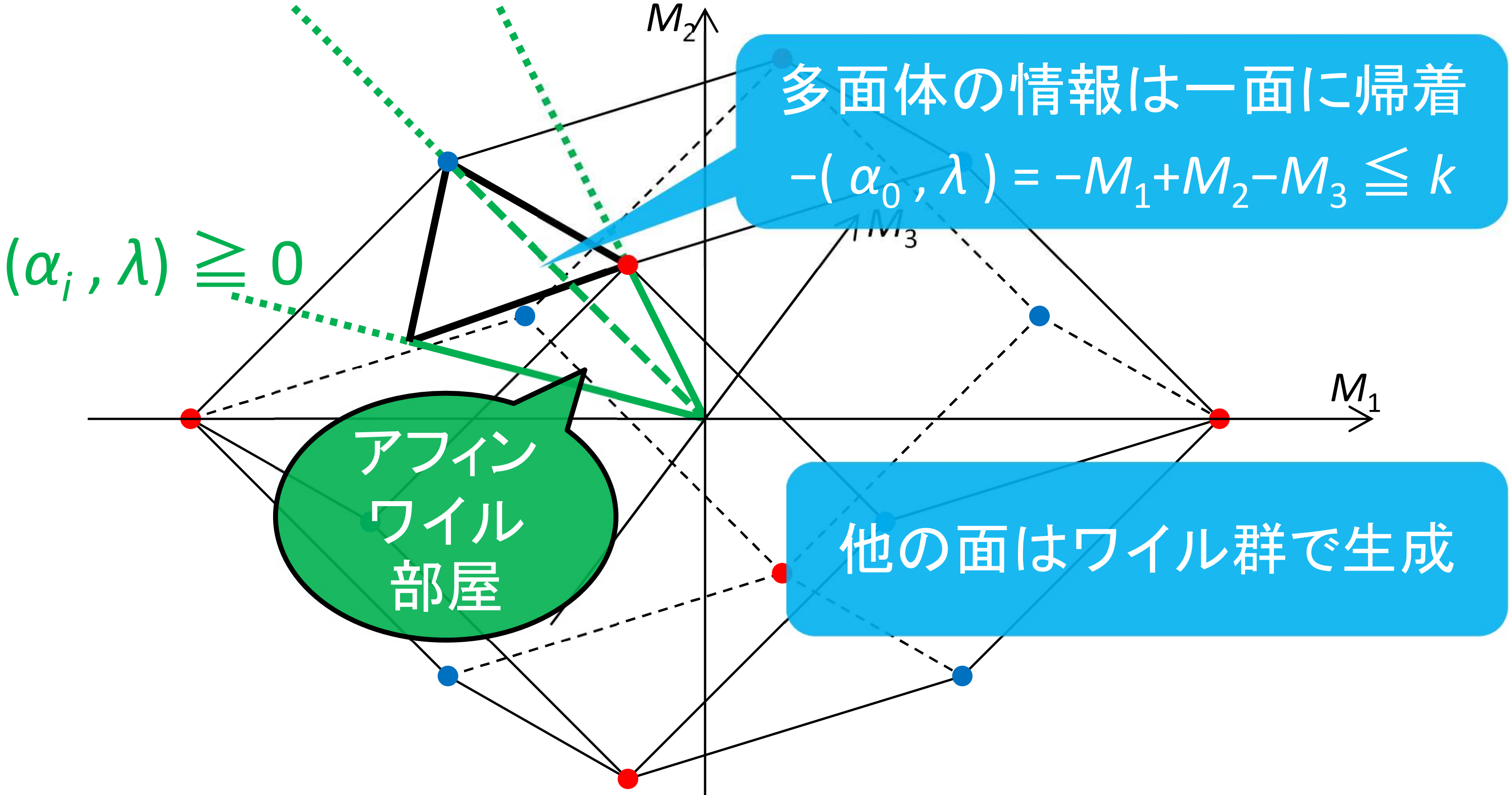
対称性の視点から

[Kubo-M-Nosaka 2018]

- B3ワイル群（ワイル鏡映から生成される）



ワイル部屋に制限



ワイル部屋内の基本領域 = アフィンワイル部屋

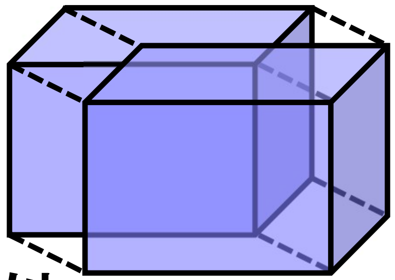
平行移動はアフィンワイル群の元

答え（一般的な場合）

[Furukawa-M-Sasaki 2022]

- ワイル群対称性を持たない一般的な場合

「ゾーン多面体（=高次元直方体の低次元射影）」をなす

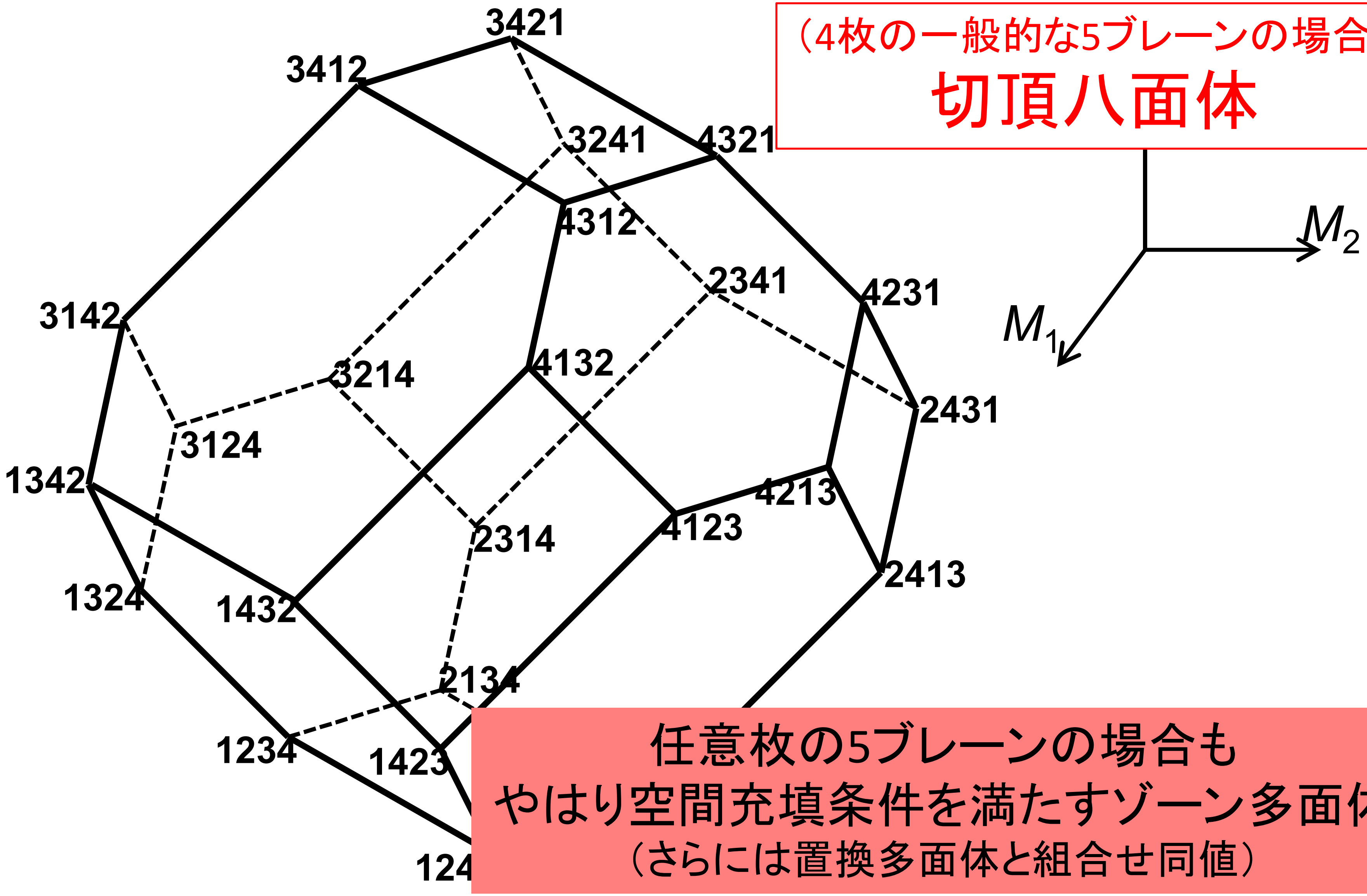


ゾーン多面体の空間充填条件

「面心のランク＝空間次元」を満たす

[Shephard 1974, McMullen 1975]

空間充填条件を満たすゾーン多面体



（4枚の一般的な5ブレーンの場合）
切頂八面体

任意枚の5ブレーンの場合も
やはり空間充填条件を満たすゾーン多面体
（さらには置換多面体と組合せ同値）

ゾーン多面体とゲージ理論

- ゾーン多面体と a-max

[加藤晃史 2006]

- ゾーン多面体と双対カスケード

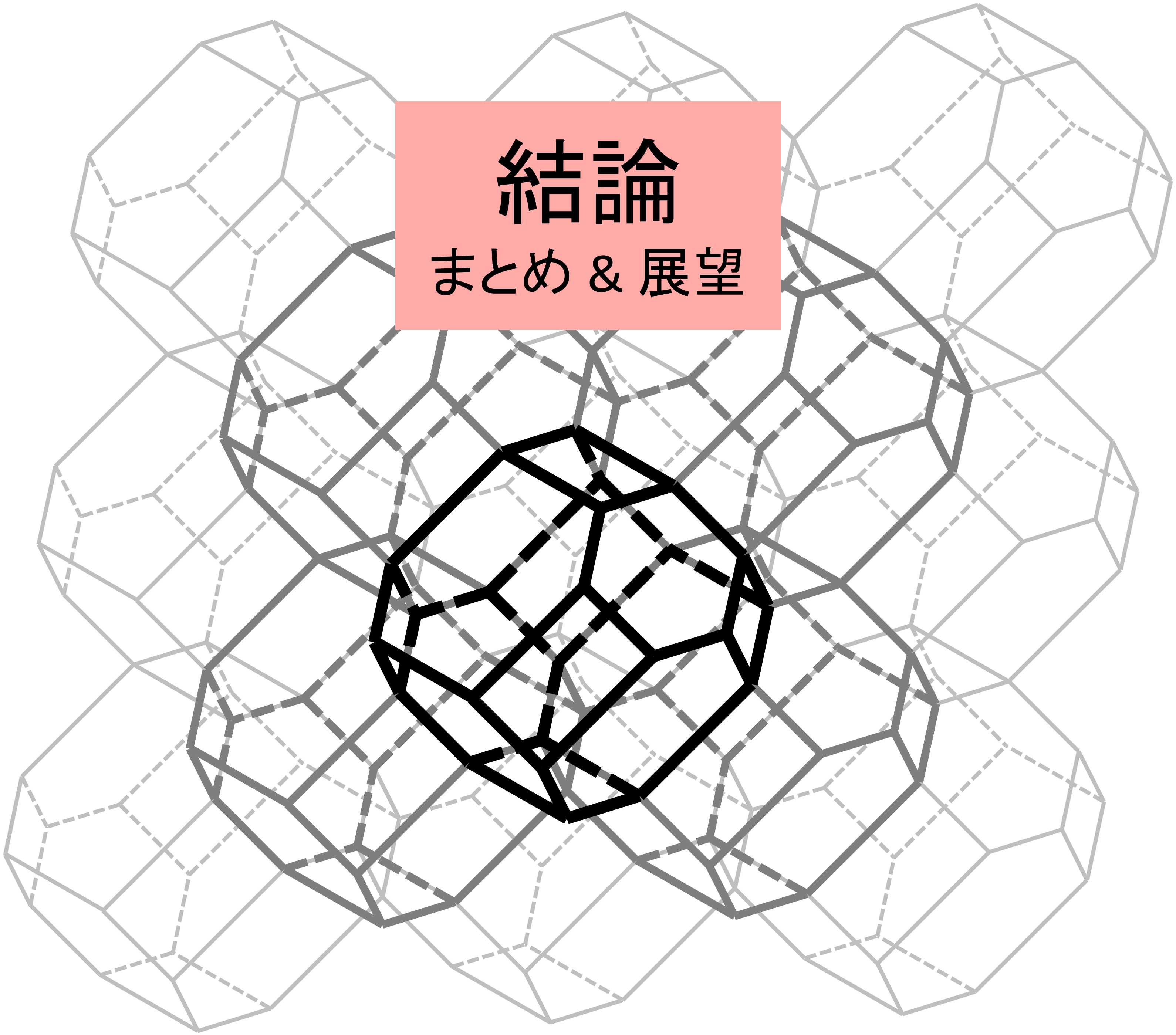
[Eager-Franco 2011]

- ちなみに、[石井源久–山口哲 2005]

（多面体と弦理論の深い関係が見えてくるかも）

結論

まとめ & 展望



まとめ

双対カスケード = 平行多面体の平行移動

（ワイル群の対称性を持つ場合）

- 基本領域(FD) = アフィンワイル部屋

（一般的な場合）

- FD = 空間充填条件を満たすゾーン多面体

（任意枚の場合の議論は数学的→インフォーマルセミナー）

さらに

- 例外ワイル群の対称性を持つ場合に、

FIパラメータを導入しても、アフィンワイル部屋

[Furukawa-Matsumura-M-Nakanishi 2021]

不等式はHW遷移ではなくワイル群により生成

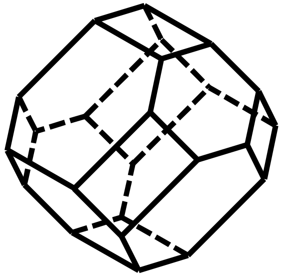
HW遷移を超えた対称性

[Furukawa-M-Nakanishi 2020, Furukawa-Matsumura-M-Nakanishi 2021]

展望：再びPainleve方程式

[Bonelli-Grassi-Tanzini 2017, M-Yamada 2021,
Bonelli-Globlek-Kubo-Nosaka-Tanzini 2022]

双対カスケード：*q*-Painleve方程式の時間発展により記述されるはず、
既知の*q*-Painleve方程式と対応していない場合も、
その拡張として理解できる、だろう



ご清聴ありがとうございました。