担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

複素関数

作成日：June 3, 2018　Updated：June 5, 2018　Version：1.0　実施日：June 5, 2018

べき級数と収束半径

問題 1. (収束半径) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 R は, 次の極限値 (左辺) が存在すれば, その逆数に等しい：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

次のべき級数の収束半径 R を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(6^n-5)z^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$

初等複素関数

問題 2. (指数関数, 三角関数)

複素数 z に対する指数関数, 三角関数を次のように定義する：

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

これらはすべて一様収束し，項別に微分・積分といった式変形を行うことができる.（ここではこれらは認めてよいとする.）

(1) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ を示せ.（特に $z=\theta\in\mathbb{R}$ としたものがオイラーの公式.）

(2) $\cos z, \sin z$ を指数関数 e^{iz}, e^{-iz} を用いて表せ.

(3) $\sin z = 0$ となる複素数 z をすべて求めよ.

問題 3. (対数関数, 累乗関数) 対数関数 $w=\log z$ は $z=e^w$ で定義される. $z=re^{i\theta}$ と極形式で表したとき，$\log z = \ln r + i(\theta+2n\pi)$,　$n\in\mathbb{Z}$ となる. α が複素数のとき, 累乗関数 (べき関数) は $z\neq 0$ として, $z^\alpha = e^{\alpha\log z}$ で定義される.

次の複素数の取りうる値をすべて求め, $u+iv$ $(u,v\in\mathbb{R})$ の形に表せ.

(1) $\log i$　(2) i^i

正則関数とコーシー・リーマンの関係式

問題 4. (コーシー・リーマンの関係式) $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とする.

(1) 複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分けて, $f=u+iv$ と表したとき, f が正則関数であるための条件を u,v,x,y の言葉で表せ.（答えのみでよい.）

(2) 正則関数の実部および虚部は調和関数である $(u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0)$ ことを示せ.

(3) 関数 $f(x,y)=ax^2+bxy+y^2+i(x^2+cxy+dy^2)$ が正則関数となるように定数 a,b,c,d の値を定めよ.

(4) 複素平面全体で正則な関数 $f(z)$ の実部 u が, $u(x,y)=x^2-y^2$ のように与えられているとき, $f(z)$ を決定せよ.

(5) 「正則」という言葉の由来を知るために, 複素数に値をとる 2 変数関数 $f(z,\bar{z})$ を考えよう. (z は正則座標, $\bar{z}$ は反正則座標と呼ばれることがあることに注意.)

まず, z と $\bar{z}$ を独立な変数として扱い, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ および $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ を $\dfrac{\partial}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial}{\partial y}$ の線形結合で表せ.

次に f を実部と虚部に分けて $f=u+iv$ と表したとき, 反正則座標 $\bar{z}$ に依存しない条件：$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ が，(1) で得られた関係式と一致することを示せ.

等角写像

問題 5. (複素べき関数による像) 複素関数 $w=f(z)=z^2$ によって, z 平面上の次の式で表される図形や領域が w 平面にどのようにうつされるか. 変換前の図形と変換後の図形を図示せよ. (2), (3) については, 2 直線のなす角はどうなるか. ($\alpha\in\mathbb{R}$, $z=x+iy$ とする.)

(1) 3 点 $A: z=\dfrac{1}{2}$, $B: z=1+i$, C: $z=2i$.　(2) 直線 $l_1: y=0$ と直線 $l_2: y=\tan\alpha\cdot x$

(3) 直線 $m_1: y=x$ と直線 $m_2: x=1$　(4) 上半円板 $D^+ := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1,\ y>0\}$

複素ベクトル空間, 正規直交基底

問題 6. (有限フーリエ展開) $n\in\mathbb{N}$ に対し, 以下の複素数を考える.

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

(1) 次で定義される n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の基底 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的な内積 $\langle\ |\ \rangle$ に関して正規直交基底をなすことを示せ. (内積の定義に複素共役が入ることに注意.)

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

(2) $n=3$ の場合を考える. $\mathbb{C}^3$ の元 $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}$ を基底 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ の線形結合で表せ.

問題 7. (フーリエ展開へのプレリュード)

(1) $z=re^{i\theta}$ $(r\geq 0, 0\leq\theta<2\pi)$ と表したとき, $\dfrac{1}{1-z}$ の虚部を r,θ を用いて表せ.

(2) $|z|<1$ において $\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3+\cdots$　$(*)$ が成り立つ. これを利用して, 次の積分値を求めよ. (r の範囲あるいは積分値の上限値に注意.)

$$I_n := \int_0^{2\pi} \frac{2\sin\theta\sin n\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$$

ただし, 以下の積分結果は既知としてよい (m,n は自然数)：

$$\int_0^{2\pi} \sin mx\sin nx\ dx = \pi\delta_{m,n}.$$

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

今週の宿題 (提出期限は☆ 6 月 26 日 (火)17 時@教育研究支援室☆です！)

問題 8. 以下, 双曲線関数の公式集にある性質は用いてもよい. (問題 9 も同様)

(1) $\sinh z = 0$ となる複素数 z をすべて求めよ.

(2) 次の複素数の取りうる値をすべて求め, $u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ の形に表せ.

(i) $\log(1 + i)$　　(ii) $(1 + i)^{\frac{6}{5}}$

問題 9. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とする.

(1) 複素平面全体で正則な関数 $f(z)$ の実部 u が $u(x, y) = \sin x \cosh y$ で与えられているとき, $f(z)$ を (z の関数として) 決定せよ.

(2) 複素関数 $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ によって, z 平面上の円 $C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ が w 平面にどのようにうつされるか. 変換前の図形と変換後の図形を図示せよ. (たとえば z を極形式で表して解く.)

双曲線関数の公式集

双曲線関数はべき級数として以下のように定義される：

$$\cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

次の関係式が成り立つ. (興味があれば, いくつか確かめるとよい.)

(1) $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad 1 - \tanh^2 z = \dfrac{1}{\cosh^2 z}$

(3) $\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z, \quad \tanh(-z) = -\tanh z$

(4) $\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \quad \sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$

(5) $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$

(6) $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z = 2\cosh^2 z - 1 = 2\sinh^2 z + 1$

(7) $\tanh(z + w) = \dfrac{\tanh z + \tanh w}{1 + \tanh z \tanh w}, \quad \tanh 2z = \dfrac{2 \tanh z}{1 + \tanh^2 z}$

(8) $\cosh^2 \dfrac{z}{2} = \dfrac{\cosh z + 1}{2}, \quad \sinh^2 \dfrac{z}{2} = \dfrac{\cosh z - 1}{2}$

(9) $\sinh 3z = 3 \sinh z + 4 \sinh^3 z, \quad \cosh 3z = -3 \cosh z + 4 \cosh^3 z$

(10) $\cosh iz = \cos z, \quad \sinh iz = i \sin z, \quad \tanh iz = i \tan z$

(11) $\dfrac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \dfrac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \quad \dfrac{d}{dz} \tanh z = \dfrac{1}{\cosh^2 z}$

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

春のボーナス問題 (提出期限は☆ 6 月 26 日 (火)17 時@教育研究支援室☆です！)

直交多項式

定義 1. F 上の線形空間 V が, さらに次の公理をみたすとき, V を内積空間という.

V の任意の二元 $\vec{x}, \vec{y}$ に対し, 内積と呼ばれる F の元 $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$ が定まり, 次の性質 (1)–(4) を持つ：

(1) $\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}_1|\vec{y}\rangle + \langle \vec{x}_2|\vec{y}\rangle \quad (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in V)$

(2) $\langle \vec{x}|\alpha\vec{y}\rangle = \alpha\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle \quad (\vec{x}, \vec{y} \in V,\ \alpha \in F)$

(3) $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = \overline{\langle \vec{y}|\vec{x}\rangle}$ $(\vec{x}, \vec{y} \in V$, $F = \mathbb{R}$ の場合, 複素共役は不要である.)

(4) $\langle \vec{x}|\vec{x}\rangle$ は常に 0 以上の実数であり, $\langle \vec{x}|\vec{x}\rangle = 0$ となるのは $\vec{x} = \vec{0}$ の場合に限る.

$\sqrt{\langle \vec{x}|\vec{x}\rangle}$ を $\vec{x}$ のノルムと呼び, $\|\vec{x}\|$ で表す.

内積の例

- $\mathbb{R}^n$ の標準的内積

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ に対し, $\langle \vec{a}|\vec{b}\rangle := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$

- $\mathbb{C}^n$ の標準的エルミート内積

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ に対し, $\langle \vec{a}|\vec{b}\rangle := \bar{a}_1b_1 + \bar{a}_2b_2 + \cdots + \bar{a}_nb_n.$

[注意] 内積の定義の性質 (2),(3) より, $\langle \alpha\vec{x}|\vec{y}\rangle = \bar{\alpha}\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$ が言えるので, ここでのエルミート内積の定義には左側の $\vec{a}$ の成分に複素共役が現れる. なお, (2) の定義が, $\langle \alpha\vec{x}|\vec{y}\rangle = \alpha\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$ で与えられている文献もあり, その場合は, 右側の $\vec{b}$ の成分に複素共役が現れる.

- 関数空間の標準的内積

$\mathbb{R}$ 上で定義される関数全体のなす線形空間 V の元 $f, g \in V$ に対し,
$\langle f|g\rangle := \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx.$

例題 1. 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $P_2(\mathbb{R})$ を考える. 単項式の列 ($P_2(\mathbb{R})$ の基底) $1, x, x^2$ にシュミットの直交化法を適用し, 内積 $\langle f|g\rangle := \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ に関する $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 $e_0(x), e_1(x), e_2(x)$ を 1 つ求めよ.

(このようにして得られる多項式を直交多項式という.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

【解答】 Dirac の記号を導入し，$|p_0\rangle := 1, |p_1\rangle := x, |p_2\rangle := x^2$ とおく．また求める正規直交基底を $|e_0\rangle := e_0(x), |e_1\rangle := e_1(x), |e_2\rangle := e_2(x)$ と書く．

$|e_0\rangle$ は $|p_0\rangle$ のノルムを 1 に規格化することで得られる：$|e_0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\langle p_0|p_0\rangle}} \cdot |p_0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{1}} \cdot 1.$

次に，$|p_1\rangle$ と $|e_0\rangle$ から $|e_1\rangle$ を構成する．2 つのベクトル $|p_0\rangle$ と $|p_1\rangle$ が生成する線形空間において，その正規直交基底 $|e_0\rangle, |e_1\rangle$ は以下の関係式を満たす：$|e_0\rangle\langle e_0| + |e_1\rangle\langle e_1| = 1 \cdots (*)$. ($|e_1\rangle\langle e_1|$ は $|e_1\rangle$ 方向への直交射影を表す線形写像.) $|p_1\rangle$ を $|e_1\rangle$ 方向に直交射影したベクトルを $|e_1{}'\rangle$ とすると，$|e_1{}'\rangle = |e_1\rangle\langle e_1|p_1\rangle \overset{(*)}{=} (1 - |e_0\rangle\langle e_0|)|p_1\rangle = |p_1\rangle - |e_0\rangle\langle e_0|p_1\rangle = x - \dfrac{1}{2}$. $|e_1\rangle$ は $|e_1{}'\rangle$ のノルムを 1 に規格化することで得られる：$|e_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\langle e_1{}'|e_1{}'\rangle}}|e_1{}'\rangle = \sqrt{3}(2x-1).$

最後に，$|p_2\rangle$ と $|e_0\rangle, |e_1\rangle$ から $|e_2\rangle$ を構成する．3 つのベクトル $|p_0\rangle, |p_1\rangle, |p_2\rangle$ が生成する線形空間において，その正規直交基底 $|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle$ は以下の関係式を満たす：$|e_0\rangle\langle e_0| + |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| = 1 \cdots (**)$. $|p_2\rangle$ を $|e_2\rangle$ 方向に直交射影したベクトルを $|e_2{}'\rangle$ とすると，$|e_2{}'\rangle = |e_2\rangle\langle e_2|p_2\rangle \overset{(**)}{=} (1 - |e_0\rangle\langle e_0| - |e_1\rangle\langle e_1|)|p_2\rangle = |p_2\rangle - |e_0\rangle\langle e_0|p_2\rangle - |e_1\rangle\langle e_1|p_2\rangle = x - \dfrac{1}{2}$. $|e_2\rangle$ は $|e_2{}'\rangle$ のノルムを 1 に規格化することで得られる：$|e_2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\langle e_2{}'|e_2{}'\rangle}}|e_2{}'\rangle = \sqrt{5}\left(6x^2 - 6x + 1\right)$. ([注意] ノルムの計算は必ず内積の定義に立ち戻って行なうこと！)

問題 10. **(ラゲールの多項式)** 区間 $[0, \infty)$ 上で定義された x の一変数多項式 $f(x), g(x)$ の内積を $\langle f|g\rangle := \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx$ で定める．

(1) 自然数 m, n に対して，$\langle x^m|x^n\rangle = (m+n)!$ を示せ．

(ヒント：たとえば，a を正の数として，$I(a) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}$ を考える．積分値を a の関数として求め，両辺を a で ($m+n$ 回) 微分して，$a = 1$ とする．この解法においては積分と微分の順序交換は気にしなくてよい.)

(2) 単項式の列 $1, x, x^2, x^3, \cdots$ にシュミットの直交化法を適用し，順次得られる多項式 $L_0(x), L_1(x), L_2(x), \cdots$ ($L_k(x)$ は x の k 次式．x^k の係数は正.) を $L_2(x)$ まで求めよ．($L_k(x)$ をラゲール (Laguerre) 多項式と呼ぶ.)

n 次方程式の一般解

n 次方程式の一般解の研究には長い歴史があり，現代数学の発展にも深く関係している．複素数係数の n 次方程式は一般に

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \\ &\quad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0) \end{aligned}$$

と表されるが，両辺を a_0 で割ることで最高次の係数を 1 にすることができ，また，$x \mapsto x - \dfrac{1}{n}\dfrac{a_1}{a_0}$ の置き換えで x^{n-1} の係数を 0 にすることができる．したがって以後

$$f(x) = x^n + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

の形のものを考えることにしよう．

問題 11. (3 次・4 次方程式の解法)

(1) 次の形の 3 次方程式を考える.

$$f(x) = x^3 + 3px + 4q = 0, \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

(a) 下準備として以下の恒等式を示せ. (ただし, ω は 1 の 3 乗根のうち虚部が正のものを表す.)

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma)$$

(b) 3 次式 $f(x)$ が以下のように因数分解できたと仮定する.

$$f(x) = (x + \beta + \gamma)(x + \omega\beta + \omega^2\gamma)(x + \omega^2\beta + \omega\gamma)$$

x の各べきの係数を比較することで, $\beta^3 + \gamma^3$ および $\beta\gamma$ を p, q を用いて表せ.

(c) β^3 と γ^3 はある 2 次方程式の解である. その 2 次方程式を書き下せ.
以上のようにして, 3 次方程式を解く問題が 2 次方程式を解く問題に帰着され, 2 次方程式の解の 3 乗根をとることで β, γ が求まり, $x = -\beta - \gamma, -\omega\beta - \omega^2\gamma, -\omega^2\beta - \omega\gamma$ として 3 次方程式の解が得られる.

(2) 次の形の 4 次方程式を考える.

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0, \quad (p, q, r \in \mathbb{C})$$

(a) 前問同様, $f(x)$ が以下のように因数分解できたと仮定して, α, β, γ と p, q, r の関係式を書き下せ.

$$f(x) = (x + \alpha + \beta + \gamma)(x + \alpha - \beta - \gamma)(x - \alpha + \beta - \gamma)(x - \alpha - \beta + \gamma)$$

(b) 3 次方程式の解と係数の関係を考察することで, $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ が ある 3 次方程式の解であることが分かる. その 3 次方程式を書き下せ.
こうして, 4 次方程式を解く問題が 3 次方程式を解く問題に帰着され, 前問の解法を利用して 4 次方程式の解が求まる.

[コメント] 他にもさまざまな解法が知られている. 興味がある人は自分でいろいろと調べてみるとよい. 例えば以下の本にいくつかの例が詳しく紹介されている：

- [永田・吉田] 永田雅宜, 吉田憲一「代数学入門」(培風館)

なお著者の永田さん (ごく最近お亡くなりになられました) は名大理学部数学科を卒業され, 不変式論, 可換環論の分野で著しい成果を挙げられた大数学者です. 永田さんのドキュメンタリーが以前インターネットで配信されています (私の演習のホームページからもリンクがあります)：

- サイエンスチャンネル 科学の殿堂 (4)
  「数学の巨人 永田雅宜 〜ひたむきに歩き続けた人生〜」