担当教員：浜中 真志　研究室：A327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

実対称行列の対角化，2次曲線・2次曲面の標準化

作成日：July 1, 2018　Updated：July 3, 2018　　実施日：July 3, 2018

エルミート行列の性質・対角化

例題 1. $A^* := {}^t\bar{A} = A$ を満たす行列をエルミート (Hermite) 行列という．以下 $V = \mathbb{C}^n$ とし，内積 $\langle\ |\ \rangle$ は標準的なものとする．

(1) 任意の $\vec{v}, \vec{w} \in V$ に対して，エルミート行列 A が $\langle A\vec{v}|\vec{w}\rangle = \langle\vec{v}|A\vec{w}\rangle$ を満たすことを示せ．

(2) エルミート行列 A の固有値はすべて実数であることを示せ．

(3) エルミート行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(4) エルミート行列 A の n 個の固有値がすべて相異なるとき，それらに対する n 個の固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ が一次独立であることを，前問の性質を用いて示せ．(このとき，$P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ とすると $P^{-1}AP$ が対角行列になる.)

(5) 固有ベクトルを正規化すれば，P はユニタリ行列 (すなわち $P^*P = E$ を満たす行列) となることを示せ．

【解答】

(1) $\langle A\vec{v}|\vec{w}\rangle = (A\vec{v})^* \cdot \vec{w} = \vec{v}^* A^* \vec{w} = \vec{v}^* A\vec{w} = \langle\vec{v}|A\vec{w}\rangle$.

(2) $A\vec{v} = \lambda\vec{v},\ \vec{v} \neq \vec{0}$ とおく．(1) より，$\langle A\vec{v}|\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}|A\vec{v}\rangle$ が成り立つ．ここで，$\langle\vec{v}|A\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}|\lambda\vec{v}\rangle = \lambda\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle$．一方，$\langle A\vec{v}|\vec{v}\rangle = \langle\lambda\vec{v}|\vec{v}\rangle = \bar{\lambda}\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle$．よって，$(\lambda - \bar{\lambda})\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle = 0$. $\vec{v} \neq \vec{0}$ より $\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle \neq 0$．よって，$\lambda = \bar{\lambda}$. ($\lambda$ は実数)

(3) $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ を A の相異なる固有値とし，それらに属する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{v}_i, \vec{v}_j$ とする．(1) より，$\langle A\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle = \langle\vec{v}_i|A\vec{v}_j\rangle$ が言える．ここで，$\langle\vec{v}_i|A\vec{v}_j\rangle = \lambda_j\langle\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle$ $\langle A\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle = \bar{\lambda}_i\langle\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle = \lambda_i\langle\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle$ より，$(\lambda_i - \lambda_j)\langle\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle = 0$. $\lambda_i \neq \lambda_j$ より，$\langle\vec{v}_i|\vec{v}_j\rangle = 0$.

(4) $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{C}$ とする．$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \vec{0} \cdots (*) \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ を示せばよい．l を 1 から n までの任意の自然数とする．$(*)$ の両辺と，$\vec{v}_l$ との内積をとると，$\langle\vec{v}_l|\vec{v}_m\rangle = \delta_{lm}$ より，$k_l = 0$.

(5) $P^*P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)^*(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^* \\ \vec{v}_2^* \\ \vdots \\ \vec{v}_n^* \end{pmatrix} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n) =$

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1^*\vec{v}_1 & \vec{v}_1^*\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1^*\vec{v}_n \\ \vec{v}_2^*\vec{v}_1 & \vec{v}_2^*\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2^*\vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_n^*\vec{v}_1 & \vec{v}_n^*\vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n^*\vec{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\vec{v}_1|\vec{v}_1\rangle & \langle\vec{v}_1|\vec{v}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{v}_1|\vec{v}_n\rangle \\ \langle\vec{v}_2|\vec{v}_1\rangle & \langle\vec{v}_2|\vec{v}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{v}_2|\vec{v}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\vec{v}_n|\vec{v}_1\rangle & \langle\vec{v}_n|\vec{v}_2\rangle & \cdots & \langle\vec{v}_n|\vec{v}_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1. (2 次のエルミート行列)

(1) エルミート行列の和とスカラー倍はともにエルミート行列となる．したがってエルミート行列全体は, 行列全体のなすベクトル空間の部分空間となる．2 次のエルミート行列全体のなす**実**ベクトル空間 W の基底と次元を求めよ．

(2) W の内積を以下で定める: $A, B \in W$ に対して, $\langle A|B\rangle := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^*B)$. 以下の 4 つの行列は, W の正規直交基底をなすことを示せ．

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は Pauli 行列と呼ばれ, 素粒子論, 物性理論など物理学の幅広い分野で顔を出す極めて重要な行列である．($(\sigma_0, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3)$ が四元数 $(1, i, j, k)$ と同じ積構造を持つことにも注意.)

実対称行列の対角化と 2 次曲線・2 次曲面への応用

問題 2. (実対称行列の対角化と 2 次曲線の標準化) 例題 1 と同様, $V = \mathbb{C}^n$ とし, 内積は標準的なものとする．

${}^tA = A$ を満たす実行列を実対称行列という．実対称行列は成分がすべて実数であるエルミート行列と解釈することができる．したがって, 実対称行列 A の固有値はすべて実数であり, 実対称行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．実対称行列 A の成分と固有値が実数であるから, 固有ベクトルの成分もすべて実数にとることができる．よって実対称行列は直交行列 P (${}^tPP = E$) によって対角化される．以上を踏まえて以下の問いに答えよ．

(1) 次の実対称行列を直交行列 P (${}^tPP = E$) によって対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$

(固有ベクトルを正規化すれば, それらを並べた行列は直交行列になることに注意.)

(2) 基底変換の行列 P がある角度の回転 (あるいは折り返し) を表す行列であることに注意して, 2 次曲線 C:$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4 \right\}$ の概形を描け．(ヒント：C を表す方程式の左辺は, $(x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書ける．また, 回転の向きに注意.)

問題 3. (2 次曲面の概形)

(1) $a, b, c > 0$ とする．3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内において以下の方程式 (a)〜(f) で記述される図形は何か？それぞれ (ア)〜(キ) の中から選べ．なお高次元図形の直観的理解には断面 ($z = 0$ のスライスなど) を見るというのが有効である．

(a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$　(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$　(c) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(d) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$　(e) $x^2 + y^2 = 1$　(f) $z = x^2 + y^2$

(ア) 楕円面　(イ) 一葉双曲面　(ウ) 二葉双曲面　(エ) 楕円放物面

(オ) 双曲放物面　(カ) 楕円錐面　(キ) その他

担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 曲面 S:= $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+z^2+2xy+2yz-4zx=6\right\}$ のあらわす図形を前問の(ア)〜(キ)の中から選べ.

フーリエ展開

一変数関数 $f(x)$ に対して, これまでテイラー展開なるものを学んだ：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

一般の複雑な関数をシンプルなべき関数 $(x-a)^n$ の和 (線形結合) で表示することで, $x=a$ 近傍の $f(x)$ の振る舞いを近似的に調べたり, さまざまな応用を考えることができた. 関数全体の空間は無限次元のベクトル空間として扱うことができ, $1,(x-a),(x-a)^2,\cdots$ が一つの基底をなすわけであったが, $(x-a)^n$ は標準的な内積に関して直交していないため実は扱いづらい面もある.

ここでは一変数周期関数 $f(x)$ に対して, フーリエ展開なるものを考える. 周期は 2π とし, 基本周期の範囲を $[-\pi,\pi]$ にとると, $f(x)$ は三角関数の和 (線形結合) として以下のように展開される：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{1}$$

これを $f(x)$ のフーリエ展開あるいはフーリエ級数と呼ぶ. この展開の利点は, 三角関数 $\cos nx,\sin nx$ が標準的な内積 $\langle f|g\rangle:=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$ に関して正規直交基底となっているところである:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\;dx=0,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\;dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\;dx=\delta_{m,n}. \tag{2}$$

テイラー展開のときと同様, 無限和の収束性などが問題となるが, ここではそれは認めて以下の問題を解いてみよう. (解答に, $c_n(x):=\cos nx, s_n(x):=\sin nx\ (n=1,2,3,\cdots)$ なる記号を用いてよい.)

問題 4. (フーリエ展開)

(1) フーリエ展開可能な関数 $f(x)$ が与えられたとき展開係数は以下のように書けることを示せ.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\;dx.$$

(2) 周期関数 $f(x)=\begin{cases}1 & (0<x<\pi)\\ 0 & (-\pi<x<0)\end{cases}$ を (1) 式のようにフーリエ級数展開し, 展開係数を計算してフーリエ展開級数を求めよ. また $x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると何が得られるか?

(3) 周期関数 $f(x)=|\sin x|\quad(-\pi<x<\pi)$ を (1) 式のようにフーリエ級数展開し, 展開係数を計算してフーリエ展開級数を求めよ. また $x=\pi/2$ を代入すると何が得られるか?

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題 (提出期限は 7 月 10 日 (火) 演習開始時です)

問題 5. (フーリエ展開) 問 4 の結果を既知としてよい. 周期関数 $f(x) = |x|$ $(-\pi < x < \pi)$ を (1) 式のようにフーリエ級数展開し, 展開係数を計算してフーリエ展開級数を求めよ. また $x = 0$ を代入すると何が得られるか？

問題 6. (2 次曲面の標準化)

(1) 曲線 C:= $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{5}(x-y) + 16 = 0\right\}$ の概形を描け.

(2) (a) 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化せよ.

(b) 2 次曲面 S:= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2xz + y^2 = 1\}$ はどのような図形を表すか. 簡単な理由説明とともに, 次のものから選べ：

(ア) 楕円面　(イ) 一葉双曲面　(ウ) 二葉双曲面　(エ) 楕円放物面
(オ) 双曲放物面　(カ) 楕円錐面　(キ) その他

小テスト 2 配点・解答案内

問題 1 (36 点) (1)(2) 各 3 点，(3)(4)(5) 各 10 点. 詳しくは H005 のプリント参照.
問題 2 (34 点) (1)(a) 4 点 (b) 6 点，(2)–(5) 各 6 点. 詳しくは H007 のプリント参照

(1) (a) $z = (2n + 1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$　(b) $z = (2n \pm 1/2)\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$ ($n \in \mathbb{Z}$, 複号同順)

(2) $u = 3x^2 - 3y^2 + 12x + c$, $f(z) = 3z^2 + 12z + c$ (c は実定数).

(3) $i^i = e^{-612(2n+1/2)\pi}$ $(n \in \mathbb{Z})$　(4)&(5) H007 のプリント参照

問題 3 (30 点) 詳しくは H006 のプリント参照.

(1) (4 点) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) (6 点) $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) (10 点) たとえば, $\mathrm{Im}\, T_A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Ker}\, T_A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(4) (a) (6 点) $\langle \vec{q}_i | \vec{q}_j \rangle = 3\delta_{ij}$: (正規でない) 直交基底　(b) (4 点) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$.

[講評] 今回も真面目に勉強したあとが伺えて，全体的には良い結果だったといえます. ただ, 問題 2 の複素関数論の数問でまったく手付かずといった答案もありました. (試験直前だったため復習に十分な時間が取れなかったのかもしれません.) 点数が引かれてなくても, 赤字のコメントがあるところは読んで納得してください. (納得できないところは遠慮なく質問・反論してください.)

前も言いましたが試験の目的というのは, 自分が本当に理解しているかどうかを手助けする機会だと思ってます. ですので, 解けなかった問題，まだ不安残る問題については各自必ずもう一度解いてみてください.