担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

関数の連続性 ($\varepsilon - \delta$ 論法), 1 変数関数の復習

作成日：May 5, 2018　Updated：May 6, 2018　実施日：May 8, 2018

ウォーミング・アップ

問題 1. (先週の復習から：$\varepsilon - N$ 論法)

(1) ($\varepsilon - N$ 論法による) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束することの定義を何も見ないで書き下せるか (各自で) 確認せよ.

(2) $a_n := \dfrac{1}{n^2+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて (すらすら) 証明せよ.

関数の連続性 ($\varepsilon - \delta$ 論法)

定義 1. (1 変数関数の連続性) 任意の正の数 ε に対して, ある正の数 δ が存在して, 以下の条件 $(**)$ が満たされるとき, 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は点 $a\in\mathbb{R}$ において連続であるという.

$(**)$　　$|x-a|<\delta$ を満たすならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ.

例題 1. $x>0$ とする.

(1) $|x-1|<\delta$ なら必ず $\left|\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}\right|<0.01$ となるような δ を一つ定めよ.

(2) 任意の正の数 ε が与えられたとき, $|x-1|<\delta$ なら必ず $\left|\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ となるような δ を ε を用いて一つ定めよ.

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ は $x=1$ において連続か？

【解答】 解説は黒板でやります

問題 2. ($\varepsilon - \delta$ 論法 1) $0<x<2$ とする.

(1) 任意の正の数 ε が与えられたとき, $|x-1|<\delta$ なら必ず $\left|\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ となるような δ を ε を用いて一つ定めよ.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ は $x=1$ において連続か？

問題 3. ($\varepsilon - \delta$ 論法 2) 関数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が点 a において連続ならば, 関数 $f+g: x\mapsto f(x)+g(x)$ も点 a において連続であることを示せ. (cf. H003 例題 2)

担当教員：浜中 真志 研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

1 変数関数の性質 (ほぼ復習)

問題 4. (リフレッシュ問題：1 変数関数の微分) 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $\tan x$ (2) $\arctan x$ (3) $\log(1-x)$

(4) $\log\log x$ (5) a^x $(a>0)$ (6) x^x

[**ロピタルの定理**] $f(x), g(x)$ は点 a の近くで定義されていて, 微分可能とする. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ で, $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在し

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

この定理は $a=\pm\infty$ のときも, 片側極限や $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形のときにも同様に成り立つ.

[**有限テーラー展開**] 関数 $f(x)$ が開区間 I において n 回微分可能とする. I の点 a を固定すると, 各 $x\in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する. この右辺を, $x=a$ における有限テーラー展開という. 特に $a=0$ のとき, 有限テーラー展開は有限マクローリン展開とも呼ばれる:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

問題 5. (1 変数関数の極限) 次の関数の極限を求めよ. (ただし $a,b,c>0$.) 必要ならばロピタルの定理を用いてよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8}{2x^3+x+2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$

問題 6. (テーラー展開の一意性) 次の関数 $f(x)$ の, 与えられた点のまわりでのテーラー展開を求めよ. (x の 5 次まででよい.)

(1) x^3 $(x=1)$ (2) $\dfrac{1}{1-x}$ $(x=0)$ (3) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2$ $(x=0)$ (4) $\log(1-x)$ $(x=0)$

問題 7. (1 変数関数の極限) 次の極限をテーラー展開を用いて求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}x^2-\log(1+x)}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x\arctan x}$

今週の宿題 (提出期限は☆ 5 月 22 日 (火) ☆演習開始時です)

問題 8. (関数の連続性)

(1) $x>0$ とする. 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は $x=4$ において連続であることを示せ.

(2) 関数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が点 a において連続ならば, 関数 $5f+22g : x\mapsto 5f(x)+22g(x)$ も点 a において連続であることを示せ.

問題 9. (e^x **のテーラー展開と応用**)

e が無理数であることを背理法により証明したい．e が有理数だと仮定すると，互いに素な (正の) 整数 m, n を用いて，$e = \dfrac{m}{n}$ と書ける．一方，$f(x) := e^x$ の $x = 0$ における n 次までのテーラー展開は以下のようになる:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

(1) 剰余項 $R_{n+1}(x)$ を，ある定数 θ $(0 < \theta < 1)$ を用いて表せ．

(2) 上のテーラー展開において $x = 1$ を代入したものを考える:

$$f(1) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1).$$

$n!R_{n+1}(1)$ は正の整数であることを示せ．

(3) $e < 3$ を用いて $n!R_{n+1}(1)$ の上限を評価し，$1 \leq n!R_{n+1}(1)$ と合わせて可能な n の範囲を求めよ．またこれと $2 < e < 3$ を見比べ，矛盾を導け．

ボーナス問題 (提出期限は☆ 5 月 22 日 (火) ☆演習開始時です)

問題 10. (π **の無理数性**) 問題 9 でネピアの数 e が無理数であることを証明した．ここでは，円周率 π が無理数であることを証明しよう．天下りであるが，自然数 n に対し

$$f_n(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} a_k x^k$$

という実関数を定義する．a_k はもちろん整数である．

(1) $f_n^{(l)}(0)$ を，l, n, a_l で表し，すべての l, n に対してそれが整数であることを確かめよ．$f_n(1-x) = f_n(x)$ より $f_n^{(l)}(1)$ も整数である．

(2) π^2 が無理数であることを背理法で証明するため $\pi^2 = q/p$ となる互いに素な自然数 p, q が存在するものと仮定する．

$$\begin{aligned} G(x) &:= p^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x) \\ &= p^n \left\{ \pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right\} \end{aligned}$$

に対して，次式を示せ．

$$\frac{d}{dx}\{G'(x)\sin\pi x - \pi G(x)\cos\pi x\} = \pi^2 q^n f_n(x)\sin\pi x$$

この両辺を $[0, 1]$ で積分することで以下の結果が得られる．

$$I := \pi\int_0^1 q^n f_n(x)\sin\pi x\, dx = G(0) + G(1) \quad \in \mathbb{Z}$$

(3) 一方，$0 < x < 1$ における $f_n(x)$ の上限・下限を評価し，$0 < I < \dfrac{\pi q^n}{n!}$ を示せ．

これより，十分大きな n に対して $\dfrac{\pi q^n}{n!} < 1$ であるが，定積分 I の整数性と矛盾する．よって π^2 は無理数であること，すなわち π は無理数であることが示された．