担当教員：浜中 真志 研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

# 線形写像 (基底, 像と核, 次元定理)

作成日：May 27, 2018 Updated：May 29, 2018 Version：1.0 実施日：May 29, 2018

## 一次独立と一次従属, 基底の表現行列

**定義 1.** $V$ を体 $K$ 上の線形空間, $\vec{0}$ を $V$ の零ベクトルとする. $V$ の $r$ 個の元 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ が一次独立であるとは, $c_1, \ldots, c_r \in K$ に対し

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_r\vec{v}_r = \vec{0} \quad \text{が成り立つのは} \quad c_1 = \cdots = c_r = 0 \quad \text{のときのみ}$$

であることをいう. $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ が一次独立でないとき一次従属であるという.

**定義 2.** 線形空間 $V$ の有限個の元の組 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ が次の 2 条件を満たすとき, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ を $V$ の基底という.

(1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ は一次独立である.

(2) $V$ の任意の元は $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ の一次結合として表される.

またこのとき $n$ を $V$ の次元とよぶ. 次元は基底の取り方によらない.
上の定義の 2 つの条件は, 次の条件と同値である：
($*$) $V$ の任意の元は $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ の一次結合として **一意的に** 表される.

**問題 1. (基底の判定：関数空間の場合)** 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $P_2(\mathbb{R}) := \{a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ を考える. このとき, 次の多項式（ベクトル）の組の中で, 基底と **ならない** ものをすべて選び, その理由をそれぞれ簡潔に述べよ.

(ア) $1,\ x^2$　　(イ) $1,\ x,\ x^2$　　(ウ) $1,\ x,\ (x+2)^2$

(エ) $1,\ \pi,\ (x+1)^2$　　(オ) $1,\ x-1,\ x+1,\ x^2$　　(カ) $x+3,\ x-3,\ x^2$

**定義 3.** $T$ を線形空間 $U$ から $V$ への線形写像とし, $U$ の基底 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ と $V$ の基底 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ を決めておく. $T(\vec{u}_1), \cdots, T(\vec{u}_n)$ は $V$ のベクトルであるから, $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ の一次結合で次のように書ける：

$$(T(\vec{u}_1), \cdots, T(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)A,$$

ただし $A$ は $m \times n$ 行列. このとき行列 $A$ を $U$ の基底 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$, $V$ の基底 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ に関する $T$ の表現行列であるという.
特に $U = V$ とし,

$$(T(\vec{u}_1), \cdots, T(\vec{u}_n)) = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)A,$$

が成り立つとき, $n \times n$ 行列 $A$ を基底 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ に関する表現行列という.

担当教員：浜中 真志 研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**例題 1.** 以下で定義される線形変換 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を考える: $T:(x,y,z) \mapsto (2x+4y+z, x-y)$.

(1) $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ に関する $T$ の表現行列 $A$ を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底として, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる. このとき以下を満たす基底変換の表現行列 $P$ を求めよ：$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)P$.

(3) $\mathbb{R}^2$ の基底として, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとる. このとき以下を満たす基底変換の表現行列 $Q$ を求めよ：$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')Q$.

(4) 基底 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, 基底 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ に関する $T$ の表現行列 $B$ を求めよ.

**【解答】**

(1) $T(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1{}' + 3\vec{e}_2{}'$, $T(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1{}' - \vec{e}_2{}'$ $T(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1{}'$ より, $(T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), T(\vec{e}_3)) = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. よって求める表現行列は, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ より, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

よって $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\vec{v}_1 = \vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}'$, $\vec{v}_2 = 2\vec{e}_2{}' + 3\vec{e}_3{}'$ より, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. よって求める行列は, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(4) $(T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), T(\vec{u}_3)) = (T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), T(\vec{e}_3))P = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')AP = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')QQ^{-1}AP = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)Q^{-1}AP$. よって求める表現行列は, $B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

**問題 2. (基底の表現行列：関数空間の場合)** 2 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間 $P_2(\mathbb{R}) := \{a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ を考える. 次式で定義される $P_2(\mathbb{R})$ の線形変換 $T$ の, 基底 $1, x, x^2$ に関する表現行列 $A$ を求めよ.

(1) $T(f(x)) = (x+1)\dfrac{d}{dx}(f(x))$  (2) $T(f(x)) = e^x\dfrac{d}{dx}(e^{-x}f(x))$

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

## 像と核, 次元定理

**問題 3. (線形写像の単射条件)** $U, V$ を体 $K$ 上の線形空間として, $T : U \to V$ を線形写像とする．このとき次の命題を証明せよ：$T$ が単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\ T = \{\vec{0}\}$

**例題 2.**
行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ で表される線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について以下の問いに答えよ．(解説は黒板にて)

(1) $A$ の逆行列があれば求め, なければ階数を求めよ．

(2) 像 $\mathrm{Im}\ T_A$ を求めよ．(方程式を用いた表現および基底を用いた表現を両方書け.)

(3) 核 $\mathrm{Ker}\ T_A$ を求めよ．(方程式および基底を用いた表現を両方書け.)

(4) $T_A$ は全射か？また, $T_A$ は単射か？(答えのみでよい)

(5) $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ．

**問題 4. (像と核)** $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-z \\ 2x \\ 3x+y+z \end{pmatrix}$ により定まる線形写像 $T_A :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ について以下の問いに答えよ．

(1) 像 $\mathrm{Im}\ T_A$ を求めよ．(方程式を用いた表現および基底を用いた表現を両方書け.)

(2) 核 $\mathrm{Ker}\ T_A$ を求めよ．(方程式を用いた表現および基底を用いた表現を両方書け.)

(3) 次元定理を, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathrm{Im}\ T_A$, $\mathrm{Ker}\ T_A$ などの言葉で書き表せ．

**問題 5. (線形写像の全射・単射条件)** $U, V$ を体 $K$ 上の線形空間として, $T : U \to V$ を線形写像とする．また, ベクトルの組 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m$ を $U$ の基底とする．このとき次の命題を証明せよ．

(1) $T$ が単射 $\Leftrightarrow$ $T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), \cdots, T(\vec{u}_m)$ が 1 次独立

(2) $T$ が全射 $\Leftrightarrow$ $V = \langle T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), \cdots, T(\vec{u}_m)\rangle$

(3) $T$ が単射のとき, および全射のとき, 線形空間の次元 $m = \dim U$ と $n = \dim V$ に対して成り立つ条件をそれぞれ求めよ．

## 正規直交基底とシュミットの直交化法

**問題 6. (シュミットの直交化法)** $\mathbb{R}^3$ を標準的内積 $\langle\ |\ \rangle$ を持つベクトル空間とする．

(1) シュミットの直交化法を用いて, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ から, 正規直交基底 $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ を 1 つ作れ．

(2) ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を, 前問で得られた正規直交基底 $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ の線形結合で表せ．

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

**今週の宿題 (提出期限は 6 月 5 日 (火) 演習開始時です)**

**問題 7. (像と核)** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ で表される線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について以下の問いに答えよ.

(1) 像 $\mathrm{Im}\, T_A$ を求めよ. (方程式を用いた表現および基底を用いた表現を両方書け.)

(2) 核 $\mathrm{Ker}\, T_A$ を求めよ. (方程式を用いた表現および基底を用いた表現を両方書け.)

(3) $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

**問題 8. (シュミットの直交化法)** $\mathbb{R}^4$ を標準的内積 $\langle\ |\ \rangle$ を持つベクトル空間とする.

(1) シュミットの直交化法を用いて, $\mathbb{R}^4$ において, $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ から生成される部分空間 $W$ の正規直交基底 $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ を求めよ. ($\mathbb{R}^3$ ではないのでベクトルの外積は使えないことに注意.)

(2) $W$ の元 $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を, 前問で得られた正規直交基底 $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ の線形結合で表せ.

**参考：内積空間**

**定義 4.** $K$ 上の線形空間 $V$ が, さらに次の公理をみたすとき, $V$ を内積空間という.

$V$ の任意の二元 $\vec{x},\ \vec{y}$ に対し, 内積と呼ばれる $K$ の元 $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ が定まり, 次の性質 (1)–(4) を持つ：

(1) $\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle \quad (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in V)$

(2) $\langle \vec{x} | \alpha \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \quad (\vec{x}, \vec{y} \in V,\ \alpha \in K)$

(3) $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle} \quad (\vec{x}, \vec{y} \in V,\ K = \mathbb{R}$ の場合, 複素共役は不要である.)

(4) $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$ は常に 0 以上の実数であり, $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ となるのは $\vec{x} = \vec{0}$ の場合に限る.

$\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ を $\vec{x}$ のノルムと呼び, $\|\vec{x}\|$ で表す.

**定義 5.** $V$ の基底 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ が正規直交基底であるとは,

$$\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つときをいう $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタと呼ばれる.