担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

集合と写像

作成日：May 18, 2018 Updated：May 20, 2018 Version：1.0 実施日：May 22, 2018

集合の基礎

定義 1. ものの集まりを 集合 という. 集合を構成する各要素を集合の 元 という.

A を集合とする. x が A の元であることを, $x \in A$ で表し, x は A に属するという. また, x が A の元でないことを, $x \notin A$ で表す.

集合を定義する方法として, A の要素を一つ一つあげる方法

$$A = \{a, b, c, \cdots\} \qquad \text{(外延的な定義)}$$

と, x が A の元になるための必要十分条件を書き下す方法

$$A = \{x \mid x \text{ はかくかくしかじかの性質をみたす}\} \qquad \text{(内包的な定義)}$$

がある.

例題 1. 以下の, 内包的な方法で定義された集合を外延的な方法で書き下せ.

(1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^3 = -1\}$　(2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{C}, x^3 = -1\}$

【解答】

(1) $x^3 = -1$ となる実数は $x = -1$ だけである. したがって, $A = \{-1\}$ である.

(2) $x^3 = -1$ となる複素数は $x = -1, \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ である.
したがって, $A = \left\{-1, \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$ である.

問題 1. (ウォーミングアップ) 以下の, 内包的な方法で定義された集合を外延的な方法で書き下せ.

(1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^3 - x = 0\}$　(2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 = 0\}$

補足 1. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^3 - x = 0\}$ は, よりシンプルに $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$ などと書き表されることが多い. (以後このように書くことにする.)

問題 2. (べき集合) 集合 X のすべての部分集合の全体を X のべき集合といい, 2^X で表す.

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ のとき, X のべき集合 2^X は何か？

(2) $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき, X のべき集合の元の個数 $|2^X|$ はいくつか？(とりあえず答えのみでよい.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

部分集合, 和集合, 共通部分

定義 2. 以下 A, B を集合とする.

(1) 任意の $x \in A$ に対して, $x \in B$ が成り立つとき, A は B の部分集合であると言い, $A \subset B$ と記述する.

(2) $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき（すなわち, 両方が成り立つとき）, $A = B$ と記述する.

(3) A が B の部分集合でないとき, $A \not\subset B$ と記述する. $x \in A$ でかつ $x \notin B$ となる元が 1 つでも存在すれば, $A \not\subset B$ が成り立つ.

定義 3. 以下 A, B を集合とする.

(1) A と B の和 $A \cup B$ を $\{x | x \in A$ または $x \in B\}$ と定義する.

(2) A と B の共通部分 $A \cap B$ を $\{x | x \in A$ かつ $x \in B\}$ と定義する.

(3) A と B の差集合 $A \setminus B$ を $\{x | x \in A$ かつ $x \notin B\}$ と定義する.

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ はいずれも集合である. 特に $B \subset A$ のとき, $A \setminus B$ を A に対する B の補集合と呼び, B^c と記述する.

定義 4. 1 つも元を含まない集合を「空集合」と呼び, $\emptyset$ と書く. 例えば, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ とおくと, $A \cap B = \emptyset$ である.

例題 2. A, B, C を集合とする. このとき以下の等式を証明せよ.

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

【解答】集合の等号 $(=)$ の定義より, $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ かつ $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$ を示せばよい. まず最初に $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ を示す. このためには, 任意の $x \in A \cap (B \setminus C)$ に対して, $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ が成り立つことを証明すればよい. まず $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ を示す. 任意の $x \in A \cap (B \setminus C)$ を考える. 共通部分の定義より, $x \in A$ かつ $x \in (B \setminus C)$ が成り立つ. 差集合の定義より, さらに $x \in B$ かつ $x \notin C$ であることが導かれる. $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つので, 共通部分の定義より, $x \in A \cap B$ が導かれる. また $x \notin C$ より, $x \notin A \cap C$ が導かれる. したがって, 差集合の定義より, $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ が成り立つ. 任意の $x \in A \cap (B \setminus C)$ に対して, $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ が成り立つことが示されたので, $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ が成り立つ.

等号を言うためには, 逆の包含関係を示せばよい. 次に $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$ を示す. 任意の $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ を考える. 差集合の定義より, $x \in A \cap B$ かつ $x \notin (A \cap C)$ が導かれる. 共通部分の定義から, $x \in A$ かつ $x \in B$ が導かれる. また $x \in A$ かつ $x \notin (A \cap C)$ であることから, $x \notin C$ が導かれる. $x \in B$ かつ $x \notin C$ が成り立つので, 差集合の定義から $x \in (B \setminus C)$. したがって, $x \in A \cap (B \setminus C)$ が導かれた. x は任意であったので, $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$ が示された.

$A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ かつ $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$ が成り立つことが示されたので, $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ である.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

補足 2. 集合の等号を示すために, どのような論理的ステップが必要かを明らかにするために, 上の解答ではステップをできるだけ書き下した. このような厳密な解答を作る能力は常に持っておく必要がある. 慣れてきたら, 答案を書くとき, 不必要と思われるステップを省いてもよい. また, 簡単に

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \in (B \setminus C) && \cap \text{ の定義} \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \notin C && \setminus \text{ の定義} \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ かつ } x \notin A \cap C && \cap \text{ の定義} \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) && \setminus \text{ の定義}
\end{aligned}
$$

などと書いてもよい. ただ, 本当に各ステップが $\Leftrightarrow$ かどうかは確かめよ.

問題 3. (集合の等式) A, B, C を集合とする. 次の等式を証明せよ.

(1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.　(2) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.　(4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

補足 3. ちょっとでも混乱しそうなときは必ず 絵 (ベン図) を描こう！

写像

定義 5. 集合 X, Y を考える. 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) \in Y$ をただ 1 つ定める法則 f を「X から Y への写像」と呼び, $f : X \to Y$ などと記述する. このとき, X を f の定義域, Y を f の値域と呼ぶ.

補足 4. 写像 $f : X \to Y$ は, 定義域 X, 値域 Y, 対応 f の 3 つを 1 組として考える. 同じ対応を持つ場合でも, 定義域や値域が変われば, 写像の性質が変わることがある.

定義 6. 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする.

(1) X の部分集合 $A \subset X$ に対して, f による A の像 $f(A)$ を,

$$f(A) = \{y \in Y |\ \text{ある } x \in A \text{ が存在して } f(x) = y\}$$

と定義する. 定義から, $f(A)$ は Y の部分集合である.

(2) Y の部分集合 $B \subset Y$ に対して, f による B の逆像（あるいは原像）$f^{-1}(B)$ を,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

と定義する. 定義から, $f^{-1}(B)$ は X の部分集合である.

補足 5. $f(A)$, $f^{-1}(B)$ は両方とも集合であることに注意せよ. $y \in Y$ のとき, 簡単のため $f^{-1}(\{y\})$ を $f^{-1}(y)$ と記述することがあるが, 混乱を招く恐れがあるので, この演習では $f^{-1}(\{y\})$ と書くことにする.

担当教員：浜中 真志 研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

例題 3. $f: X \to Y$ を写像として, A_1, A_2 は X の部分集合, B_1, B_2 は Y の部分集合とする. このとき, 以下が成り立つことを証明せよ.

(1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$. (2) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

【解答】

(1) $A_1 \subset A_2$ を仮定して, $f(A_1) \subset f(A_2)$ が成り立つことを示したい. 定義より, 任意の $y \in f(A_1)$ に対して, $y \in f(A_2)$ が成り立つことを示せばよい. 任意の $y \in f(A_1)$ を考える. $f(A_1)$ の定義より, ある $x \in A_1$ が存在して, $f(x) = y$ が成り立つ. $A_1 \subset A_2$ という仮定より, $x \in A_2$. $f(x) = y$ となる $x \in A_2$ が存在するので, $y \in f(A_2)$. 任意の $y \in f(A_1)$ に対して, $y \in f(A_2)$ が成り立つことを示せたので, $f(A_1) \subset f(A_2)$ が成り立つ.

この証明も以下のように簡単にまとめてもよい：任意の $y \in f(A_1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
y \in f(A_1) &\Rightarrow \text{ある } x \in A_1 \text{ が存在して } f(x) = y && f(A_1) \text{ の定義.} \\
&\Rightarrow \text{ある } x \in A_2 \text{ が存在して } f(x) = y && \text{仮定 } A_1 \subset A_2 \text{ から.} \\
&\Rightarrow y \in f(A_2) && f(A_2) \text{ の定義.}
\end{aligned}
$$

したがって, $f(A_1) \subset f(A_2)$ が成り立つ.

(2) 任意の $x \in f^{-1}(B_1)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1) &\Rightarrow f(x) \in B_1 && f^{-1}(B_1) \text{ の定義.} \\
&\Rightarrow f(x) \in B_2 && \text{仮定 } B_1 \subset B_2 \text{ から.} \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2) && f^{-1}(B_2) \text{ の定義.}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. したがって, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ が導かれる.

問題 4. (像, 逆像) $f: X \to Y$ を写像として, A, B は Y の部分集合とする. このとき, 以下が成り立つことを証明せよ.

(1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. (2) $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

写像の性質

定義 7. 写像 $f: X \to Y$ が与えられているとする.

(1) 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して,「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」が成り立つとき, f は単射であるという.（「」の中の条件については, その対偶「$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$」を用いる方が多い.）

(2) 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となるとき, f は全射であるという.

(3) f が全射かつ単射であるとき, f は全単射（あるいは 1 対 1 ）であるという.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

問題 5. (ウォーミングアップ)　3 つの元からなる集合 $A = \{a, b, c\}$ と 4 つの元からなる集合 $B = \{x, y, z, u\}$ を考える.

(1) A から B への写像で, 単射でない例と単射な例を構成し図示せよ.

(2) B から A への写像で, 全射でない例と全射な例を構成し図示せよ.

問題 6. (有限集合間の写像の個数)　集合 A, B の元の個数がそれぞれ m, n のとき, 以下の問いに答えよ.

(1) A から B への写像の個数 M.

(2) A から B への単射の個数 I.

(3) A から B への全単射の個数 b.

問題 7. (全射・単射の判定)　次の写像は単射かどうかを判定せよ. また, 全射かどうかを判定せよ. (答えのみでよい)

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(2) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. ただし，$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

(3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x + a & (x > 0) \end{cases}$ （実数 $a \in \mathbb{R}$ について場合分けせよ）.

このように, 単射性や全射性は, 対応 f だけでなく定義域や値域にも依存することに注意.

問題 8. (合成写像と全射・単射)　X, Y, Z を集合として, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. また, $g \circ f : X \to Z$ を f と g の合成写像とする. 以下の命題を証明せよ.

(1) $g \circ f$ が単射ならば, f も単射.　　(2) $g \circ f$ が全射ならば, g も全射.

問題 9. (全単射)　X, Y を集合として, 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を写像とする. $g \circ f$, $f \circ g$ がそれぞれ X, Y の恒等写像となるとき, f, g はともに全単射であることを証明せよ. (f について示せば十分.)

今週の宿題 (提出期限は 5 月 29 日（火）演習開始時です)

問題 10.

(1) $X = \{5, 29\}$ のとき, X のべき集合 2^X は何か？

(2) A, B, C を集合とする. 次の等式を証明せよ.

(i) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$　　(ii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

問題 11.

(1) $f : X \to Y$ を写像として, A, B は X の部分集合とする. このとき, 以下が成り立つことを証明せよ.

(i) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$　　(ii) $A \subset f^{-1}(f(A))$

(2) X, Y, Z を集合として, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. また, $g \circ f : X \to Z$ を f と g の合成写像とする. 以下の命題を証明せよ.

(i) f, g が単射ならば, $g \circ f$ も単射.　　(ii) f, g が全射ならば, $g \circ f$ も全射.

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

小テスト１配点・解答案内

問題 1 (25 点＝ 4 点＋ 7 点× 3) 詳しくは H002 のプリント参照

(1) 逆行列を持たない. A の階数は 2.

(2) 像の方程式は $3x-2y+z=0$. (平面)

(3) 原像の方程式は $x=y=z$. (直線)

(4) 像の方程式は $x=y=-z$. (直線)

H002 の問題 5(4) のように解いてもいいし, 平面 π をパラメータ表示して像を追いかけてもよい. 平面 π が原点の原像を含んでいることに注意.

問題 2 (25 点＝ 4 点× 3 ＋ 6 点＋ 7 点) 詳しくは H001 のプリント参照

(1) (ア)　(2) $\alpha=0,1,\omega,\omega^2$　(3) 軌跡は実軸　(4) $r=2/3, X=-(1/3)\omega$　(5) $f(D)$ は原点と点 ω を通る直線で分けられる領域のうち ω^2 っを含む方 (直線上の点は含まない.)

問題 3 (24 点＝ 4 点＋ 7 点＋ 13 点) 詳しい解答は H003 のプリント参照

問題 4 (26 点＝ 4 点× 3 ＋ 7 点× 2)
(1) (i) 2　(ii) $\sqrt{15}$　(2) $x^x(\log x+1)$　(3), (4) の詳しい解答は H004 のプリント参照

[**講評**] まず全体的には, よく勉強したあとが伺えて，数理学科進学最初の試験としては悪くない結果だったといえます. ただ, 問題 3, 4 のイプシロン論法の記述が不正確な答案もありました. 各小問ごとに，論理展開が不明なものは半分ぐらい減点する対象になっています. 点数が引かれてなくても, 赤字のコメントがあるところは読んで納得してください. (納得できないところは遠慮なく質問・反論してください.)

試験の目的というのは, 学生さんを蹴落とすものでも, 品定めをするものでもありません. 本来は自分が本当に理解しているかどうかを自分自身で確認しなければいけないところを，試験という客観的なチェックを受けることで，自分自身見落としなどがなかったかどうか再確認できるよう，手助けする機会だと思ってます.

ですので, 解けなかった問題，まだ不安残る問題については

今晩必ずもう一度解いてみてください

これまでのプリント・ノートと照らし合わせて，その解答で本当に大丈夫かどうか，何か間違ってないかどうか自分自身でじっくり時間をかけて再確認してみてください．どこがどう間違っているか自分自身で納得でき，問題を見た瞬間にすらすら解答の全体像が思い描けるようになれば「元は取れた」といえましょう.