担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

コーシーの積分定理・コーシーの積分公式

作成日：July 10, 2018　Updated：July 17, 2018　Version：1.0　実施日：July 17, 2018

準備とウォーミングアップ

問題 1. (実積分の極限評価) $t>0$ とする.

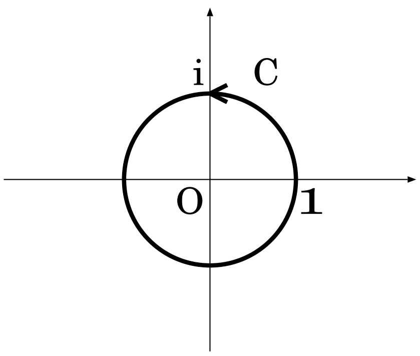
(1) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\sin x}dx=0$ を示せ. (ヒント：$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x$)

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-t\sin x}dx=0$ を示せ.

複素線積分 (以下すべて, $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とする.)

例題 1. $n\in\mathbb{Z}$ とする.
単位円 C (右図) のパラメータ表示が
$C=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z=e^{i\theta},\ 0\le\theta<2\pi\right\}$
であることを利用して, 次の複素線積分を求めよ.
(積分路の向きは反時計まわりとする):

$$I=\int_C z^n dz.$$



【解答】 単位円上の点を $z=e^{i\theta}$ $(0<\theta<2\pi)$ とおくと, $dz=ie^{i\theta}d\theta$ より,

$$I=\int_C z^n dz=\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}id\theta=\int_0^{2\pi}(i\cos(n+1)\theta-\sin(n+1)\theta)\,d\theta=\begin{cases}2\pi i & n=-1\\ 0 & n\neq-1\end{cases}$$

問題 2. (円周積分路での複素線積分) $n\in\mathbb{Z},\ a\in\mathbb{C},\ R>0$ とする. 積分路を $C=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|=R\}$. としたとき, 次の複素線積分を (コーシーの積分定理・積分公式を用いずに) 求めよ. (積分路の向きは反時計まわりとする. 指数関数のテイラー展開可能性と指数法則, および項別積分可能性は認めてよい.)

(1) $\displaystyle I=\int_C (z-a)^n dz$　　(2) $\displaystyle I=\int_C \frac{e^z}{z-a}dz$

コーシーの積分定理・積分公式

定理 1. 関数 $f(z)$ が複素平面内の領域 D で正則で, 単純閉曲線 C (長さ有限) がその内部も含めて D に属するとする. また a を C の内部の点とする. このとき, 以下が成り立つ：

- [コーシーの積分定理]　$\displaystyle\oint_C f(z)dz=0$
- [コーシーの積分公式]　$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)$

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 3. (コーシーの積分公式の応用：部分分数化) 1 の 3 乗根のうち虚部が正のものを ω と表す．積分路を $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 7\}$. としたとき，次の複素線積分の値をコーシーの積分公式を用いて求めよう (積分路の向きは反時計まわりとする):

$$I = \int_C \frac{z^2}{z^3-1} dz.$$

(1) 以下の部分分数展開を考える．展開係数 A, B, C を求めよ．

$$\frac{1}{z^3-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\omega} + \frac{C}{z-\omega^2} \cdots (*).$$

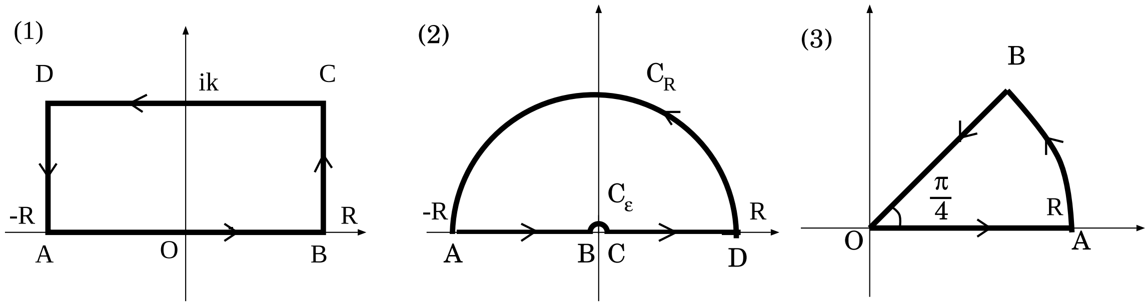
(2) これを利用して，積分値 I を求めよ．

問題 4. (コーシーの積分定理の実積分への応用１) $k > 0$ とする．次の実積分の値を求めよ: $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2kx dx.$

(ヒント： $f(z) = e^{-z^2}$ を下図 (1) に与えられた周回積分路 C =AB+BC+CD+DA で積分する．それぞれの区間の線積分を評価し, $R \to \infty$ の極限をとる．曲線の向きに注意.)

問題 5. (コーシーの積分定理の実積分への応用２) 次の実積分の値を求めよ: $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$

(ヒント：$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ を下図 (2) に与えられた周回積分路 C =AB+C_ε+CD+C_R で積分する．C_ε, C_R はそれぞれ半径 ε, R の半円弧．それぞれの区間の線積分を評価し, $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ の極限をとる．曲線の向きに注意．問題 1 の結果は既知としてよい.)



今週の宿題 (提出期限は 7 月 23 日 (月)17 時@教育研究支援室です)

問題 6. (大問 2 問分の配点とする)

次の実積分 (フレネル積分) の値を求めよ: $I = \displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx.$

(ヒント： $f(z) = e^{-z^2}$ を上図 (3) に与えられた周回積分路 C =OA+AB+BO で積分する．AB は半径 R の円弧の一部．ガウス積分の値 (H003 問題 9 (5)) は既知としてよい.)

7 月 31 日 (火) の小テスト３について：

- 試験範囲は, 7/3, 7/10, 7/17 実施の 3 回分です．(ただし以下の問題は除く：ボーナス問題すべて，フーリエ変換の問題 (7/3 出題分の H008 問題 4・問題 5))
- ノートは持ち込み不可です．