担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

数列の極限とコーシー列, 関数項数列・関数項級数の一様収束

作成日：July 3, 2018　Updated：July 17, 2018　実施日：July 10, 2018

本日扱う数列・関数はすべて実数に値をとるものとする.

数列の極限とコーシー列

定義 1. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であるとは,「任意の正の数 ε に対し, ある自然数 N が存在して, $m,n \geq N$ を満たすすべての自然数 m,n に対して, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つ」ときをいう.

問題 1. (コーシー列)

(1) 収束する数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることを示せ.

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列でないことを, ε 論法の言葉で表せ.

(4) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列でないことを示せ.

実は「数列が収束する」ことと「数列がコーシー列である」ことは同値であり, 数列が収束するかどうかをコーシー列かどうかで判定できる. 後者の方が, 収束先が分からないときにも使えて一般に応用範囲が広い.

関数項数列の一様収束

問題 2. (関数項数列の一様収束性と極限関数の連続性) 関数列 $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $f_n(x) := x^n$ で定義する.

(1) $f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおく. $f_\infty(x)$ のグラフを描け.

(2) $f_n(x)$ は連続関数であるが $f_\infty(x)$ は連続か? (答えのみでよい)

問題 3. (関数項数列の一様収束性と積分と極限の順序) 関数列 $\{g_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $g_n(x) := nxe^{-nx^2}$ で定義する. このとき

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)\,dx$ を求めよ.　(2) $g_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$ を求めよ.　(4) (1) の計算結果と (3) 計算結果は等しいか?

教訓

- 連続関数列が各点で収束しても, 極限で得られる関数は連続とは限らない!
- 関数列の積分の極限値は, 関数列の極限関数の積分値と一致するとは限らない!

定義 2. 区間 I 上で定義された関数の列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I 上の関数 $f(x)$ に**一様**収束するとは,「任意の正の数 ε に対してある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば**任意の** $x \in I$ **について** $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ」ときを言う.

問題 4. (関数項数列の一様収束)

(1) $h_n(x) := \dfrac{1}{x^2+n^2}$ で定義される関数列 $\{h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

(2) 「区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(x)$ に I 上一様収束しない」ことを ε-N 論法で表せ.

(3) 問題 2 の関数列が $f_\infty(x)$ に区間 $I = [0,1]$ 上一様収束しないことを示せ.

前ページで導入した一様収束の概念を使うと, 次の 2 つの重要な定理が得られる.

定理 1. 区間 I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(x)$ に I 上一様収束するとする.

(1) $f(x)$ は I 上の連続関数である.
(一様収束する連続関数列の極限 (極限関数) は連続関数である.)

(2) さらに I が閉区間 $[a,b]$ である場合には, 原始関数の関数列 $\left\{\displaystyle\int_a^x f_n(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は原始関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ に $I=[a,b]$ 上一様収束する. 特に

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt$$

が成り立つ. (一様収束すれば 積分と極限を交換できる.)

問題 5. (一様収束に関する定理) 定理 1 (1) を証明せよ.
(ヒント : 点 $a \in I$ を任意に固定して, $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを示そう. そのために, 正の数 ε を任意に与え, 仮定「$f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束する」と「$f_n(x)$ が $x=a$ で連続である」を**用いる**. 不等式 $|f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(a)| + |f_n(a)-f(a)|$ より, 仮定をどのような正の数に対して用いるかを考察せよ.)

[注意]

- ここまでは関数項**数列**の話
- ここからは関数項**級数**の話

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

関数項級数の一様収束

定義 3. 区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ を関数項級数という.
部分和 $s_1(x) := f_1(x),\ s_2(x) := f_1(x) + f_2(x),\ s_3(x) := f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \cdots$ が $s(x)$ に一様収束するとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $s(x)$ に一様収束するという.
(この部分和の列に定理 1(2) を適用すると,「一様収束すれば 項別積分ができる」ということになる.)

定理 2. (Weierstrass の M 判定法)
区間 I 上で定義された関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ を考える. ある収束級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ があって, 区間 I の任意の点 x について $|f_n(x)| \leq a_n$ がすべての自然数 n に対して成り立つならば, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は区間 I で一様収束する.

問題 6. (関数項級数の一様収束) ここでは Weierstrass の M 判定法を用いてよい.

(1) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{x^2+n^2}$ は区間 $I = [-1, 1]$ で一様収束することを示せ.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ は区間 $I = [0, a]$ $(0 < a < 1)$ で $\dfrac{1}{1+x}$ に一様収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ が収束するとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

今週の宿題 (提出期限は 7 月 17 日 (火) 演習開始時です)

問題 7.

(1) 数列 $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ はコーシー列でないことを示せ.

(2) $f_n(x) := \dfrac{x^{18}}{x^7 + n^{10}}$ で定義される関数列 $\{f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $I = [0, 1]$ 上一様収束することを示せ.

(3) 定理 1 (2) を証明せよ. (ヒント：正の数 ε を任意に与え, この ε に対して結論を示すには, どのような正の数に対して仮定「$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a, b]$ 上一様収束する」を適用すればよいかを考えよ. 次の不等式にも注意：

$$\left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt.$$

また, $x - a \leq b - a$ $(x \in [a, b])$ にも注意.)

担当教員：浜中 真志 研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 8.

(1) 関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ は区間 $I=[0,a]$ $(0<a<1)$ で一様収束することを示せ. (M 判定法を用いてよい)

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ の原始関数は何か？

(3) $|x|<1$ とする. $f(x)$ の無限和展開を用いて, $\arctan x$ の原点まわりでの無限テイラー展開を求めよ.

(4) 前問の結果に $x=1/\sqrt{3}$ を代入して, $\dfrac{\pi}{6}$ の無限和表示を求めよ.

参考書

稲葉三男「一様収束」(共立出版) (残念ながら絶版のようです. 図書館にはあります.)

今週のボーナス問題 (提出期限は 7 月 17 日 (火) 演習開始時です)

問題 9. (ゼータ関数とその特殊値) 数学において重要な関数というものはいくつもあるが, 数論において特に重要なものとして, ゼータ関数というものがある.

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

ただし s は $\mathrm{Re}\, s>1$ の複素数である.

本問では重積分を利用して，特殊値 $\zeta(2)$ を計算しよう. (前回はフーリエ展開の知識を認めて宿題で求めているが，今回は予備知識なしできちんと求めてみる.)

$$\zeta(2):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

(1) まず無限和 $\zeta(2)$ が収束することを, 数列

$$a_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

の単調増大性と有界性を示すことで証明せよ.

(2) 天下りであるが, 次の 2 変数積分を考える：

$$I=\int\!\!\int_D\frac{1}{1-xy}\,dx\,dy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$$

$\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\ (|t|<1)$ を利用して, まず $I=\zeta(2)$ を示せ.

(本日の演習の結果より, 項別に積分しても構わない.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(3) ここから 2 変数積分 I を別の方法で具体的に計算する．まず変数変換

$$x = u - v,\ y = u + v$$

を施す．この変数変換におけるヤコビアン $J(u, v)$ は何か？ また積分領域 D を u, v 平面に図示せよ．

(4) 前問の変数変換により求める積分 I は

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2}dv\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}dv\right) du$$

となることが分かる．(被積分関数の $v \to -v$ の対称性に注意.) これを示し, v についての積分を実行せよ．(ヒント：$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ の積分値は？)

(5) 前問の計算により,

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

が得られている (はずである)．右辺第一項で $u = \sin\theta$, 右辺第二項で $u = \cos\theta$ の置換を行い, この積分値を評価せよ．(答えは $\dfrac{\pi^2}{6}$.)

こうして以下の有名な等式が証明された．

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

なお無限和の部分は次のように無限積の形に書き換えることができる (ヒント：素因数分解の一意性)：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p^2}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2^2}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{5^2}} \cdots.$$

したがって

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p^2}} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2}$$

という関係式が得られるが, これはとても不思議な式である．左辺は素数全体に関する積であり, 整数論と関連する．右辺は円周率を含み, 幾何学的な情報を含んでいる．したがって等式 (2) は, 整数論と幾何学を結ぶ深遠な関係を示唆していると考えられる．(ちなみにこの関係式は 1735 年に天才数学者オイラーによって証明された.)