ソリトン理論の非可換化

浜中真志＠名大多元数理

近畿大学 数学教室 講演会 (2015/09/24)

講演内容：歴史に沿って可換な場合のKdV方程式，KP方程式のソリトン解とその数理についてレヴューし，非可換化を議論する

1. イントロダクション(歴史)
2. KdV方程式とソリトン解
3. KdV階層と無限個の保存量
4. KP階層と行列式解(タウ関数)
5. ソリトンの佐藤理論
6. ソリトン理論の非可換化

1．イントロダクション(歴史（超ごく一部）)

- 1834年：Scott Russell

  運河での孤立波の観察，水槽実験
- 1895年：Korteweg de Vries

  浅水波の方程式からソリトン方程式を導出
- 1955年：Fermi, Pasta, Ulam

  非線形格子の数値計算（孤立波の再帰現象）
- 1965年：Zabusky, Kruskal

  KdV方程式の数値計算（「ソリトン」の命名）

  solitary wave(孤立波) + ton(粒子) = ``soliton''
- 1968年：Peter Lax, Lax対の導入

- 1967年：Gardner, Green, Kruskal, Miura
  逆散乱法によりKdV方程式の初期値問題を解く
  (この手法でブラックホール解も構成：冨松・佐藤解)
- 1971年：Hirota（広田良吾）
  広田の方法によるKdV方程式の直接的解法
- 1980頃：Sato（佐藤幹夫、ほか）
  KdV, KP方程式の解空間の解明（佐藤理論）

以後もさまざまな発展が続く：

[上野・高崎]・[高崎]

- 高次元化（戸田場・反自己双対ヤン・ミルズ方程式など）
- 非可換化（行列型、非可換空間への拡張[MH]など）
- 離散化・超離散化・無分散化[高崎・武部]
- 素粒子論(2次元量子重力など)との関わり，.........

ソリトン研究発祥の地（ユニオン運河）

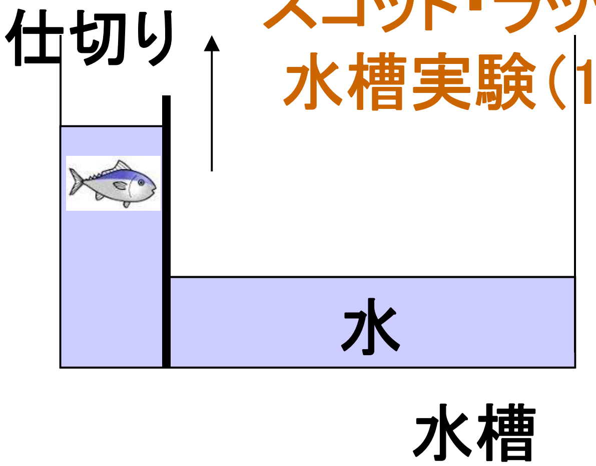
Union運河＠スコットランド、
エジンバラ
（講演者撮影、2005年11月）

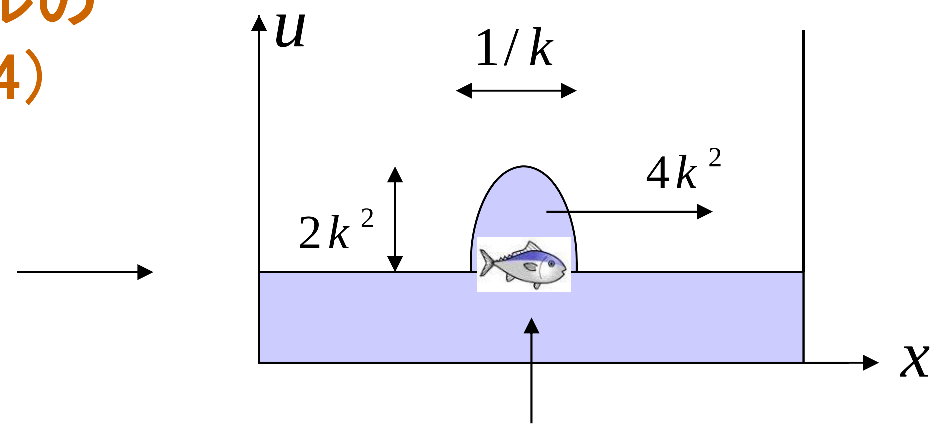
The Soliton (Photo from Nature v. 376, 3 Aug 1995, p.373)

2. KdV方程式とソリトン解

- **KdV方程式: 浅水波を記述**

スコット・ラッセルの
水槽実験(1834)





solitary wave = soliton

以下の方程式を満たす

$$u = 2k^2 \cosh^{-2}(kx - 4k^3 t)$$

$$u_t + u_{xxx} + 6u_x u = 0$$: KdV eq.

:ソリトン方程式
の代表例(非線形
→解くのは難しい)

[Korteweg-de Vries(1895)]
Navier-Stokesの方程式から浅水波の方程式として導出

つべこべ言わずに解こう!

- 広田の方法 [PRL27(1971)1192]

$$u_t + u_{xxx} + 6u_x u = 0$$

$$\downarrow \quad u = 2\partial_x^2 \log \tau$$ 広田変換

$$\tau\tau_{tx} - \tau_x\tau_t + 3\tau_{xx}\tau_{xx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + \tau\tau_{xxxx} = 0$$

広田の双線形方程式：さらに複雑？？

シンプルな解: $\tau = 1 + e^{2(kx-\omega t)}, \quad \omega = 4k^3$

$$\to \quad u = 2k^2 \cosh^{-2}(kx - 4k^3 t)$$ ：さっきのソリトン！（1-soliton 解）

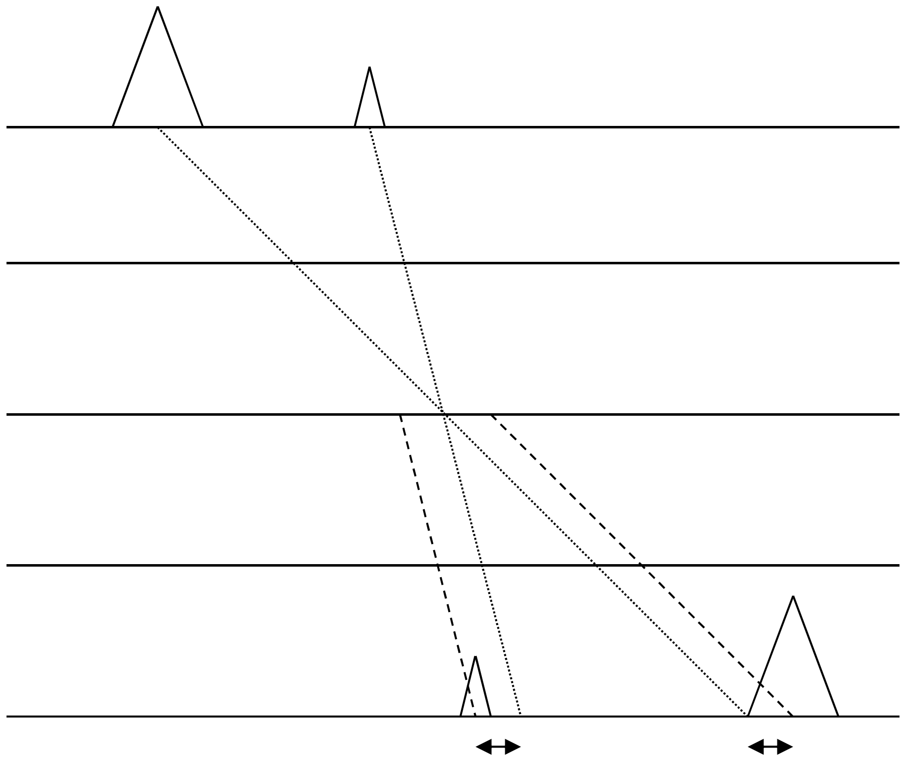
2-soliton 解

$$\tau = 1 + A_1 e^{2\theta_1} + A_2 e^{2\theta_2} + BA_1 A_2 e^{2(\theta_1+\theta_2)}$$

= **Wronski 行列の行列式でまとめられる（後述）**

$$\theta_i = k_i x - 4k_i^3 t, \quad B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

散乱過程



衝突しても形と速度が保たれている！（安定）

位置が少しずれている！（位相のずれ）

ちょっと休憩：広田良吾さんについて

- 1932年～2015年1月(享年82歳)
- 早稲田大で長らく教鞭をとられる(RCA基礎研勤務時代もあり)
- 広田の双線形化法(今日の議論)
- ソリトン方程式の離散化(動機：計算機に乗せたい)
- 「現代の和算家」と評されることも(独創的)

3. Lax形式とKdV階層，無限個の保存量

KdV方程式のLax形式

KdV方程式　←→　線形系の両立条件

$$u_t + u_{xxx} + 6u_x u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P = -\partial_x^2 + u \\ B_3 = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x \end{cases} \quad P_t = u_t = [B_3, P] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P\psi = \lambda\psi, \\ \psi_t = B_3\psi, \\ \lambda_t = 0 \end{cases}$$

発展方程式の対称性

$$\exists B_i, t_i (i = 3,5,7,9,\ldots), \partial_t [B_i, P] = \partial_{t_i} [B_3, P]$$

$$\partial_{t_i} u = [B_i, P] \quad (i = 3,5,7,9,\ldots)$$ KdV階層（無限個の可換なフロー）

無限個の保存量が存在　→　無限次元の対称性，可積分性

$$\sigma_1 = u, \sigma_2 = u^2, \sigma_3 = u^3 - \frac{1}{2}u_x^2, \ldots$$

4. KP階層とWronskian解(タウ関数)

- KP方程式＝(2+1)次元の浅水波を記述(KdVの高次元版)

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}u_x u + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy}$$

- 解はWronski行列の行列式(タウ関数)で書ける

- KP階層を定義し，その解を議論.
- 擬微分作用素の導入

  問： $P = \partial_x^2 + u$ の平方根は？

負べきの微分を導入

$$\partial_x^n \circ f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (\partial_x^j f) \partial_x^{n-j}$$

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(j-1))}{j(j-1)(j-2)\cdots 1}$$

：二項係数

（nが負でもOK！）

→ 負べきの微分作用素

（well−defined !）

$$\partial_x^3 \circ f = f\partial_x^3 + 3f'\partial_x^2 + 3f''\partial_x^1 + f'''$$

$$\partial_x^2 \circ f = f\partial_x^2 + 2f'\partial_x + f''$$

$$\partial_x^{-1} \circ f = f\partial_x^{-1} - f'\partial_x^{-2} + f''\partial_x^{-3} - \cdots$$

$$\partial_x^{-2} \circ f = f\partial_x^{-2} - 2f'\partial_x^{-3} + 3f''\partial_x^{-4} - \cdots$$

答：$\sqrt{P} = \sqrt{\partial_x^2 + u} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} - \frac{1}{4}u_x\partial_x^{-2} + \cdots$

KP階層(KP方程式と可換な無限個のフロー)

- Lax作用素を導入 (1階の擬微分作用素)

$$L := \partial_x + u_2\partial_x^{-1} + u_3\partial_x^{-2} + u_4\partial_x^{-3} + \cdots$$

$$u_k = u_k(x^1, x^2, x^3, \cdots)$$

無限次元空間に住む
無限種類の場
(無限種類の「時間」変数)

- Lから以下の微分作用素を定義:

$$B_m := (L^m)_{\geq 0}$$

非負べき部分

- KP階層:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x^m} = [B_m, L]}$$

$$\partial_m u_2 \partial_x^{-1} + \partial_m u_3 \partial_x^{-2} + \partial_m u_4 \partial_x^{-3} + \cdots$$

$$f_{m2}(u)\partial_x^{-1} + f_{m3}(u)\partial_x^{-2} + f_{m4}(u)\partial_x^{-3} + \cdots$$

$\longrightarrow$ 各係数から可換な無限個の発展方程式が得られる

cf. 無限個の保存密度:

$$\sigma_n = resL^n$$

L^n の中の ∂_x^{-1} の係数

KP階層から生じる発展方程式の具体形(detail危険)

m=1： $x_1 \equiv x$

m=2：

∂_x^{-1}) $\partial_2 u_2 = \underline{2u_3'} + u_2''$

∂_x^{-2}) $\partial_2 u_3 = \underline{2u_4'} + u_3'' + 2u_2 u_2'$

∂_x^{-3}) $\partial_2 u_4 = \underline{2u_5'} + u_4'' + 4u_3 u_2' - 2u_2 u_2''$

$\vdots$

無限種類の場は実は1種類の場で記述される

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\partial_x^{-1} := \int^x dx'$$

m=3： $u_2 \equiv u$

∂_x^{-1}) $\partial_3 u_2 = u_2''' + 3u_3'' + 3u_4'' + 3u_2' * u_2 + 3u_2 * u_2'$

etc.

$\vdots$

$\downarrow$

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xxx} + \frac{3}{2} u_x u + \frac{3}{4} \partial_x^{-1} u_{yy}$$

(2+1)次元KP方程式

$$u = u(x^1, x^2, x^3, \cdots)$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$x \quad y \quad t$$

他の m → 高次 KP方程式

リダクション

(KP階層) → (さまざまな可積分階層)

- (例) KdV階層

リダクション条件

$$L^2 = B_2 (=: \partial_x^2 + u)$$ ：2-reduction

→KdV階層

注： $\dfrac{\partial u}{\partial x_{2N}} = 0$ ： x_{2N} 方向への次元還元にもなっている

KP： $u(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots)$

$x \quad y \quad t$ ：(2+1)-dim.

↓ ↓

KdV： $u(x^1, \quad x^3, \quad x^5, \ldots)$

$x \quad t$ ：(1+1)-dim.

l-リダクション $L^l = B_l \ (l = 2,3,4,\ldots) \rightarrow$ 広いクラスの可積分階層（Gelfand-Dickey階層）

- No-reduction → KP $\qquad (x, y, t) = (x^1, x^2, x^3)$
- 2-reduction → KdV $\qquad (x, t) = (x^1, x^3)$
- 3-reduction → Boussinesq $\qquad (x, t) = (x^1, x^2)$
- 4-reduction → Coupled KdV $\qquad \ldots$
- 5-reduction → …
- 3-reduction of BKP → Sawada-Kotera
- 2-reduction of mKP → mKdV (m=modified)
- Special 1-reduction of mKP → Burgers
- …

さまざまなソリトン方程式の統一的取り扱い

KP階層の(一般)解

$$\frac{\partial L}{\partial x^m} = [B_m, L]$$

$$L = W\partial_x W^{-1} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} + \cdots \qquad W y_k = 0,\ \partial_m y_k = \partial_x^m y_k$$

$$W f := \frac{1}{\tau_N}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N & f \\ y_1' & \cdots & y_N' & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} & f^{(N)} \end{vmatrix} = \partial_x^N + w_1\partial_x^{N-1} + \cdots + w_N$$

ソリトン解：

$$y_i = \exp\xi(x,\alpha_i) + a_i \exp\xi(x,\beta_i)$$

$$\xi(x,\alpha) = x_1\alpha + x_2\alpha^2 + x_3\alpha^3 + \cdots$$

$$u = 2\partial_x^2 \log\tau_N, \quad \tau_N := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{N-1} & y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(N-2)} & \cdots & y_{N-1}^{(N-2)} & y_N^{(N-2)} \\ y_1^{(N-1)} & \cdots & y_{N-1}^{(N-1)} & y_N^{(N-1)} \end{vmatrix}$$

5. ソリトンの佐藤理論

- KP階層の解空間の構造(対称性)は何だろう？
- 解はロンスキ行列の行列式(タウ関数)で書ける
- 広田変換によりKP階層（無限個の発展方程式）は無限個の双線形関係式に帰着
- [重要な洞察] 双線形関係式は行列式の恒等式(プリュッカー関係式)に他ならない！（→あとで説明）
- (有限個の)プリュッカー関係式は(有限次元の)グラスマン多様体を記述
- [佐藤の定理] KP階層の解空間は無限次元のグラスマン多様体である.
- KP階層のリダクションで他のソリトン階層が出る.

ちょっと休憩：佐藤幹夫さんについて

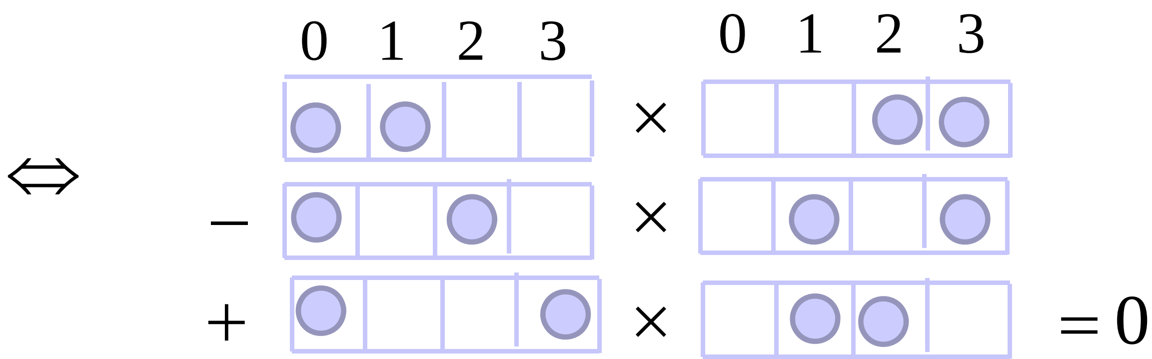
- 1928年～(現在87歳)
- 京大数理研で長らく研究
- 超関数(hyperfunction)の理論
- ソリトンの佐藤理論
- ホロノミック量子場理論
- 概均質ベクトル空間(数論)
- 伊藤清さん曰く「佐藤君によって日本の数学はひとりだちした」@学士院賞受賞祝賀会にて

- **プリュッカー関係式:グラスマン多様体Gr(m,n)を(射影空間内に)実現する(埋め込む)ための定義式**

例：Gr(2,4)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (0\quad 1)(2\quad 3) - (0\quad 2)(1\quad 3) + (0\quad 3)(1\quad 2) = 0$$

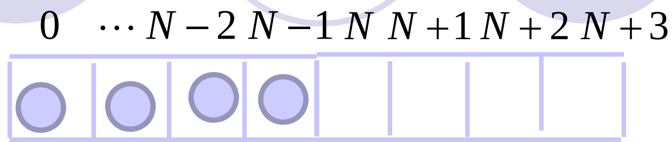


佐藤のマヤ図形

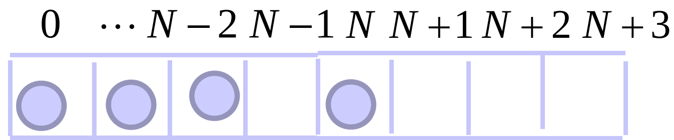
- **Gr(m,n):n次元線形空間内のm次元線形部分空間全体（次元＝m(n-m)）**

KP階層の一般解 （ロンスキ行列の行列式）

$$\tau_N := \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-2)} & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-1} & \cdots & f_{N-1}^{(N-2)} & f_{N-1}^{(N-1)} \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-2)} & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$



$$\partial_x \tau_N := \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-2)} & f_1^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-1} & \cdots & f_{N-1}^{(N-2)} & f_{N-1}^{(N)} \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-2)} & f_N^{(N)} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$



注）行列式の微分＝「各列微分」の和

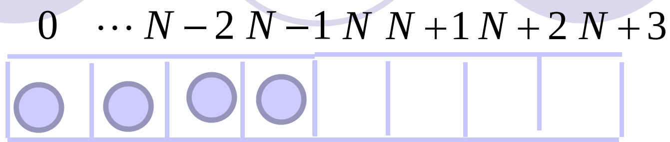
$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n) \Rightarrow |A|' = \sum_{i=1}^{n} \left| (\vec{a}_1 \cdots, \vec{a}_i{}', \cdots \vec{a}_n) \right|$$

例：２×２

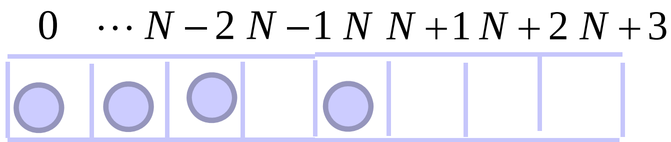
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A|' = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

KP階層の一般解 （ロンスキ行列の行列式）

$$\tau_N := \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-2)} & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-1} & \cdots & f_{N-1}^{(N-2)} & f_{N-1}^{(N-1)} \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-2)} & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$



$$\partial_x \tau_N = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-2)} & f_1^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-1} & \cdots & f_{N-1}^{(N-2)} & f_{N-1}^{(N)} \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-2)} & f_N^{(N)} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$



$$f_k(t) = f_k(t_1, t_2, t_3, \cdots)$$

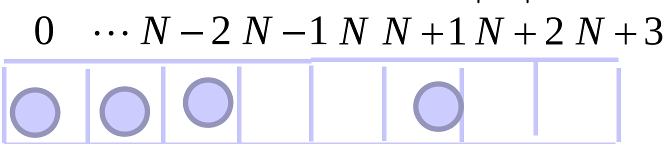
$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ x & y & t \end{array}$$

$$\partial_2 f_k = \partial_x^2 f_k$$

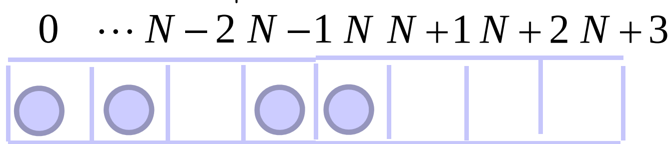
$$\partial_3 f_k = \partial_x^3 f_k$$

$$\partial_y \tau_N = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-2)} & f_1^{(N+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-1} & \cdots & f_{N-1}^{(N-2)} & f_{N-1}^{(N+1)} \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-2)} & f_N^{(N+1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-1)} & f_1^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-1} & \cdots & f_{N-1}^{(N-1)} & f_{N-1}^{(N)} \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-1)} & f_N^{(N)} \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow$



$-$



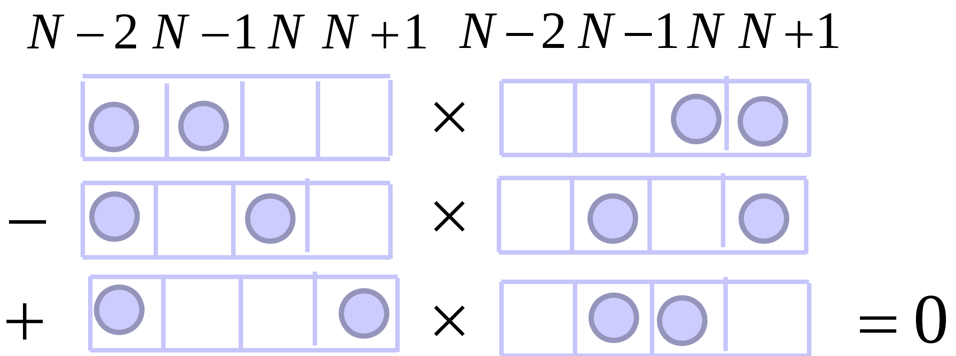
KP階層の双線形関係式(の一つ)

$$(\tau_{xxxx}-4\tau_{tx}+3\tau_{yy})\tau-4(\tau_{xxx}-\tau_{t})\tau_{x}+3(\tau_{xx}-\tau_{y})(\tau_{xx}+\tau_{y})=0$$

$\Leftrightarrow$

(マヤ図形の和 - 4マヤ図形の和＋3マヤ図形の和)マヤ図形
－4(マヤ図形の和－マヤ図形の和)マヤ図形の和
＋3 (マヤ図形の和－マヤ図形の和)(マヤ図形の和＋マヤ図形の和)
＝0

$\Leftrightarrow$



さっきのプリュッカー関係式！！！

まとめ

KP階層(∞個の発展方程式)→∞個の双線形方程式

$$u_{t_3} = \cdots$$
$$u_{t_4} = \cdots$$
$$u_{t_5} = \cdots$$
$$\vdots$$
$$u = u(t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots)$$

広田変換

$$u = 2\partial_x^2 \log \tau$$

$$\sum \tau_* \cdot \tau_* = 0$$
$$\sum \tau_* \cdot \tau_* = 0$$
$$\sum \tau_* \cdot \tau_* = 0$$
$$\vdots$$
$$\tau = \tau(t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots)$$

〈無限個の保存量〉
〈可積分性〉

⇔∞個のプリュッカー関係式

↔∞次元のグラスマン多様体
〈無限次元の対称性〉

佐藤理論：ソリトン理論の中で最も美しい理論

参考文献

読み物・解説記事

- 木村達夫編「佐藤幹夫の数学」(日本評論社)
- 「佐藤幹夫の数学」現代数学の広がり2(岩波)
- 村瀬元彦「ソリトンの代数的側面」 in 数理科学別冊「ソリトン」 (1985)p.127 ※6-8章(追記)もお薦め

教科書・専門書

- 広田良吾「直接法によるソリトンの数理」(岩波)
- 三輪・神保・伊達「ソリトンの数理」(岩波)
- 佐藤幹夫講義録(京大数理解析レクチャーノート5)
- 高崎金久「可積分系の世界　戸田格子とその仲間」(共立)

6. ソリトン理論の非可換化

もともとの動機：非可換空間への拡張 $[x, y] = \sqrt{-1}\theta$

- 特異点解消による新しい物理的対象
- ゲージ理論においては背景磁場中の物理を記述（量子ホール効果, Dブレーン有効理論）
- 取り扱いが簡単になることがある（→Dブレーン力学への応用, 非可換の方が自然？？）

非可換化はマニアックではなく面白い

さまざまな非可換ソリトン方程式(＊:非可換積)

＊=Moyal積 ⇔ 非可換空間上の理論

- NC ASDYM eq.（Yang形式）（in ゲージ理論）

$$\partial_z(J^{-1}*\partial_{\tilde{z}}J)-\partial_w(J^{-1}*\partial_{\tilde{w}}J)=0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{12}=-F_{34},\cdots$$

- NC Kadomtsev–Petviashvili (KP)eq.(inスカラー理論)

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xxx}-\frac{3}{4}(u_x*u+u*u_x)+\frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy}+\frac{3}{4}[u,\partial_x^{-1}u_{yy}]_*$$

- NC Korteweg-de Vries (KdV) eq. (in スカラー理論)

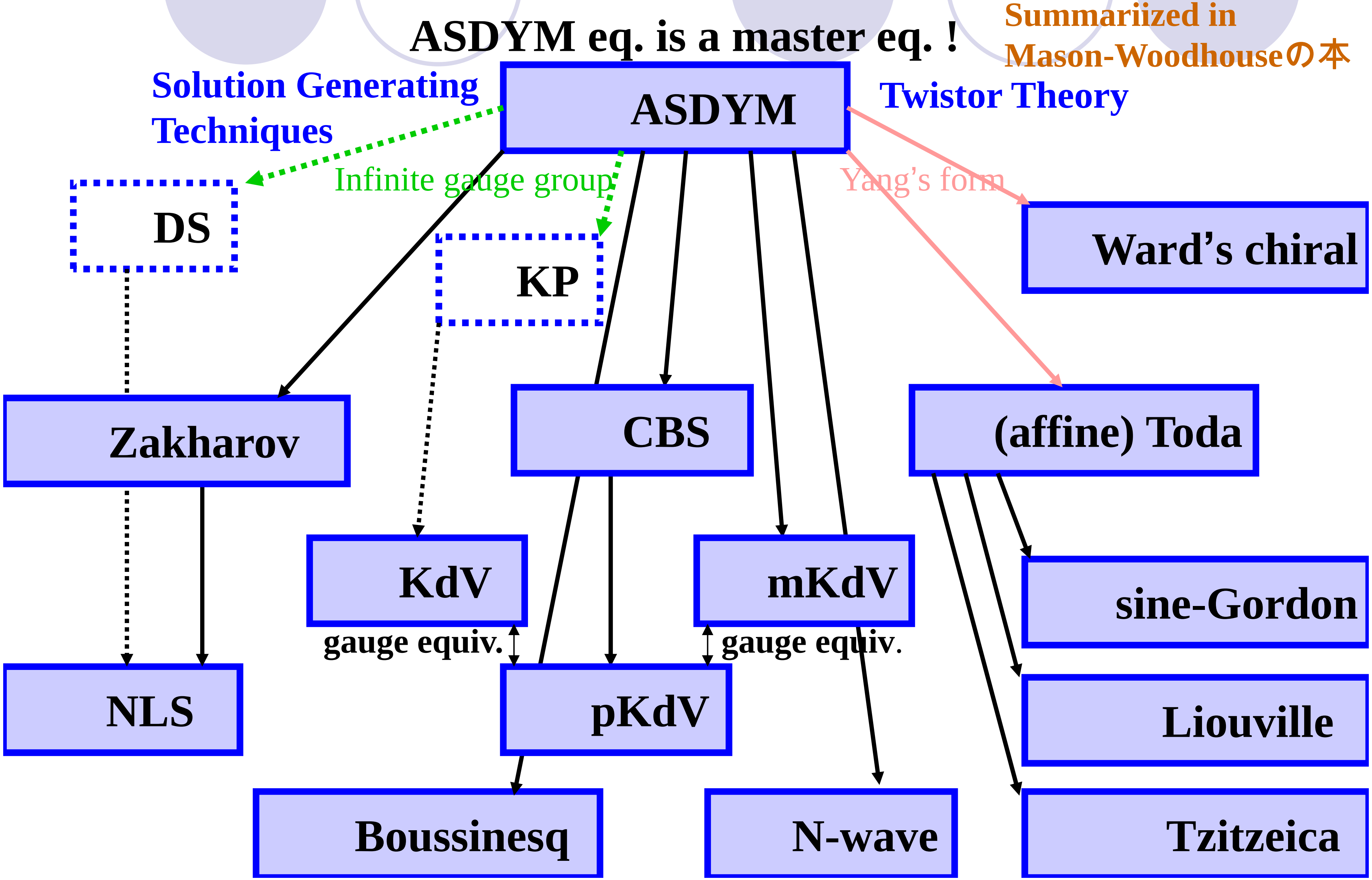
$$u_t=\frac{1}{4}u_{xxx}-\frac{3}{4}(u_x*u+u*u_x)$$

非可換積＊は以後明記しない

[目標] すべてのソリトン方程式の非可換空間への拡張

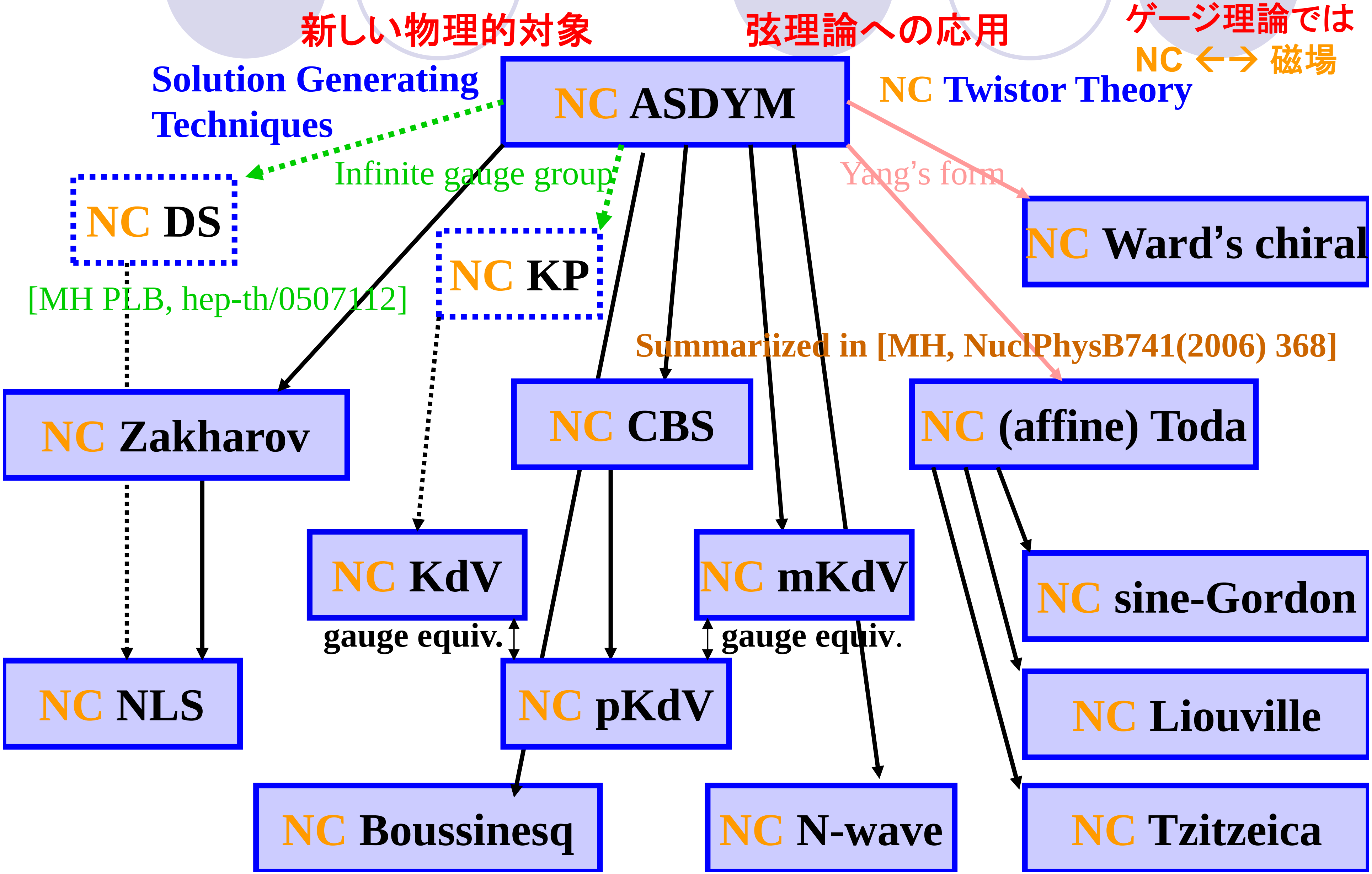
（意味あり？）

Ward予想: (ほとんど)すべての可積分方程式はAnti-self-dual Yang-Mills (ASDYM)方程式から得られる



非可換Ward予想: (ほとんど)すべての非可換可積分方程式は非可換ASDYM方程式から得られる

[MH-Toda, PLA(‘02)]



（例）非可換KdVへのリダクション

$$\begin{cases} F_{zw} = 0, \\ F_{\tilde{z}\tilde{w}} = 0, \\ F_{z\tilde{z}} - F_{w\tilde{w}} = 0 \end{cases}$$

:非可換ASDYM eq.
G=GL(2)

$$(z, \tilde{z}, w, \tilde{w}) \to (t, x) = (z, w + \tilde{w})$$

$$A_{\tilde{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{\tilde{w}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

リダクション条件

$$A_w = \begin{pmatrix} q & -1 \\ q' + q^2 & -q \end{pmatrix}, A_z = \begin{pmatrix} \underline{\frac{1}{2}q'' + q'q} & -q' \\ \frac{1}{4}q''' + \frac{1}{2}(q'^2 + qq'' + q''q) + qq'q & \underline{-\frac{1}{2}q'' - qq'} \end{pmatrix}$$

トレースが非ゼロ
（U(1) パートが重要!）

$$\dot{u} = \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{4}(u'u + uu') \qquad u = 2q'$$

:非可換KdV eq.!

（低次元の）解＝Quasi-wronskian解

[Eringof–Gelfand–Retakh,
Math. Res. Lett. 4 (1997) 413]

- **(2+1)次元非可換KP方程式**

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{4}(u_x u + u u_x) + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy} + \frac{3}{4}[u, \partial_x^{-1}u_{yy}]$$

の解は、Quasideterminantというある種の非可換行列式によって以下のように表される：

$$W f := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N & f \\ y_1' & \cdots & y_N' & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} & \boxed{f_N^{(N)}} \end{vmatrix}$$

$$L = W\partial_x W^{-1} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} + \cdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial t^m} = [B_m, L], \qquad W y_k = 0$$

$$u = u(t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots)$$

証明は可換な場合より簡単！！！

Quasi-determinants

[Gelfand-Retakh, Funct.Anal.Appl.25(1991)91, A survey: Gelfand et al,math.QA/0208146]

- Quasi-determinants は単なる行列式の一般化ではなくむしろ直接は逆行列と密接に関連.
- [定義1] n × n 行列 $X=(x_{ij})$ が与えられたとして，その逆行列を $Y=(y_{ij})$ とする(存在は仮定)．このとき，X の quasi-determinant は以下のように定義される：

$$|X|_{ij}=y_{ji}^{-1} \qquad \left(\xrightarrow[\text{linmit}]{\text{commutative}} \frac{(-1)^{i+j}}{\det X^{ij}}\det X \right)$$

X^{ij} : Xの i 行目と j 列目を除いた行列

- [定義2(Iterative definition)]

$$|X|_{ij}=x_{ij}-\sum_{i',j'}x_{ii'}((X^{ij})^{-1})_{i'j'}x_{j'j}=x_{ij}-\sum_{i',j'}x_{ii'}(|X^{ij}|_{j'i'})^{-1}x_{j'j}=\begin{vmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{x_{ij}} & \cdots \\ & \vdots & \end{vmatrix}$$

n+1 × n+1　　　n × n

便利な記法

Quasi-determinantの具体例

$$n=1:\quad |X|_{ij} = x_{ij}$$

$$n=2:\quad |X|_{11} = \begin{vmatrix} \boxed{x_{11}} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11} - x_{12}\cdot x_{22}^{-1}\cdot x_{21},\quad |X|_{12} = \begin{vmatrix} x_{11} & \boxed{x_{12}} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{12} - x_{11}\cdot x_{21}^{-1}\cdot x_{22},$$

$$|X|_{21} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \boxed{x_{21}} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{21} - x_{22}\cdot x_{12}^{-1}\cdot x_{11},\quad |X|_{22} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & \boxed{x_{22}} \end{vmatrix} = x_{22} - x_{21}\cdot x_{11}^{-1}\cdot x_{12},$$

$$n=3:\quad |X|_{11} = \begin{vmatrix} \boxed{x_{11}} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11} - (x_{12}, x_{13}) \begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$$

$$= x_{11} - x_{12}\cdot(x_{22} - x_{23}\cdot x_{33}^{-1}\cdot x_{32})^{-1}\cdot x_{21} - x_{13}\cdot(x_{32} - x_{33}\cdot x_{23}^{-1}\cdot x_{22})^{-1}\cdot x_{21}$$

$$- x_{12}\cdot(x_{23} - x_{22}\cdot x_{32}^{-1}\cdot x_{33})^{-1}\cdot x_{31} - x_{13}\cdot(x_{33} - x_{32}\cdot x_{22}^{-1}\cdot x_{23})^{-1}\cdot x_{31}$$

$$\cdots$$

注意:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow Y = X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & \underline{-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & \underline{(C-DB^{-1}A)^{-1}} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

関係式（次のページ）

Quasideterminantの恒等式

- **Homological relation**

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & \boxed{h} & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix}$$

e.g.

$$C - DB^{-1}A = \begin{vmatrix} A & B \\ \boxed{C} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & \boxed{D} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ \boxed{0} & 1 \end{vmatrix} = (D - CA^{-1}B)(-B^{-1}A)$$

さっきの関係式!

Quasideterminantの恒等式

- 非可換Jacobi恒等式

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & \boxed{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ E & \boxed{i} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B \\ E & \boxed{h} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ D & \boxed{f} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} A & C \\ D & \boxed{g} \end{vmatrix}$$

$``D - CA^{-1}B"$

$$\xrightarrow{\theta \to 0} \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & f & g \\ E & h & i \end{vmatrix} |A| = \begin{vmatrix} A & C \\ E & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ D & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B \\ E & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & C \\ D & g \end{vmatrix}$$

:可換Jacobi恒等式

（低次元の）解＝Quasi-wronskian解

[Eringof–Gelfand–Retakh, Math. Res. Lett. 4 (1997) 413]

- （2+1）次元非可換KP方程式

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{4}(u_x u + u u_x) + \frac{3}{4}\partial_x^{-1} u_{yy} + \frac{3}{4}[u, \partial_x^{-1} u_{yy}]$$

の解は、**Quasideterminant**というある種の非可換行列式によって以下のように表される：

$$W f := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N & f \\ y_1' & \cdots & y_N' & f' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} & \boxed{f_N^{(N)}} \end{vmatrix}$$

$$u = \partial_x \left(\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(N-2)} & & y_N^{(N-2)} \\ y_1^N & \cdots & \boxed{y_N^N} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_N \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(N-2)} & & y_N^{(N-2)} \\ y_1^{(N-1)} & \cdots & \boxed{y_N^{(N-1)}} \end{vmatrix} \right)$$

$$L = W \partial_x W^{-1} = \partial_x + \frac{u}{2}\partial_x^{-1} + \cdots$$

$$\xrightarrow{\theta \to 0} \quad u = \partial_x^2 \log \tau_N$$

証明は可換な場合より簡単！！！

（高次元の）解＝Quasi-determinant解

[Gilson-MH-Nimmo,
Proc.R.Soc.Lond.A465(2009) 2613]

- 非可換ASDYM方程式(Yang形式)

$$\partial_z (J^{-1}\partial_{\tilde{z}} J) - \partial_w (J^{-1}\partial_{\tilde{w}} J) = 0$$

の解もまた、Quasideterminantというある種の非可換行列式によって以下のように表される:

$$J = \begin{vmatrix} \boxed{0} & -1 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{0} \\ 1 & \Delta_0 & \Delta_{-1} & \cdots & \Delta_{1-n} & \Delta_{-n} \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_0 & \cdots & \Delta_{2-n} & \Delta_{1-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Delta_{n-1} & \Delta_{n-2} & \cdots & \Delta_0 & \Delta_{-1} \\ \boxed{0} & \Delta_n & \Delta_{n-1} & \cdots & \Delta_1 & \boxed{\Delta_0} \end{vmatrix}$$

低次元ソリトン方程式と同様の形でコンパクトに書ける

普遍的定式化の示唆？

証明は可換な場合よりはるかに簡単！！！

可換より非可換の方が簡単？？

- 自分なりの現時点での解釈：非可換でも通用する定式化こそ、本質的で正しい

- 宇宙は非可換か？→ いいんじゃないの

- 今後：「非可換命」の立場で(次元によらない)普遍的なソリトン理論の非可換化を目指す。

どうもありがとうございました