担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

数列の収束 ($\varepsilon - N$ 論法, 1年の復習)

作成日：April 25, 2018　Updated：May 1, 2018　実施日：May 1, 2018

ウォーミング・アップ ($\varepsilon - N$ 論法を用いなくてよい)

問題 1. (数列の極限)　次の数列の $n \to \infty$ 極限を求めよ.

(1) $(0.99)^n$　(2) $\dfrac{20n^2+18}{5n^2+n}$　(3) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$　(4) $n(5^{\frac{1}{n}}-1)$

問題 2. (数列の極限)　漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$, $a_1 = 1$ で定義される数列の極限を求めよ.

数列の収束・極限 ($\varepsilon - N$ 論法)

定義 1. (数列の収束) $\{a_n\}$ は数列, α は実数とする. 任意の正の実数 ε に対して, 自然数 N で次の条件 $(*)$ を満たすものが存在するならば, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く.

$(*)$　　$n \geq N$ を満たすならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

以下の問いではアルキメデスの原理を用いてよい.

[アルキメデスの原理] 任意の正の実数 a, b に対して, $na > b$ を満たす自然数 n が存在する.

[ガウスの記号] 任意の実数 a に対して, $n \leq a < n+1$ を満たす整数 n がただ一つ存在する. この整数 n をガウスの記号 $[a]$ で表す. (すなわち $[a] = n$.)

例題 1. $a_n := \dfrac{1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明したい.

(1) $n \geq N$ なら必ず $\dfrac{1}{n+1} < 0.01$ となるような N を一つ定めよ.

(2) $n \geq N$ なら必ず $\dfrac{1}{n+1} < 0.0001$ となるような N を一つ定めよ.

(3) 正の数 ε が与えられたとき, $n \geq N$ なら必ず $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ となるような N を ε を用いて表せ.

(4) ε が小さいほど, N は大きくなることを確かめよ.

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

【解答】

(1) たとえば $N = 100$ とすればよい. 実際このとき,

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{100} = 0.01.$$

担当教員：浜中 真志　研究室：A327　E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

(2) たとえば $N = 10000$ とすればよい．実際このとき，

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{10000} = 0.0001.$$

(3) たとえば $N = [1/\varepsilon] + 1$ とすればよい．ただし，$[x]$ はガウス記号で，x がある自然数 n に対して $n \leq x < n+1 (n \in \mathbb{Z})$ を満たす数のとき，$[x] = n$．(すなわち，$[x]$ は x の「整数部分」．) 実際このとき，($1/\varepsilon < [1/\varepsilon] + 1$ に注意して)

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\varepsilon]+1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

[別解] アルキメデスの原理より，2 つの正の数 $1, \varepsilon$ に対して，$N\varepsilon > 1$ を満たす自然数 N が存在する．この N を求める答えとしてもよい．実際このとき，

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(4) 前問 (3) より明らか．

(5) 正の数 ε が任意に与えられたとする．このとき，$N = [1/\varepsilon] + 1$ として自然数 N を定めると，

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{1+[1/\varepsilon]} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が示された．

[別解] 正の数 ε が任意に与えられたとする．このとき，アルキメデスの原理より，2 つの正の数 $1, \varepsilon$ に対して，$N\varepsilon > 1$ を満たす自然数 N が存在する．このとき，

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が示された．

問題 3. ($\varepsilon - N$ 論法 1) $a_n := \dfrac{n}{n^2+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明したい．

(1) $n \geq N$ なら必ず $\dfrac{n}{n^2+1} < 0.01$ となるような N を一つ定めよ．

(2) $n \geq N$ なら必ず $\dfrac{n}{n^2+1} < 0.0001$ となるような N を一つ定めよ．

(3) 正の数 ε が与えられたとき，$n \geq N$ なら必ず $\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon$ となるような N を ε を用いて表せ．

(4) ε が小さいほど，N は大きくなることを確かめよ．

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ．

問題 4. ($\varepsilon - N$ 論法 2) $a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が $1/2$ に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明したい．

(1) $n \geq N$ なら必ず $\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \dfrac{1}{2}\right| < 0.01$ となるような N を一つ定めよ．

(2) $n \geq N$ ならば必ず $\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\dfrac{1}{2}\right| < 0.0001$ となるような N を一つ定めよ.

(3) 正の数 ε が与えられたとき, $n \geq N$ ならば必ず $\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ となるような N を ε を用いて表せ.

(4) ε が小さいほど, N は大きくなることを確かめよ.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ となることを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

問題 5. ($\varepsilon - N$ 論法 3) $a_n := \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明したい.

(1) $n \geq N$ ならば必ず $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 0.01$ となるような N を一つ定めよ.

(2) $n \geq N$ ならば必ず $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 0.0001$ となるような N を一つ定めよ.

(3) 正の数 ε が与えられたとき, $n \geq N$ ならば必ず $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \varepsilon$ となるような N を ε を用いて表せ.

(4) ε が小さいほど, N は大きくなることを確かめよ.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となることを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

例題 2. 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β はともに有限値) を満たすとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が成り立つことを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

【解答】 正の数 ε が任意に与えられたとする.

数列 $\{a_n\}$ が, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を満たすという条件より, 正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある自然数 N_1 が存在して, 以下が成り立つ.

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同様に数列 $\{b_n\}$ が, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ を満たすという条件より, 正の数 $\varepsilon/2$ に対して, ある自然数 N_2 が存在して, 以下が成り立つ.

$$n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき, $c_n := a_n + b_n$ とし, 自然数 N を $N = \max\{N_1, N_2\}$ ととると,

$$n \geq N \Rightarrow |c_n - (\alpha+\beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

以上により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha + \beta$ が示された.

問題 6. ($\varepsilon - N$ 論法 4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (有限値) のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ となることを $\varepsilon - N$ 論法で証明しよう.

(1) $b_n := a_n - \alpha$ とおくと, 証明すべきことは,「$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0$」に帰着されることを示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ という条件は $\varepsilon - N$ 論法の言葉で書き表すと,「任意の正の数 ε' に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N \Rightarrow |b_n| < \varepsilon'$」となる.

この条件をそのまま用いて, $c_n := \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$ の大きさを評価しよう. n は十分大きいとすると, $|c_n|$ は, (三角不等式を用いて) (i) $n \leq N-1$ の部分と (ii) $n \geq N$ の部分に分けられる.

(ii) の部分が $\left(1 - \dfrac{N-1}{n}\right)\varepsilon'$ よりも小さいことを示せ.

(3) アルキメデスの原理を用いて, (i) の部分が (n がある自然数 M 以上であれば) ε' より小さくなることを示せ.

(4) 以上のことをまとめて, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ であることを示せ.

(5) (この結果の応用 1) $d_n > 0$ とする. このとき $\lim_{n\to\infty} d_n = \beta$ (有限値) ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_1 d_2 \cdots d_n} = \beta$ であることを示せ.

(6) (この結果の応用 2) $e_n > 0$ とする. このとき $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \beta$ (有限値) ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e_n} = \beta$ であることを示せ.

今週の宿題 (提出期限は 5 月 8 日 (火) 演習開始時です)

問題 7. (Fibonacci 数列と黄金比)

(1) 漸化式 $b_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$, $b_1 = 1$ で定義される数列の極限を求めよ. (cf. 問題 2 別解)

(2) フィボナッチ数列は, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$, で定義される. このとき極限値 $\phi := \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ. (極限値 $\phi = 1.618\cdots$ は黄金比と呼ばれる.)

問題 8. ($\varepsilon - N$ 論法：いつもの 2 倍の配点とします)

答案の書き方も採点の重要なポイントになりますので, (多少くどくなってもいいので) 論理的にきっちり書いてください. 特に何が前提条件で, それをどのように用いて結論が導かれたのか明確に書きましょう.

(1) $a_n := \dfrac{18}{5+n}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β はともに有限値) を満たすとき, $\lim_{n\to\infty} (5a_n + 8b_n) = 5\alpha + 8\beta$ が成り立つことを $\varepsilon - N$ 論法を用いて証明せよ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を満たすとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0$ となることを $\varepsilon - N$ 論法で証明せよ. (問題 6 の復習問題ですが問題 6 は「まわりくどい」誘導をしています. できれば例題 2 のように一番最初に正の数 ε を与えて**条件は途中で使い**, ε を一種類だけ用いた (ε' との関係を議論しない) 答案を心がけてみてください.)

担当教員：浜中 真志　研究室：A327 E-mail:hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

ボーナス問題 (提出期限は 5 月 8 日 (火) 演習開始時です)

問題 9. (Wallis の公式とその応用) $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $J_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geq 2)$ を示し，J_0, J_1 の値を求めることで一般項 J_{2n}, J_{2n+1} を求めよ．

(2) 前問の結果より, 以下が成り立つことが分かる：

$$\frac{\pi}{2}\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

$0 < J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1} < 1$ を示し，$\lim_{n\to\infty}\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}} = 1$ を示せ．(注: $\frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$.)

以上により, 以下の公式が導かれた．(ただし $\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.)

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right).$$

これをウォリス (Wallis) の公式という．(円周率 π の無限積表示の一つ.)

(3) ウォリスの公式にはさまざまな応用がある．まず, $J_{2n+1}J_{2n}$ を簡潔に表し, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}J_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ．(ヒント：$\sqrt{n}J_{2n+1}\sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$ を簡潔に表し, (2) の結果とあわせる.)

(4) $J_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示し，$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\ {}_{2n}C_n}$ を示せ．(これは 2 項係数 ${}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ の $n \to \infty$ の漸近形が $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ であることを示している.)

(5) 以上の結果を用いてガウス積分 $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めてみよう．

(ア) 変数変換 $t = \cos x$ を行うことで，$J_{2n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ を示せ．

(イ) 変数変換 $t = \cot x := 1/\tan x$ を行うことで，$J_{2n-2} = \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ を示せ．

(ウ) 変数変換 $x = \sqrt{n}t$ を行うと，$I = \sqrt{n}\int_0^{\infty} e^{-nt^2}dt$ である．また，$-1 \leq x \leq 1$ に対して $1 - x^2 < e^{-x^2}$, すべての実数 x に対して $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$ が成り立つ．(以上は既知としてよい.)

このとき，$\sqrt{n}J_{2n+1} < I < \sqrt{n}J_{2n-2}$ が成り立つことを示せ．

(これと (2), (3) の結果をあわせると，$I = \sqrt{\pi}/2$ が得られる.)